

中大物天高数入坑手册

中山大学物理与天文学院 黄志琦

2024 年 8 月 11 日

1 远离网贷，珍惜腰子

某网贷平台仅收万分之一的日息，小明借了一个小目标，然后在银行存了个年化收益率为 3.8% 的五年定期存款。小明觉得 $365/10000 < 3.8\%$ ，所以最后能用利息差赚些钱。五年后，小明因无力还网贷被讨债公司嘎掉了腰子，这是为什么呢？

在这桩（虽然是瞎编的但却）很有警示意义的惨案中，小明犯了两个错误。

第一个错误：把日息直接乘以一年的天数，以为这就是年息。实际上呢，每天都在利滚利，年息等于 $(1 + 0.0001)^{365} \approx 3.72\%$

第二个错误：没有分清年化收益率和年利率的差别。年化收益率是总收益除以年数。也就是五年的总收益是 $3.8\% \times 5 = 19\%$ 。假定年利率是 x 的话，就可以写出等式 $(1 + x)^5 = 1.19$ 。解出 $x \approx 3.54\%$ ，小于网贷的年息！

结果五年下来，小明负债：

$$10^8 \times (1.0001^{365 \times 5} - 1.19) = 1020320$$

元。哦对了，这还没算闰年（五年里面大概率会有一个）还要多收一天日息呢！

为了避免惨案的发生，除了学好数学，还要记得一句话：天上不会掉馅饼，你却可能会掉腰子！

2 自然对数的底，高利贷计算神器

小明在小学就知道怎么把两个数的和的次幂进行展开，例如

$$\begin{aligned}(1 + x)^2 &= 1 + 2x + x^2 \\(1 + x)^3 &= 1 + 3x + 3x^2 + x^3 \\(1 + x)^4 &= 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4\end{aligned}$$

等等。

对一般的自然数 n ，有

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots + nx^{n-1} + x^n. \quad (1)$$

这里的 $\binom{n}{k}$ 表示从 n 个 $1 + x$ 因子中取 k 个 x 的组合计数，具体用阶乘符号写出来就是

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}. \quad (2)$$

注意到在 (1) 的右边, 后一项和前一項的比总是不超过 nx , 因此当 nx 非常小的时候, 我们可以把后面小于 $(nx)^2$ 量级的项都忽略掉, 近似得到

$$(1+x)^n \approx 1+nx, \quad (n|x| \ll 1). \quad (3)$$

这里的 \ll 是“远小于”的意思。(3) 的意思就是: 当利息和本金相比可以忽略时, 你可以忽略利滚利的效应, 近似把日息乘以天数当作总利息。不过, 在小米网贷惨案中, $x=0.0001$, $n=365 \times 5$, $nx=0.1825$ 已经不能说是非常小的数了。

只能说: 小明大意了!

现在我们进一步考虑, 如果利息和本金相比完全不可忽略 (也就是 nx 和 1 相比差不多或者更大) 的时候, 有没有什么快速计算腰子还留不留得住的方法呢? 我们来考虑一个很典型的情况, $nx=1$ 并且 n 很大的情况。直接把 $x=\frac{1}{n}$ 代入 (1) 计算得到

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{0!} + \frac{n}{1!n} + \frac{n(n-1)}{2!n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!n^4} + \dots \quad (4)$$

如果令 n 无限地增大, 前面的一些 (项数远小于 n 的) 项就会逼近 $\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$, 而后面的项将会小到离谱以致于完全可以扔掉。于是我们定义这样一个无理数

$$e \equiv \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = 2.718281828459045235\dots \quad (5)$$

根据上面的讨论, 我们就知道, 当 n 很大时, $(1+\frac{1}{n})^n \approx e$; 或者更一般地, 当 $x \ll 1$ 时, $(1+x)^{1/x} \approx e$ 。比如, 1.001^{1000} 和 e 的差别只有万分之五左右, 确实是不错的近似。

你可能会疑惑, 这样不是只能计算日息 \times 天数恰好等于 1 的情形吗, 好像意义不是很大啊! 实际上并非如此, 你几乎可以用 e 来计算任何利滚利的问题。我们来看一个例子

例题 1: 小明借了日息千分之一的高利贷, 那么 3000 天 (约 8 年) 之后, 小明的负债是本金的多少倍?

