# 中大物天高数入坑手册

中山大学物理与天文学院 黄志琦

2024 年 10 月 5 日

## 1 远离网贷，珍惜腰子

某网贷平台仅收万分之一的日息，小明借了一个小目标，然后在银行存了个年化收益率为 3.8% 的五年定期存款。小明觉得 $365/10000 < 3.8\%$，所以最后能用利息差赚些钱。五年后，小明因无力还网贷被讨债公司嘎掉了腰子，这是为什么呢?

在这桩（虽然是瞎编的但却）很有警示意义的惨案中，小明犯了两个错误。

第一个错误：把日息直接乘以一年的天数，以为这就是年息。实际上呢，每天都在利滚利，年息等于 $(1 + 0.0001)^{365} \approx 3.72\%$

第二个错误：没有分清年化收益率和年利率的差别。年化收益率是总收益除以年数。也就是五年的总收益是 $3.8\% \times 5 = 19\%$. 假定年利率是 $x$ 的话，就可以写出等式 $(1 + x)^5 = 1.19$。解出 $x \approx 3.54\%$，小于网贷的年息!

结果五年下来，小明负债：

$$10^8 \times \left(1.0001^{365\times 5} - 1.19\right) = 1020320$$

元。哦对了，这还没算闰年（五年里面大概率会有一个）还要多收一天日息呢!

为了避免惨案的发生，除了学好数学，还要记得一句话：天上不会掉馅饼，你却可能会掉腰子!

## 2 自然对数的底，高利贷计算神器

小明在小学就知道怎么把两个数的和的次幂进行展开，例如

$$\begin{aligned}(1+x)^2 &= 1+2x+x^2\\ (1+x)^3 &= 1+3x+3x^2+x^3\\ (1+x)^4 &= 1+4x+6x^2+4x^3+x^4\end{aligned}$$

等等。

对一般的自然数 $n$，有

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots + nx^{n-1} + x^n. \tag{1}$$

这里的 $\binom{n}{k}$ 表示从 $n$ 个 $1 + x$ 因子中取 $k$ 个 $x$ 的组合计数，具体用阶乘符号写出来就是

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}. \tag{2}$$

注意到在 (1) 的右边，后一项和前一项的比总是不超过 $nx$，因此当 $nx$ 非常小的时候，我们可以把后面小于 $(nx)^2$ 量级的项都忽略掉，近似得到

$$(1+x)^n \approx 1+nx, \quad (n|x| \ll 1). \tag{3}$$

这里的 $\ll$ 是“远小于”的意思。(3) 的意思就是：当利息和本金相比可以忽略时，你可以忽略利滚利的效应，近似把日息乘以天数当作总利息。不过，在小明网贷惨案中，$x = 0.0001$，$n = 365 \times 5$，$nx = 0.1825$ 已经不能说是非常小的数了。

只能说：小明大意了！

现在我们进一步考虑，如果利息和本金相比完全不可忽略（也就是 $nx$ 和 1 相比差不多或者更大）的时候，有没有什么快速计算腰子还留不留得住的方法呢？我们来考虑一个很典型的情况，$nx = 1$ 并且 $n$ 很大的情况。直接把 $x = \frac{1}{n}$ 代入 (1) 计算得到

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{0!} + \frac{n}{1!n} + \frac{n(n-1)}{2!n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3} + + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!n^4} + \ldots \tag{4}$$

如果令 $n$ 无限地增大，前面的一些（项数远小于 $n$ 的）项就会逼近 $\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$，而后面的项将会小到离谱以致于完全可以扔掉。于是我们定义这样一个无理数

$$e \equiv \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots = 2.718281828459045235\ldots \tag{5}$$

根据上面的讨论，我们就知道，当 $n$ 很大时，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx e$；或者更一般地，当 $x \ll 1$ 时，$(1+x)^{1/x} \approx e$。比如，$1.001^{1000}$ 和 $e$ 的差别只有万分之五左右，确实是不错的近似。

你可能会有疑惑，这样不是只能计算日息 × 天数恰好等于 1 的情形吗，好像意义不是很大啊！实际上并非如此，你几乎可以用 $e$ 来计算任何利滚利的问题。我们来看一个例子

**例题 1**：小明借了日息千分之一的高利贷，那么 3000 天（约 8 年）之后，小明的负债是本金的多少倍？

**解答**：小明负债是本金的

$$1.001^{3000} = (1.001^{1000})^3 \approx e^3 \approx 20$$

倍！

---

于是我们发现 $e$ 这个数自然就是应该被用来算它的多少多少次方这样的东西的，$e$ 的 $x$ 次方，也就是$e^x$ 这位江湖人称“**指数函数**”的兄弟，简直就是高利贷计算神器！

如果需要考虑腰子还能留住多久，那就要逆向计算 $e$ 的多少次方等于某个给定的允许负债额。这是求以 $e$ 为底的对数的问题：函数 $\log_e x$ 在江湖上被称为“**自然对数**”，并用$\ln x$ 来表示。记住了，以后介绍 $e$ 的时候说“自然对数的底”就行了，听起来就像有很厉害的大哥罩着的样子！

在学习微积分时，我们要尽量追求“自然”：**把所有乘方都尽可能都转化为指数函数的形式，把所有对数都写成自然对数的形式**。除了这个会让你受益匪浅的强迫症之外，最好再加上一条：**所有角度都用弧度制来表示**。例如，直角一定要写成 $\pi/2$ 而不是 $90°$。（我这里说得那么夸张是为了帮助你尽快适应高等数学的语言环境。）

举些我犯病的例子：方程 $2^x = 10$ 的解，中学生都喜欢直接写答案 $x = \log_2 10$，但我愣是喜欢写成 $x = \frac{\ln 10}{\ln 2}$——实际上，我并不是把 $\log_2 10$ 写成 $\frac{\ln 10}{\ln 2}$，而是先犯病把方程写成了 $e^{x \ln 2} = 10$，然后两边取自然对数得到 $x \ln 2 = \ln 10$，最后解出 $x = \frac{\ln 10}{\ln 2}$（请放弃对我的治疗）。