解答: 小明负债是本金的

$$1.001^{3000} = (1.001^{1000})^3 \approx e^3 \approx 20$$

倍!

于是我们发现 e 这个数自然就是应该被用来算它的多少多少次方这样的东西的, e 的 x 次方, 也就是 e^x 这位江湖人称“**指数函数**”的兄弟, 简直就是高利贷计算神器!

如果需要考虑腰子还能留住多久, 那就要逆向计算 e 的多少次方等于某个给定的允许负债额。这是求以 e 为底的对数的问题: 函数 $\log_e x$ 在江湖上被称为“**自然对数**”, 并用 $\ln x$ 来表示。记住了, 以后介绍 e 的时候说“自然对数的底”就行了, 听起来就像有很厉害的大哥罩着的样子!

在学习微积分时, 我们要尽量追求“自然”: **把所有乘方都尽可能都转化为指数函数的形式, 把所有对数都写成自然对数的形式**。除了这个会让你受益匪浅的强迫症之外, 最好再加上一条: **所有角度都用弧度制来表示**。例如, 直角一定要写成 $\pi/2$ 而不是 90° 。(我这里说得那么夸张是为了帮助你尽快适应高等数学的语言环境。)

举些我犯病的例子: 方程 $2^x = 10$ 的解, 中学生都喜欢直接写答案 $x = \log_2 10$, 但我愣是喜欢写成 $x = \frac{\ln 10}{\ln 2}$ ——实际上, 我并不是把 $\log_2 10$ 写成 $\frac{\ln 10}{\ln 2}$, 而是先犯病把方程写成了 $e^{x \ln 2} = 10$, 然后两边取自然对数得到 $x \ln 2 = \ln 10$, 最后解出 $x = \frac{\ln 10}{\ln 2}$ (请放弃对我的治疗)。

3 “极限”是一门被动技

在微积分被发明出来之后相当长一段时间内，大家都用 $(1+x)^{1/x} = e$ ，并把 x 理解为“无穷小”这样的办法来定义 e 。大佬们都很有默契地拒绝解释“无穷小”到底是什么——反正你要是理解不了什么是“无穷小”，就说明你的智商还不足以学习微积分！

现代的数学语言放弃了这样依靠侮辱对方智商才能存在的概念，转而采用了一种完全严谨的“极限”的语言来描述：当 x 趋向于零时， $(1+x)^{1/x}$ 的极限等于 e 。用下面的符号来表示：

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$$

用大白话来说：当 x 很接近 0 时， $(1+x)^{1/x}$ 就很接近 e 。问题是，这样的表述是文学而不是数学。因为“很接近”和“无穷小”一样没有严谨的定义。

让极限成为严谨的概念的关键在于：使用被动技！

如果你经常玩游戏，你一定知道什么是“被动技”。被动技和普通技能的差别在于：普通技能是你想用就用，被动技却必须由对方的进攻来触发。我确实无法主动说出 x 很接近 0 的标准，但是，只要你先提出一个 $(1+x)^{1/x}$ 很接近 e 的标准（比如 $|(1+x)^{1/x} - e| < 10^{-4}$ ），我都能给出一个 x 很接近 0 的标准（例如 $|x - 0| < 10^{-8}$ ），来保证你的要求得到满足。

更一般地，

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

的标准表述是：任给一个 $\epsilon > 0$ ，都存在一个 $\delta > 0$ 使得当 $|x - a| < \delta$ 时，都有 $|f(x) - b| < \epsilon$ 。这其实就是说，你先提出一个 $f(x)$ 很接近 b 的要求 $|f(x) - b| < \epsilon$ ，我总能根据你的要求制订一个 x 很接近 a 的标准 $|x - a| < \delta$ ，来保证你的要求得到满足。

知道了极限是一门被动技之后就好办了，你提要求（给出 ϵ ），我用掌握的数学技能构造出满足你要求的标准（ δ ）就可以了。我们来举一个简单的例子：

例题 2: 证明 $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$ 。

分析: 这看起来几乎是废话的一个命题，挑战的其实就是对“极限”这个被动技的理解。你先随便提要求 $|x^2 - 4| < \epsilon$ （这里的 ϵ 是你任意挑选的一个正数）；考虑到 $|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2|$ ，我只要令 $|x - 2| < 1$ 就可以轻松控制 $|x + 2| < 5$ ，然后同时令 $|x - 2| < \frac{\epsilon}{5}$ ，就可以满足你的要求。组织成标准的 ϵ - δ 语言就是