## 3 “极限”是一门被动技

在微积分被发明出来之后相当长一段时间内，大家都用 $(1+x)^{1/x}=e$，并把 $x$ 理解为“无穷小”这样的办法来定义 $e$。大佬们都很有默契地拒绝解释“无穷小”到底是什么——反正你要是理解不了什么是“无穷小”，就说明你的智商还不足以学习微积分！

现代的数学语言放弃了这样依靠侮辱对方智商才能存在的概念，转而采用了一种完全严谨的“极限”的语言来描述：当 $x$ 趋向于零时，$(1+x)^{1/x}$ 的极限等于 $e$。用下面的符号来表示：

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$$

用大白话来说：当 $x$ 很接近 0 时，$(1+x)^{1/x}$ 就很接近 $e$。问题是，这样的表述是文学而不是数学。因为“很接近”和“无穷小”一样没有严谨的定义。

让极限成为严谨的概念的关键在于：使用被动技！

如果你经常玩游戏，你一定知道什么是“被动技”。被动技和普通技能的差别在于：普通技能是你想用就用，被动技却必须由对方的进攻来触发。我确实无法主动说出 $x$ 很接近 0 的标准，但是，只要你先提出一个 $(1+x)^{1/x}$ 很接近 $e$ 的标准（比如 $|(1+x)^{1/x}-e|<10^{-4}$），我都能给出一个 $x$ 很接近 0 的标准（例如 $|x-0|<10^{-8}$），来保证你的要求得到满足。

更一般地，

$$\lim_{x\to a}f(x)=b$$

的标准表述是：任给一个 $\epsilon>0$，都存在一个 $\delta>0$ 使得当 $|x-a|<\delta$ 时，都有 $|f(x)-b|<\epsilon$。这其实就是说，你先提出一个 $f(x)$ 很接近 $b$ 的要求 $|f(x)-b|<\epsilon$，我总能根据你的要求制订一个 $x$ 很接近 $a$ 的标准 $|x-a|<\delta$，来保证你的要求得到满足。

知道了极限是一门被动技之后就好办了，你提要求（给出 $\epsilon$），我用掌握的数学技能构造出满足你要求的标准（$\delta$）就可以了。我们来举一个简单的例子：

**例题 2**: 证明 $\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$.

**分析**: 这看起来几乎是废话的一个命题，挑战的其实就是对“极限”这个被动技的理解。你先随便提要求 $|x^2-4|<\epsilon$（这里的 $\epsilon$ 是你任意挑选的一个正数）；考虑到 $|x^2-4|=|x-2||x+2|$，我只要令 $|x-2|<1$ 就可以轻松控制 $|x+2|<5$，然后同时令 $|x-2|<\frac{\epsilon}{5}$，就可以满足你的要求。组织成标准的 $\epsilon$-$\delta$ 语言就是

---

**解答**: 对任给的 $\epsilon>0$，都存在 $\delta=\min\{1,\frac{\epsilon}{5}\}$ (这里的 min 符号表示取两个数中的较小者)，当 $|x-2|<\delta$ (也就是 $|x-2|<1$ 和 $|x-2|<\frac{\epsilon}{5}$ 同时成立) 时，$|x^2-4|=|x-2||x+2|<\frac{\epsilon}{5}|x-2+4|\le\frac{\epsilon}{5}(|x-2|+4)<\frac{\epsilon}{5}(1+4)=\epsilon$.

---

当 $x\to\infty$ 时，$x$ 的增长速度显然远快于 $\ln x$。那么，让我们用 $\epsilon$-$\delta$ 语言来把废话变成真理吧！

**例题 3**: 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

**分析**: 作变量替换 $t=\ln x$，则问题等价于证明 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t}{e^t}=0$（成功地把废话变成了更明显的废话）。

---

**解答**: 对任给的 $\epsilon>0$，取 $N=\max\{\frac{8}{\epsilon}+1,3\}$，当 $t>N$ 时，不妨设 $t$ 的整数部分为 $n$，则 $n\ge 2$（因

此 $n-1 \geq \frac{n}{2}$），且 $n > \frac{8}{\epsilon}$。注意到 $e^t > 2^t = (1+1)^t \geq (1+1)^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \ldots > \frac{n(n-1)}{2} \geq \frac{n^2}{4}$ 以及 $t < n+1 < 2n$

$$\frac{t}{e^t} < \frac{2n}{\frac{n^2}{4}} = \frac{8}{n} < \frac{8}{8/\epsilon} = \epsilon.$$

---

注意上面的例题也可以写成别的形式，例如把 $x$ 换成 $1/x$ 就可以得到

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0.$$

这里 $x \to 0^+$ 是只允许 $x$ 在正数的范围内趋向于零。再把 $x$ 替换成任意的 $x^p$ （$p$ 为任意正数），就有

$$\lim_{x \to 0^+} x^p \ln x = 0.$$

## 4 简单粗暴的五个等式

有了极限这个强大的被动技，我们能对以前模糊不清的概念给出精确的描述。例如，我们说 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内是个连续函数，其实就是说对定义域内任意一点 $x_0 \in [a,b]$，都有 $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$。除此之外，我们还能精确地解释 (5) （或者更为精简的写法 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$）这样的“无穷级数求和”的具体涵义。它实际上是

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$$

的意思。用被动技来描述：对任给的 $\epsilon > 0$，都存在 $N$ 使得当 $n > N$ 时，总有 $|e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}| < \epsilon$。

如果一个无穷级数求和的等式包含未知量，那么该等式可能只在未知量的某个范围内成立。例如，很容易看出来，

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \tag{6}$$

当且仅当 $|x| < 1$ 时才成立。

好了，现在你能看懂无穷级数求和的表达式了。我就直接丢给你五个：

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots, \tag{7}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots, \tag{8}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots, \tag{9}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots, (|x| < 1) \tag{10}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \ldots, (|x| < 1) \tag{11}$$

注意在 (10) 和 (11) 中，都要求 $|x|<1$。在 (11) 中，我们还把组合计数符号 $\begin{pmatrix}\alpha\\k\end{pmatrix}$ 进行了推广（允许 $\alpha$ 不是非负整数）：它当 $k=0$ 时定义为 1，当 $k$ 为正整数时定义为 $\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$。最后，请记得我们的强迫症：在 $\cos x$ 和 $\sin x$ 中的 $x$ 是弧度制的。

我打算跳过这五个等式的严谨证明，而仅以 (7) 为例进行一些自然语言解释。

我们要把 (7-11) 看成 $e^x, \cos x, \sin x, \ln(1+x)$ 以及 $(1+x)^\alpha$ 在 $x$ 很小时的从主到次的逐"阶"逼近。以 (7) 为例，设 $x=$ 日息 $\times$ 天数，小明的总负债（$e^x$ 个小目标）的零阶贡献是 1 个小目标（本金），一阶的贡献是 $x$ 个小目标（本金的利息），二阶贡献是 $\frac{x^2}{2}$ 个小目标（本金的利息的利息，这里要除以 2 是因为本金的利息不是一开始就有的，而是逐日增加，最后才到 $x$），三阶贡献是 $\frac{x^3}{6}$ 个小目标（本金的利息的利息的利息），以此类推。

比如我们想计算 $e^{0.01}$，我们可以就取前两阶贡献（本金 + 本金的利息）作为近似 $e^{0.01}\approx 1+0.01=1.01$。这已经是很不错的近似了。如果我想算得更精确一些，可以把二阶贡献（本金的利息的利息）也包括进来，$e^{0.01}\approx 1+0.01+\frac{0.01^2}{2}=1.01005$。在这个问题里，加上二阶贡献最多只能算锦上添花，对结果影响不大。但是，如果我换一个问题：请估算 $\frac{e^{0.01}-1.01}{0.01^2}$。这下你体会到计算二阶贡献的必要性了么？如果你体会到了——恭喜你，你已经在实际操作的层面上掌握了微积分中最重要的一项技能：计算极限。

我们来看几个例子：

**例题 4**: 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$.

**分析**: 这不就是把之前的 0.01 给换成 $x$ 吗！

---

**解答**: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots\right)-1-x}{x^2}=\frac{1}{2}$.

---

**例题 5**: 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}$.

**分析**: 因为分母只精确到了 $x^3$，所以对分子进行近似的时候，也只要保留到三阶贡献（$x^3$ 项）就可以了。

---

**解答**: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{x^3}{6}+\ldots\right)-x\left(1-\frac{x^2}{2}+\ldots\right)}{x^3}=\frac{1}{3}$

---

**例题 6**: 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-x)^{1/3}-e^{-x/3}}{x^2}$

**分析**: 分子精确到 $x^2$，所以分子也保留到二阶贡献。不过，这里要先把 $-x$ 和 $-\frac{x}{3}$ 这些（同样趋向于零的量）都当做一个整体来处理。把 (11) 中的 $x$ 换为 $-x$，就有

$$(1-x)^{1/3}=1+\frac{1}{3}(-x)+\frac{\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}(-x)^2+\ldots=1-\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\ldots$$

把 (7) 中的 $x$ 换为 $x/3$，就有

$$e^{-x/3}=1+\left(-\frac{x}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{3}\right)^2+\ldots=1-\frac{1}{3}x+\frac{1}{18}x^2+\ldots$$

---

**解答**：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-x)^{1/3}-e^{-x/3}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\ldots\right)-\left(1-\frac{1}{3}x+\frac{1}{18}x^2+\ldots\right)}{x^2}=-\frac{1}{6}$

---

有时，我们需要把一堆项的总和看成一个整体的小量，请看下面的例子。

**例题 7**: 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$

**分析**: 根据我们的强迫症，先要把 $(\cos x)^{1/x^2}$ 写成 $e^{\frac{1}{x^2}\ln\cos x}$。先把 $\cos x$ 展开

$$\ln\cos x=\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\ldots\right)$$

然后把 $-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\ldots$ 看成一个整体，也就是说，把 (10) 里的 $x$ 替换为 $-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\ldots$

$$\ln\cos x=\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\ldots\right)=\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\ldots\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\ldots\right)^2+\ldots=-\frac{x^2}{2}+\ldots$$

最后的 $\ldots$ 省略的都是 $x^4$ 或更高阶的一些项。

---

**解答**：$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\ln\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\left(-\frac{x^2}{2}+\ldots\right)}=e^{-1/2}$

---

**例题 8**: 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}$.

**分析**: 这里的 arctan 是反正切函数，我们的五大必杀技里没有，怎么办呢？别慌，我们只要让 $t=\arctan x$，也就是 $x=\tan t$，问题就转化为：$\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\tan t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t\cos t}{\sin t}$，落入了我们必杀技的攻击范围！

---

**解答**：让 $t=\arctan x$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\tan t}=\lim_{t\to 0}\frac{t\cos t}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{t\left(1-\frac{t^2}{2}+\ldots\right)}{t-\frac{t^3}{6}+\ldots}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{t^2}{2}+\ldots}{1-\frac{t^2}{6}+\ldots}=1$$

---

**例题 9**: 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right]$

**分析**: 因为我们学的五大必杀技都是关于 $x$ 趋向于零的，所以第一步要做的就是把 $n\to\infty$ 的问题转化为 $x=\frac{1}{n}\to 0$ 的问题。做变量替换 $x=\frac{1}{n}$ 后，问题转化为计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$$

然后强迫症就不用多说了吧！毫不犹豫地把 $(1+x)^{1/x}$ 写成了 $e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$。利用

$$\frac{1}{x}\ln(1+x)=\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+\ldots\right)=1-\frac{x}{2}+\ldots$$