解答: 对任给的 $\epsilon > 0$ ，都存在 $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{5}\}$ （这里的 \min 符号表示取两个数中的较小者），当 $|x - 2| < \delta$ （也就是 $|x - 2| < 1$ 和 $|x - 2| < \frac{\epsilon}{5}$ 同时成立）时， $|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2| < \frac{\epsilon}{5}|x - 2 + 4| \leq \frac{\epsilon}{5}(|x - 2| + 4) < \frac{\epsilon}{5}(1 + 4) = \epsilon$ 。

当 $x \rightarrow \infty$ 时， x 的增长速度显然远快于 $\ln x$ 。那么，让我们用 ϵ - δ 语言来把废话变成真理吧！

例题 3: 证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ 。

分析: 作变量替换 $t = \ln x$ ，则问题等价于证明 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^t} = 0$ （成功地把废话变成了更明显的废话）。

解答: 对任给的 $\epsilon > 0$ ，取 $N = \max\{\frac{8}{\epsilon} + 1, 3\}$ ，当 $t > N$ 时，不妨设 t 的整数部分为 n ，则 $n \geq 2$ （因

此 $n-1 \geq \frac{n}{2}$), 且 $n > \frac{8}{\epsilon}$ 。注意到 $e^t > 2^t = (1+1)^t \geq (1+1)^n = 1+n + \frac{n(n-1)}{2} + \dots > \frac{n(n-1)}{2} \geq \frac{n^2}{4}$ 以及 $t < n+1 < 2n$

$$\frac{t}{e^t} < \frac{2n}{\frac{n^2}{4}} = \frac{8}{n} < \frac{8}{8/\epsilon} = \epsilon.$$

注意上面的例题也可以写成别的形式, 例如把 x 换成 $1/x$ 就可以得到

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0.$$

这里 $x \rightarrow 0^+$ 是只允许 x 在正数的范围内趋向于零。再把 x 替换成任意的 x^p (p 为任意正数), 就有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p \ln x = 0.$$

4 简单粗暴的五个等式

有了极限这个强大的被动技, 我们能对以前模糊不清的概念给出精确的描述。例如, 我们说 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 内是个连续函数, 其实就是说对定义域内任意一点 $x_0 \in [a, b]$, 都有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 。除此之外, 我们还能精确地解释 (5) (或者更为精简的写法 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$) 这样的“无穷级数求和”的具体涵义。它实际上是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$$

的意思。用被动技来描述: 对任给的 $\epsilon > 0$, 都存在 N 使得当 $n > N$ 时, 总有 $|e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}| < \epsilon$ 。

如果一个无穷级数求和的等式包含未知量, 那么该等式可能只在未知量的某个范围内成立。例如, 很容易看出来,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad (6)$$

当且仅当 $|x| < 1$ 时才成立。

好了, 现在你能看懂无穷级数求和的表达式了。我就直接丢给你五个:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots, \quad (7)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots, \quad (8)$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots, \quad (9)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, (|x| < 1) \quad (10)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \dots, (|x| < 1) \quad (11)$$

注意在 (10) 和 (11) 中, 都要求 $|x| < 1$ 。在 (11) 中, 我们还把组合计数符号 $\binom{\alpha}{k}$ 进行了推广 (允许 α 不是非负整数): 它当 $k = 0$ 时定义为 1, 当 k 为正整数时定义为 $\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$ 。最后, 请记得我们的强迫症: 在 $\cos x$ 和 $\sin x$ 中的 x 是弧度制的。

我打算跳过这五个等式的严谨证明, 而仅以 (7) 为例进行一些自然语言解释。

我们要把 (7-11) 看成 $e^x, \cos x, \sin x, \ln(1+x)$ 以及 $(1+x)^\alpha$ 在 x 很小时的从主到次的逐“阶”逼近。以 (7) 为例, 设 $x = \text{日息} \times \text{天数}$, 小明的总负债 (e^x 个小目标) 的零阶贡献是 1 个小目标 (本金), 一阶的贡献是 x 个小目标 (本金的利息), 二阶贡献是 $\frac{x^2}{2}$ 个小目标 (本金的利息的利息, 这里要除以 2 是因为本金的利息不是一开始就有的, 而是逐日增加, 最后才到 x), 三阶贡献是 $\frac{x^3}{6}$ 个小目标 (本金的利息的利息的利息), 以此类推。