就可以得到

$$e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}=e^{1-\frac{x}{2}+\cdots}=e^1e^{-x/2+\cdots}=e\left(1-\frac{x}{2}+\ldots\right)=e-\frac{e}{2}x+\ldots$$

这里要注意的是 1 不是小量，所以要把 $e^1$ 单独分离出来（根据 $e^{a+b}=e^ae^b$ 这个基本性质），而不是一起展开。

---

**解答**:

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right]=\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e-\frac{e}{2}x+\ldots-e}{x}=-\frac{e}{2}.$$

---

这几个问题可以说已经是教科书里的天花板难度了。你在上大学时会碰到的问题一般都简单得多，例如像 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ 这样看起来有点像搞笑段子的东西。

为了熟练掌握五大必杀技，进行适当的练习是有必要的。我在下面留几道难度依次提升 (从搞笑段子到教科书天花板) 的题给你。你可以试试自己能闯到第几关。

第一关 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}$

第二关 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{e^x-\sqrt{1+x}}$

第三关 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3}{x-\tan x}$

第四关 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^x-1}{x\ln x}$

第五关 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{e^{1/n}+e^{-1/n}}{2}\right)^{n^2}$

第六关 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x-\sin x}{\arctan x-\tan x}$

第七关 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(\cos x)^{-1/x^2}-\sqrt{e}}{x^2}$

好了，现在你已经掌握了强大的计算工具！下面即将给出的的微积分的内容对你来说不要太容易！

微积分包含微分和积分两部分内容。微分研究的是如何计算函数的微小变化量；积分研究的是反向操作问题：如何把小量写成某个函数的微小变化量（于是一堆小量加起来就是某函数的总变化量）。

# 5 小明超速了

小明因无力偿还网贷，为了保住腰子就驾车出逃，结果被电子眼拍到超速，罚款 1500 元，悲惨的生活雪上添霜。

电子眼是怎么测车速的呢? 最简单的办法就是在 $t$ 时刻拍张照，然后在很短的时间间隔 $\Delta t$ 之后（也就是 $t+\Delta t$ 时刻）再拍张照，根据两次拍照车的位置差 $\Delta x$，来计算车速 $v=\frac{\Delta x}{\Delta t}$。

小明可是杠精，他对交警叔叔说："这算出来的只是在 $t$ 到 $t+\Delta t$ 这段时间内的车的平均速度而已，并不一定是任何时刻的车速。凭啥罚我!?"

交警叔叔："除了罚款 1500 元，还要扣 3 分。"

小明继续杠："你这又不是区间测速⋯⋯"

交警叔叔："扣 6 分。"

小明："⋯⋯我没意见了"

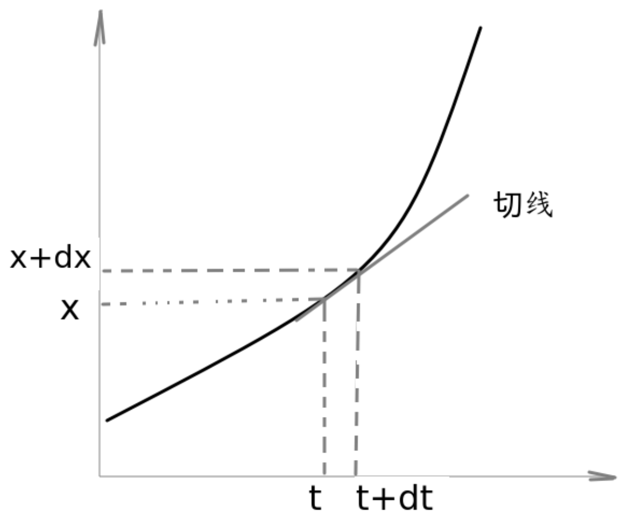
简单起见，把小明的车看成做一维运动的质点，其位置 $x$ 随时间 $t$ 变化的函数是 $x(t)$（位置函数）。在 $t$ 时刻的速度定义为

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t},$$

可以看到上式的结果也依赖于 $t$，所以是个新的函数（速度函数）。这个函数的具体形式可以由 $x(t)$ 的具体形式导出来，我们称之为 $x(t)$ 的**导函数**，并记作 $x'(t)$ 或者 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，用大白话来说，就是 $x$ 的微小变化量和 $t$ 的微小变化量之比。在

$$x'(t)\equiv\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\equiv\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}, \tag{12}$$

这个式子里，最难理解的是 d 这个被称为“微分算符”的符号。粗浅地说：d 表示对后面的量的微小变化取一阶近似。按照这个理解，我们甚至可以把 $x'(t)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 等价地写成 $\mathrm{d}x=x'(t)\mathrm{d}t$。这种“无穷小 = 无穷小”的等式或多或少又让我们想起了曾经被侮辱的智商。不过，在十分有趣（但限于篇幅无法在这里详细讨论）的微分形式理论里，$\mathrm{d}x$ 有非常严谨（但代价是变得有些不直观）的定义，这些困惑都可以得到清晰的解答。




如果在 $t$-$x$ 坐标系里把 $x(t)$ 的函数图像画出来，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 的几何意义就是过 $(t,x)$ 点的切线的斜率。

如果(12) 右边的极限存在，我们就说 $x(t)$ 是可导的函数。这时 $x'(t)$ 或者 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 这样的符号才有意义。从几何上理解，就是函数图像是光滑的，存在切线。

因为导函数是用极限定义的，对已经熟练掌握如何计算极限的我们来说，计算导函数当然不算太难。

例如，当 $x(t)=3t$ 时，

$$\frac{\mathrm{d}(3t)}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{3(t+\Delta t)-3t}{\Delta t}=3.$$

当 $x(t)=t^2$ 时，

$$\frac{\mathrm{d}(t^2)}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(t+\Delta t)^2-t^2}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}(2t+\Delta t)=2t.$$

当 $x(t)=t^p$ （$p$ 为固定常数）时，

$$\frac{\mathrm{d}(t^p)}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(t+\Delta t)^p-t^p}{\Delta t}=t^p\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(1+\frac{\Delta t}{t})^p-1}{\Delta t}=t^p\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1+p\frac{\Delta t}{t}+\ldots-1}{\Delta t}=pt^{p-1}.$$

当 $x(t)=e^t$ 时，

$$\frac{\mathrm{d}(e^t)}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{e^{t+\Delta t}-e^t}{\Delta t}=e^t\lim_{\Delta t\to 0}\frac{e^{\Delta t}-1}{\Delta t}=e^t\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1+\Delta t+\ldots-1}{\Delta t}=e^t.$$

当 $x(t)=\ln t$ 时，

$$\frac{\mathrm{d}(\ln t)}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\ln(t+\Delta t)-\ln t}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\ln\frac{t+\Delta t}{t}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta t}{t}\right)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{\Delta t}{t}+\ldots}{\Delta t}=\frac{1}{t}.$$

当涉及三角函数时，我们需要回忆一些三角函数的公式，例如 $x(t)=\sin t$ 时，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(\sin t)}{\mathrm{d}t} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin(t+\Delta t)-\sin t}{\Delta t}\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin t\cos(\Delta t)+\cos t\sin(\Delta t)-\sin t}{\Delta t}\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\cos t\sin(\Delta t)-[1-\cos(\Delta t)]\sin t}{\Delta t}\\ &= \cos t\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin(\Delta t)}{\Delta t}-\sin t\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1-\cos(\Delta t)}{\Delta t}\\ &= \cos t\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta t-\frac{\Delta t^3}{6}+\ldots}{\Delta t}-\sin t\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1-(1-\frac{\Delta t^2}{2}+\ldots)}{\Delta t}\\ &= \cos t.\end{aligned}\tag{13}$$

类似地

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(\cos t)}{\mathrm{d}t} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\cos(t+\Delta t)-\cos t}{\Delta t}\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\cos t\cos(\Delta t)-\sin t\sin(\Delta t)-\cos t}{\Delta t}\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\cos t\,[\cos(\Delta t)-1]-\sin t\sin(\Delta t)}{\Delta t}\\ &= \cos t\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\cos(\Delta t)-1}{\Delta t}-\sin t\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin(\Delta t)}{\Delta t}\\ &= -\sin t.\end{aligned}\tag{14}$$

把这些结果收集起来，就有

$$\mathrm{d}(t^p) = pt^{p-1}\mathrm{d}t \tag{15}$$
$$\mathrm{d}(e^t) = e^t\mathrm{d}t \tag{16}$$
$$\mathrm{d}(\ln t) = \frac{\mathrm{d}t}{t} \tag{17}$$
$$\mathrm{d}(\sin t) = \cos t\,\mathrm{d}t \tag{18}$$
$$\mathrm{d}(\cos t) = -\sin t\,\mathrm{d}t \tag{19}$$

上面这些结果中的 $t$ 是可以换成任何其他 $t$ 的函数进行套娃使用的。这些操作可以大大节省计算时间。所以想成为微积分计算高手的话，建议把上面的结果都记住。

**例题 10**: 计算 $e^{\sin t}$ 的导函数。

**分析**: 我们只要把 $\mathrm{d}(e^t)=e^t\mathrm{d}t$ 中的 $t$ 换成 $\sin t$，就能写出 $\mathrm{d}(e^{\sin t})=e^{\sin t}\mathrm{d}(\sin t)$，然后再计算 $\mathrm{d}(\sin t)$ 就可以搞定。

---

**解答**:

$$\frac{\mathrm{d}(e^{\sin t})}{\mathrm{d}t}=\frac{e^{\sin t}\mathrm{d}(\sin t)}{\mathrm{d}t}=\frac{e^{\sin t}\cos t\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}=e^{\sin t}\cos t.$$

注意求导函数是线性操作。也就是说两个函数的线性组合的导函数，等于它们的导函数的线性组合。

**例题 11**: 计算 $\frac{1}{\sqrt{1+t+2t^2}}$ 的导函数。

**解答**: 首先在 $\mathrm{d}(t^p) = pt^{p-1}$ 中把 $t$ 换成 $1+t+2t^2$，并取 $p=-1/2$，就有

$$\mathrm{d}\frac{1}{\sqrt{1+t+2t^2}} = -\frac{1}{2}(1+t+2t^2)^{-3/2}\mathrm{d}(1+t+2t^2),$$

然后根据 d 是线性操作，就有

$$\mathrm{d}(1+t+2t^2) = \mathrm{d}(1)+\mathrm{d}(t)+2\mathrm{d}(t^2) = 0+\mathrm{d}t+2(2t\mathrm{d}t) = (4t+1)\mathrm{d}t.$$

所以最后

$$\mathrm{d}\frac{1}{\sqrt{1+t+2t^2}} = -\frac{1}{2}(1+t+2t^2)^{-3/2}(4t+1)\mathrm{d}t$$

也就是导函数

$$\frac{\mathrm{d}\frac{1}{\sqrt{1+t+2t^2}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}(1+t+2t^2)^{-3/2}(4t+1).$$

---

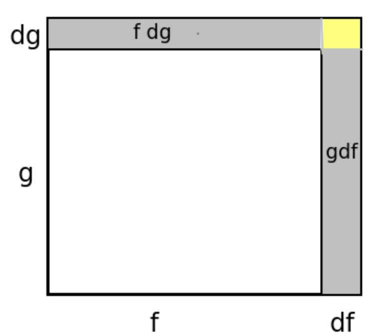
根据我们对 d 的粗浅解释，还可以得到乘积微分公式：

$$\mathrm{d}(fg) = f\mathrm{d}g + g\mathrm{d}f\,.$$

这是因为

$$\mathrm{d}(fg) = (f+\mathrm{d}f)(g+\mathrm{d}g) - fg = f\mathrm{d}g + g\mathrm{d}f + \mathrm{d}f\mathrm{d}g = f\mathrm{d}g + g\mathrm{d}f.$$