比如我们想计算 $e^{0.01}$, 我们可以就取前两阶贡献 (本金 + 本金的利息) 作为近似 $e^{0.01} \approx 1 + 0.01 = 1.01$ 。这已经是很不错的近似了。如果我想算得更精确一些, 可以把二阶贡献 (本金的利息的利息) 也包括进来, $e^{0.01} \approx 1 + 0.01 + \frac{0.01^2}{2} = 1.01005$ 。在这个问题里, 加上二阶贡献最多只能算锦上添花, 对结果影响不大。但是, 如果我换一个问题: 请估算 $\frac{e^{0.01}-1.01}{0.01^2}$ 。这下你体会到计算二阶贡献的必要性的么? 如果你体会到了——恭喜你, 你已经在实际操作的层面上掌握了微积分中最重要的一项技能: 计算极限。

我们来看几个例子:

例题 4: 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ 。

分析: 这不就是把之前的 0.01 给换成 x 吗!

$$\text{解答: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots) - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

例题 5: 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3}$ 。

分析: 因为分母只精确到了 x^3 , 所以对分子进行近似的时候, 也只要保留到三阶贡献 (x^3 项) 就可以了。

$$\text{解答: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \frac{x^3}{6} + \dots) - x(1 - \frac{x^2}{2} + \dots)}{x^3} = \frac{1}{3}$$

例题 6: 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)^{1/3} - e^{-x/3}}{x^2}$

分析: 分子精确到 x^2 , 所以分子也保留到二阶贡献。不过, 这里要先把 $-x$ 和 $-\frac{x}{3}$ 这些 (同样趋向于零的量) 都当做一个整体来处理。把 (11) 中的 x 换为 $-x$, 就有

$$(1-x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}(-x) + \frac{\frac{1}{3} \times (\frac{1}{3} - 1)}{2} (-x)^2 + \dots = 1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \dots$$

把 (7) 中的 x 换为 $x/3$, 就有

$$e^{-x/3} = 1 + \left(-\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{3}\right)^2 + \dots = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{18}x^2 + \dots$$

解答: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)^{1/3} - e^{-x/3}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \dots) - (1-\frac{1}{3}x + \frac{1}{18}x^2 + \dots)}{x^2} = -\frac{1}{6}$

有时, 我们需要把一堆项的总和看成一个小量, 请看下面的例子。

例题 7: 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$

分析: 根据我们的强迫症, 先要把 $(\cos x)^{1/x^2}$ 写成 $e^{\frac{1}{x^2} \ln \cos x}$ 。先把 $\cos x$ 展开

$$\ln \cos x = \ln \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots \right)$$

然后把 $-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots$ 看成一个整体, 也就是说, 把 (10) 里的 x 替换为 $-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots$

$$\ln \cos x = \ln \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots \right) = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots \right)^2 + \dots = -\frac{x^2}{2} + \dots$$

最后的 ... 省略的都是 x^4 或更高阶的一些项。

解答: $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \ln \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \left(-\frac{x^2}{2} + \dots \right)} = e^{-1/2}$

例题 8: 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$ 。

分析: 这里的 \arctan 是反正切函数, 我们的五大必杀技里没有, 怎么办呢? 别慌, 我们只要让 $t = \arctan x$, 也就是 $x = \tan t$, 问题就转化为: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\tan t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cos t}{\sin t}$, 落入了我们必杀技的攻击范围!