我们丢掉了二阶小量 $\mathrm{d}f\mathrm{d}g$，因为左边的 $\mathrm{d}(fg)$ 只要求保留一阶贡献。




乘积的微分公式可以用上面的图来表示，当矩形的两边长 $f, g$ 分别增长 $\mathrm{d}f$ 和 $\mathrm{d}g$ 时，它的面积增长量可以用两部分灰色部分的面积 $f\mathrm{d}g$ 和 $g\mathrm{d}f$ 来近似：黄色部分的面积 $\mathrm{d}f\mathrm{d}g$ 是二阶小量可以忽略。

**例题 12**: 计算 $e^t\sin t$ 的导函数。

**解答**：根据乘积的微分公式

$$\frac{\mathrm{d}(e^t \sin t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\sin t\, \mathrm{d}(e^t) + e^t \mathrm{d}(\sin t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\sin t\, e^t \mathrm{d}t + e^t \cos t\, \mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = e^t(\sin t + \cos t).$$

---

**例题 13**：计算 $\tan t$ 的导函数。

**解答**：根据 $\tan t = \sin t \frac{1}{\cos t}$ 和乘积的微分公式

$$\mathrm{d}(\tan t) = \frac{1}{\cos t}\mathrm{d}(\sin t) + \sin t\, \mathrm{d}\left(\frac{1}{\cos t}\right) = \mathrm{d}t + \sin t\, \mathrm{d}\left(\frac{1}{\cos t}\right).$$

在 $\mathrm{d}(t^p) = pt^{p-1}\mathrm{d}t$ 中把 $t$ 替换为 $\cos t$，并令 $p = -1$，就有

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{\cos t}\right) = -(\cos t)^{-2}\mathrm{d}(\cos t) = \frac{\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t.$$

于是最后

$$\frac{\mathrm{d}(\tan t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}t + \sin t \frac{\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = 1 + \tan^2 t = \sec^2 t.$$

---

最后，我们来研究下反函数如何处理：

**例题 14**：计算 $\arcsin t$ 的导函数。

**解答**：记 $x = \arcsin t$ $(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2})$，就可以得到 $t = \sin x$，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}(\sin x)} = \frac{\mathrm{d}x}{\cos x\, \mathrm{d}x} = \frac{1}{\cos x}$$

利用 $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ 这个条件可以写出 $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - t^2}$，所以

$$\frac{\mathrm{d}(\arcsin t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

---

上面给出的这些技巧足以应付绝大多数求导函数的问题了，我们以一道比较综合的问题来结束微分这部分内容。

**例题 15**：在 $-1 < t < 1$ 范围内，计算 $\frac{t \arctan(e^t)}{\sqrt{1-t^2}}$ 的导函数。

**解答**：利用乘积的微分公式

$$\mathrm{d}\left(\frac{t \arctan(e^t)}{\sqrt{1 - t^2}}\right) = \frac{\arctan(e^t)}{\sqrt{1 - t^2}}\mathrm{d}t + t\, \mathrm{d}\left(\frac{\arctan(e^t)}{\sqrt{1 - t^2}}\right).$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{t \arctan(e^t)}{\sqrt{1-t^2}}\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\arctan(e^t)}{\sqrt{1 - t^2}} + t\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\arctan(e^t)}{\sqrt{1-t^2}}\right)}{\mathrm{d}t}.$$

再次利用乘积的微分公式，有

$$\mathrm{d}\left(\frac{\arctan(e^t)}{\sqrt{1-t^2}}\right) = \arctan(e^t)\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}\left[\arctan(e^t)\right].$$

在 $\mathrm{d}(t^p) = pt^{p-1}\mathrm{d}t$ 中把 $t$ 替换为 $(1-t^2)$ 并令 $p=-1/2$，就可以求出

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right) = -\frac{1}{2}(1-t^2)^{-3/2}\mathrm{d}(1-t^2) = t(1-t^2)^{-3/2}$$

最后，令 $\arctan(e^t) = x$，则有 $e^t = \tan x$，再利用前面例题中得到过的结论 $\mathrm{d}(\tan x) = \sec^2 x\,\mathrm{d}x$，就可以写出

$$\frac{\mathrm{d}\left[\arctan(e^t)\right]}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}(\tan x)}\frac{\mathrm{d}(e^t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\sec^2 x\,\mathrm{d}x}\frac{e^t\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = \frac{e^t}{1+\tan^2 x} = \frac{e^t}{1+e^{2t}}.$$

把所有的结果放到一起并化简，就有

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{t\arctan(e^t)}{\sqrt{1-t^2}}\right)}{\mathrm{d}t} = (1-t^2)^{-3/2}\arctan(e^t) + \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\frac{e^t}{1+e^{2t}}.$$

---

下面我还是给出若干个习题供你练习。

第一关 计算 $t^4+2t+3$ 的导函数。

第二关 计算 $\ln\left(e^t+1\right)$ 的导函数。

第三关 计算 $\frac{\sin t}{t}$ 的导函数。

第四关 对 $a\neq 0$，计算 $\frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a}$ 的导函数。

第五关 计算 $\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)$ 的导函数。

## 6 积分

前面学习的微分操作，就是把 $f(t)$ 的一阶变化量 $\mathrm{d}f$ 写成 $g(t)\mathrm{d}t$ 的形式，也就是计算 $f$ 的导函数 $g$ 的问题。

积分是反过来的操作：把 $g(t)\mathrm{d}t$ 写成某个 $f(t)$ 的一阶变化量。例如 $\mathrm{d}(\cos t) = -\sin t\,\mathrm{d}t$ 反向操作就可以得到 $\sin t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}(-\cos t)$；又如 $\mathrm{d}(t^p) = pt^{p-1}\mathrm{d}t$ 反向操作可以得到 $t^\alpha\mathrm{d}t = \mathrm{d}\left(\frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1}\right)$ (注意这里只适用于 $\alpha\neq-1$ 的情况)；以及 $(1-t^2)\mathrm{d}t = \mathrm{d}\left(t-\frac{1}{3}t^3\right)$ 等等很一目了然的结果。

在讨论如何对付不那么一目了然的情形之前，我们先来看几个简单的例子，加深对积分的物理意义的理解。

**例题 16**: 小明在时间 $t\in[0,\pi]$ 内的速度为 $v(t)=\sin t$，计算小明在这段时间内的位移。

**解答**: 在这段时间内的每一小段时间的位移都可以写成 $v(t)\mathrm{d}t = \sin t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}(-\cos t)$，也就是 $-\cos t$ 的变化量。所以总位移等于 $-\cos t$ 的总变化量。具体写出来就是

$$\sum_{t=0}^{t=\pi}\sin t\,\mathrm{d}t = \sum_{t=0}^{t=\pi}\mathrm{d}(-\cos t) = [-\cos(\pi)] - [-\cos(0)] = 1-(-1) = 2.$$

这里的 $\sum\limits_{t=0}^{t=\pi}$ 表示对 $t\in[0,\pi]$ 内的所有小时间段求和。不过为了体现这里的求和是连续的而不是离散的，数学家们把求和符号 $\sum$ 改造得更加丝滑，像这样：

$$\sum \to \int$$

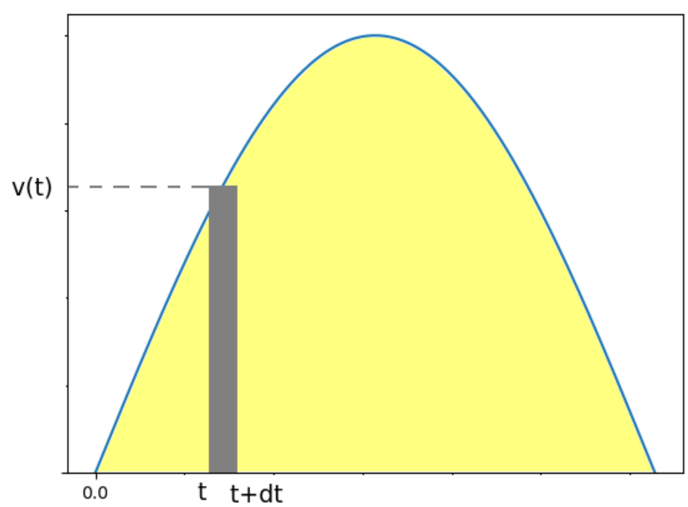
这个丝滑的求和符号有个新的名字：**积分符号**。

上面的过程用积分符号写出来就是

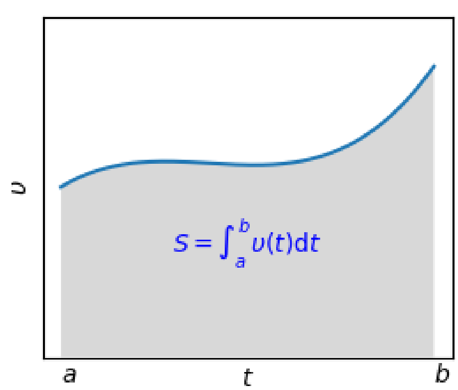
$$\int_0^\pi \sin t\,\mathrm{d}t=\int_0^\pi \mathrm{d}(-\cos t)=-\cos t\Big|_0^\pi=1-(-1)=2.$$

这里的记号 $(-\cos t)|_0^\pi$ 也是个不错的新发明：它表示函数 $-\cos t$ 在“积分上限” $\pi$ 和“积分下限” 0 的值的差。

上述计算结果还可以和几何图形的面积联系起来。



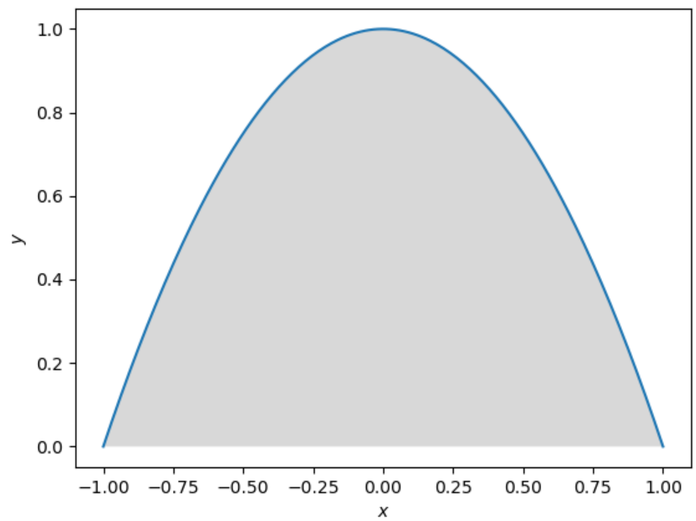

如图，画出 $v=\sin t$ 的函数图像，在 $t$ 到 $t+\mathrm{d}t$ 之间的灰色柱状地带的面积等于 $v(t)\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$。想象用这样的柱状带填满整个函数图像下方（黄色区域）。整个函数图像下方的总面积就等于所有 $\mathrm{d}x$ 之和，即上面算出来的总位移 2。



更一般地，如图所示，$\int_a^b v(t)dt$ 给出的是 $v(t)$ 的函数图像和 $t=a$，$t=b$, 以及 $t$ 轴包围的闭合区域的面积。(不过，当函数图像在 $t$ 轴下方时，面积得添加个负号。)

**例题 17**: 在 $x$-$y$ 平面上，抛物线 $y=1-x^2$ 和 $x$ 轴包围的闭合区域的面积等于多少?

**解答**:




如图，该区域的面积等于

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{3}x^3\right) = \left(x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