解答: 让 $t = \arctan x$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\tan t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cos t}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \left(1 - \frac{t^2}{2} + \dots \right)}{t - \frac{t^3}{6} + \dots} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{t^2}{2} + \dots}{1 - \frac{t^2}{6} + \dots} = 1$$

例题 9: 计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n - e \right]$

分析: 因为我们学的五大必杀技都是关于 x 趋向于零的, 所以第一步要做的就是将 $n \rightarrow \infty$ 的问题转化为 $x = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ 的问题。做变量替换 $x = \frac{1}{n}$ 后, 问题转化为计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$$

然后强迫症就不用多说了吧! 毫不犹豫地把 $(1+x)^{1/x}$ 写成了 $e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)}$ 。利用

$$\frac{1}{x} \ln(1+x) = \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^2}{2} + \dots \right) = 1 - \frac{x}{2} + \dots$$

就可以得到

$$e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} = e^{1 - \frac{x}{2} + \dots} = e^1 e^{-x/2 + \dots} = e \left(1 - \frac{x}{2} + \dots \right) = e - \frac{e}{2}x + \dots$$

这里要注意的是 1 不是小量，所以要把 e^1 单独分离出来（根据 $e^{a+b} = e^a e^b$ 这个基本性质），而不是一起展开。

解答：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n - e \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} - e}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - \frac{e}{2}x + \dots - e}{x} = -\frac{e}{2}.$$

这几个问题可以说已经是教科书里的天花板难度了。你在上大学时会碰到的问题一般都简单得多，例如像 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 这样看起来有点像搞笑段子的东西。

为了熟练掌握五大必杀技，进行适当的练习是有必要的。我在下面留几道难度依次提升（从搞笑段子到教科书天花板）的题给你。你可以试试自己能闯到第几关。

第一关 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

第二关 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - \sqrt{1+x}}$

第三关 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \tan x}$

第四关 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{x \ln x}$

第五关 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{1/n} + e^{-1/n}}{2} \right)^{n^2}$

第六关 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \sin x}{\arctan x - \tan x}$

第七关 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x)^{1/x^2} - \sqrt{e}}{x^2}$

好了，现在你已经掌握了强大的计算工具！下面即将给出的微积分的内容对你来说不要太容易！

微积分包含微分和积分两部分内容。微分研究的是如何计算函数的微小变化量；积分研究的是反向操作问题：如何把小量写成某个函数的微小变化量（于是一堆小量加起来就是某函数的总变化量）。

5 小明超速了

小明因无力偿还网贷，为了保住腰子就驾车出逃，结果被电子眼拍到超速，罚款 1500 元，悲惨的生活雪上添霜。

电子眼是怎么测车速的呢？最简单的办法就是在 t 时刻拍张照，然后在很短的时间间隔 Δt 之后（也就是 $t + \Delta t$ 时刻）再拍张照，根据两次拍照车的位置差 Δx ，来计算车速 $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ 。

小明可是杠精，他对交警叔叔说：“这算出来的只是在 t 到 $t + \Delta t$ 这段时间内的车的平均速度而已，并不一定是任何时刻的车速。凭啥罚我!?”

交警叔叔：“除了罚款 1500 元，还要扣 3 分。”

小明继续杠：“你这又不是区间测速……”

交警叔叔：“扣 6 分。”

小明：“……我没意见了”

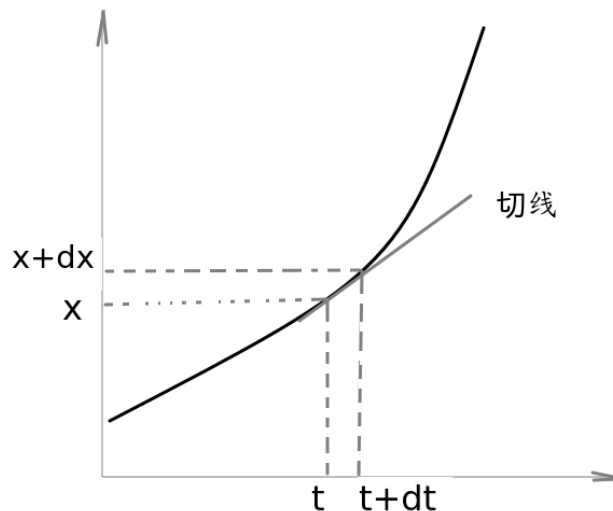
简单起见，把小明的车看成做一维运动的质点，其位置 x 随时间 t 变化的函数是 $x(t)$ （位置函数）。在 t 时刻的速度定义为