---

通过上面几个例子，我们发现积分的关键步骤就是对给定的函数 $g(t)$，寻找 $f(t)$ 使得它的导函数是 $g(t)$，我们管这种操作叫“求原函数”。教科书中一般用下面的“不定积分”(“不定”的意思是不告诉你在哪段时间内积分）符号来表示对 $g(t)$ 求原函数的运算

$$\int g(t)\mathrm{d}t$$

由于常数的导函数是零，不定积分的结果不是唯一的一个函数，而是可以添加任意一个常数 $C$（叫做积分常数)。

从 (15-19) 可以直接得出一些很平凡的结果

$$\int t^p\mathrm{d}t = \frac{1}{p+1}t^{p+1}+C \quad (p\neq -1) \tag{20}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t|+C \quad (t\neq 0) \tag{21}$$

$$\int e^t\mathrm{d}t = e^t+C \tag{22}$$

$$\int \sin t\,\mathrm{d}t = -\cos t+C \tag{23}$$

$$\int \cos t\,\mathrm{d}t = \sin t+C \tag{24}$$

注意 (21) 中 $t \neq 0$ 的意思是：不允许在包含 $t=0$ 的区间上对 $\frac{1}{t}$ 积分。

我们来看一些基于 (20-24) 的一些实战。

**例题 18**：计算不定积分 $\int t^4 \mathrm{d}t$。

**解答**：在 (20) 中取 $p=4$ 即有 $\int t^4 \mathrm{d}t = \frac{1}{5}t^5 + C$.

---

**例题 19**：计算不定积分 $\int \frac{t^2+1}{t} \mathrm{d}t$。

**解答**：

$$\int \frac{t^2+1}{t} \mathrm{d}t = \int \left(t + \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t = \int t \, \mathrm{d}t + \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{2}t^2 + \ln|t| + C \ (t \neq 0).$$

---

除了这些常规操作之外，还有两种高级技巧：变量替换和分部积分。先来看变量替换技术。

**例题 20**：计算不定积分 $\int e^{2t} \mathrm{d}t$。

**解答**：做变量替换 $y = 2t$，

$$\int e^{2t} \mathrm{d}t = \int e^y \mathrm{d}\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{1}{2}\int e^y \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}(e^y) = \frac{1}{2}e^y + C = \frac{1}{2}e^{2t} + C.$$

---

当你熟练之后，可以直接这样写：

$$\int e^{2t} \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int e^{2t} \mathrm{d}(2t) = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}(e^{2t}) = \frac{1}{2}e^{2t} + C.$$

**例题 21**：计算不定积分 $\int \frac{2t}{1+t^2} \mathrm{d}t$。

**解答**：令 $y = 1 + t^2$ ，并利用 (21)，就有

$$\int \frac{2t \, \mathrm{d}t}{1+t^2} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \ln|y| + C = \ln(1+t^2) + C.$$

---

当你熟练之后，可以这样写

$$\int \frac{2t \, \mathrm{d}t}{1+t^2} = \int \frac{\mathrm{d}(1+t^2)}{1+t^2} = \ln(1+t^2) + C.$$

**例题 22**：对固定的 $a > 0$，计算不定积分 $\int \frac{1}{a^2+t^2} \mathrm{d}t$。

**解答**：令 $t = a \tan y$ ，注意到

$$\mathrm{d}(\tan y) = \mathrm{d}\left(\frac{\sin y}{\cos y}\right) = \frac{\mathrm{d}(\sin y)}{\cos y} + \sin y \mathrm{d}\frac{1}{\cos y} = \mathrm{d}y - \sin y \frac{\mathrm{d}(\cos y)}{\cos^2 y} = \sec^2 y \, \mathrm{d}y.$$

就有

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{a^2+t^2} = \int \frac{\mathrm{d}(a\tan y)}{a^2+a^2\tan^2 y} = \int \frac{a\sec^2 y\,\mathrm{d}y}{a^2\sec^2 y} = \int \frac{\mathrm{d}y}{a} = \frac{y}{a} + C = \frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a} + C.$$

---

分部积分技术则是反向使用乘积的微分公式，把 $f\mathrm{d}g$ 转化为 $\mathrm{d}(fg) - g\mathrm{d}f$。请看下面两个例子。

**例题 23**: 计算不定积分 $\int \ln t\,\mathrm{d}t$.

**解答**：利用乘积的微分公式，有

$$\ln t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}(t\ln t) - t\,\mathrm{d}(\ln t).$$

于是

$$\int \ln t\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}(t\ln t) - \int t\mathrm{d}(\ln t) = t\ln t - \int t\frac{\mathrm{d}t}{t} = t\ln t - \int \mathrm{d}t = t\ln t - t + C.$$

---

**例题 24**: 计算不定积分 $\int te^t\mathrm{d}t$.

**解答**：首先把待积分的量转化为 $f\mathrm{d}g$ 的形式。

$$\int te^t\mathrm{d}t = \int t\,\mathrm{d}(e^t)$$

然后利用乘积的微分公式把 $f\mathrm{d}g$ 写成 $\mathrm{d}(fg) - g\mathrm{d}f$：

$$t\,\mathrm{d}(e^t) = \mathrm{d}(te^t) - e^t\mathrm{d}t.$$

于是

$$\int te^t\mathrm{d}t = \int t\,\mathrm{d}(e^t) = \int \mathrm{d}(te^t) - \int e^t\mathrm{d}t = te^t - \int \mathrm{d}(e^t) = te^t - e^t + C.$$

---

老规矩，一些适当的练习必不可少

第一关 计算不定积分 $\int \sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$.

第二关 计算不定积分 $\int \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t$.

第三关 对 $a>0$，计算不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2-t^2}}$.（提示：做变量替换 $t = a\sin y$）

第四关 计算不定积分 $\int t\sin t\,\mathrm{d}t$.

第五关 对 $a>0$，计算不定积分 $\int \sqrt{a^2+t^2}\mathrm{d}t$. （提示：令 $t = \frac{a}{2}\left(e^y - e^{-y}\right)$）

# 7 结语

网上流传这样一句话：高数十分简单，剩下 90 分很难。

上面介绍的就是“十分简单”的部分，剩下 90 分靠你自己了！