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t},$$

可以看到上式的结果也依赖于 t ，所以是个新的函数（速度函数）。这个函数的具体形式可以由 $x(t)$ 的具体形式导出来，我们称之为 $x(t)$ 的**导函数**，并记作 $x'(t)$ 或者 $\frac{dx}{dt}$ ，用大白话来说，就是 x 的微小变化量和 t 的微小变化量之比。在

$$x'(t) \equiv \frac{dx}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \quad (12)$$

这个式子里，最难理解的是 d 这个被称为“微分算符”的符号。粗浅地说： d 表示对后面的量的微小变化取一阶近似。按照这个理解，我们甚至可以把 $x'(t) = \frac{dx}{dt}$ 等价地写成 $dx = x'(t)dt$ 。这种“无穷小 = 无穷小”的等式或多或少又让我们想起了曾经被侮辱的智商。不过，在十分有趣（但限于篇幅无法在这里详细讨论）的微分形式理论里， dx 有非常严谨（但代价是变得有些不直观）的定义，这些困惑都可以得到清晰的解答。



如果在 $t-x$ 坐标系里把 $x(t)$ 的函数图像画出来， $\frac{dx}{dt}$ 的几何意义就是过 (t, x) 点的切线的斜率。

如果(12)右边的极限存在，我们就说 $x(t)$ 是可导的函数。这时 $x'(t)$ 或者 $\frac{dx}{dt}$ 这样的符号才有意义。从几何上理解，就是函数图像是光滑的，存在切线。

因为导函数是用极限定义的，对已经熟练掌握如何计算极限的我们来说，计算导函数当然不算太难。

例如，当 $x(t) = 3t$ 时，

$$\frac{d(3t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{3(t + \Delta t) - 3t}{\Delta t} = 3.$$

当 $x(t) = t^2$ 时，

$$\frac{d(t^2)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(t + \Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (2t + \Delta t) = 2t.$$

当 $x(t) = t^p$ (p 为固定常数) 时，

$$\frac{d(t^p)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(t + \Delta t)^p - t^p}{\Delta t} = t^p \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(1 + \frac{\Delta t}{t})^p - 1}{\frac{\Delta t}{t}} = t^p \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1 + p\frac{\Delta t}{t} + \dots - 1}{\frac{\Delta t}{t}} = pt^{p-1}.$$

当 $x(t) = e^t$ 时，

$$\frac{d(e^t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{e^{t+\Delta t} - e^t}{\Delta t} = e^t \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta t} - 1}{\Delta t} = e^t \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1 + \Delta t + \dots - 1}{\Delta t} = e^t.$$

当 $x(t) = \ln t$ 时,

$$\frac{d(\ln t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\ln(t + \Delta t) - \ln t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{t + \Delta t}{t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{\Delta t}{t})}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta t}{t} + \dots}{\Delta t} = \frac{1}{t}.$$

当涉及三角函数时, 我们需要回忆一些三角函数的公式, 例如 $x(t) = \sin t$ 时,

$$\begin{aligned} \frac{d(\sin t)}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin(t + \Delta t) - \sin t}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin t \cos(\Delta t) + \cos t \sin(\Delta t) - \sin t}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\cos t \sin(\Delta t) - [1 - \cos(\Delta t)] \sin t}{\Delta t} \\ &= \cos t \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta t)}{\Delta t} - \sin t \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\Delta t)}{\Delta t} \\ &= \cos t \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta t - \frac{\Delta t^3}{6} + \dots}{\Delta t} - \sin t \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - \frac{\Delta t^2}{2} + \dots)}{\Delta t} \\ &= \cos t. \end{aligned} \tag{13}$$

类似地

$$\begin{aligned} \frac{d(\cos t)}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\cos(t + \Delta t) - \cos t}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\cos t \cos(\Delta t) - \sin t \sin(\Delta t) - \cos t}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\cos t [\cos(\Delta t) - 1] - \sin t \sin(\Delta t)}{\Delta t} \\ &= \cos t \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\cos(\Delta t) - 1}{\Delta t} - \sin t \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta t)}{\Delta t} \\ &= -\sin t. \end{aligned} \tag{14}$$

把这些结果收集起来, 就有

$$d(t^p) = pt^{p-1} dt \tag{15}$$

$$d(e^t) = e^t dt \tag{16}$$

$$d(\ln t) = \frac{dt}{t} \tag{17}$$

$$d(\sin t) = \cos t dt \tag{18}$$

$$d(\cos t) = -\sin t dt \tag{19}$$

上面这些结果中的 t 是可以换成任何其他 t 的函数进行套娃使用的。这些操作可以大大节省计算时间。所以想成为微积分计算高手的话, 建议把上面的结果都记住。

例题 10: 计算 $e^{\sin t}$ 的导函数。

分析: 我们只要把 $d(e^t) = e^t dt$ 中的 t 换成 $\sin t$, 就能写出 $d(e^{\sin t}) = e^{\sin t} d(\sin t)$, 然后再计算 $d(\sin t)$ 就可以搞定。

解答:

$$\frac{d(e^{\sin t})}{dt} = \frac{e^{\sin t} d(\sin t)}{dt} = \frac{e^{\sin t} \cos t dt}{dt} = e^{\sin t} \cos t.$$

注意求导函数是线性操作。也就是说两个函数的线性组合的导函数，等于它们的导函数的线性组合。

例题 11: 计算 $\frac{1}{\sqrt{1+t+2t^2}}$ 的导函数。

解答: 首先在 $d(t^p) = pt^{p-1}$ 中把 t 换成 $1+t+2t^2$ ，并取 $p = -1/2$ ，就有

$$d\frac{1}{\sqrt{1+t+2t^2}} = -\frac{1}{2}(1+t+2t^2)^{-3/2}d(1+t+2t^2),$$

然后根据 d 是线性操作，就有

$$d(1+t+2t^2) = d(1) + d(t) + 2d(t^2) = 0 + dt + 2(2tdt) = (4t+1)dt.$$

所以最后

$$d\frac{1}{\sqrt{1+t+2t^2}} = -\frac{1}{2}(1+t+2t^2)^{-3/2}(4t+1)dt$$

也就是导函数

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1+t+2t^2}} = -\frac{1}{2}(1+t+2t^2)^{-3/2}(4t+1).$$

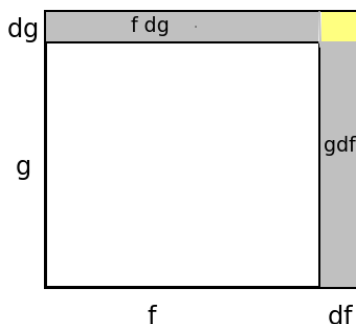
根据我们对 d 的粗浅解释，还可以得到乘积微分公式：

$$d(fg) = fdg + gdf.$$

这是因为

$$d(fg) = (f+df)(g+dg) - fg = fdg + gdf + dfdg = fdg + gdf.$$

我们丢掉了二阶小量 $dfdg$ ，因为左边的 $d(fg)$ 只要求保留一阶贡献。



乘积的微分公式可以用上面的图来表示，当矩形的两边长 f, g 分别增长 df 和 dg 时，它的面积增长量可以用两部分灰色部分的面积 fdg 和 gdf 来近似：黄色部分的面积 $dfdg$ 是二阶小量可以忽略。

例题 12: 计算 $e^t \sin t$ 的导函数。

解答：根据乘积的微分公式

$$\frac{d(e^t \sin t)}{dt} = \frac{\sin t d(e^t) + e^t d(\sin t)}{dt} = \frac{\sin t e^t dt + e^t \cos t dt}{dt} = e^t(\sin t + \cos t).$$

例题 13: 计算 $\tan t$ 的导函数。

解答：根据 $\tan t = \sin t \frac{1}{\cos t}$ 和乘积的微分公式

$$d(\tan t) = \frac{1}{\cos t} d(\sin t) + \sin t d\left(\frac{1}{\cos t}\right) = dt + \sin t d\left(\frac{1}{\cos t}\right).$$

在 $d(t^p) = pt^{p-1}dt$ 中把 t 替换为 $\cos t$ ，并令 $p = -1$ ，就有

$$d\left(\frac{1}{\cos t}\right) = -(\cos t)^{-2}d(\cos t) = \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt.$$

于是最后

$$\frac{d(\tan t)}{dt} = \frac{dt + \sin t \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt}{dt} = 1 + \tan^2 t = \sec^2 t.$$

最后，我们来研究下反函数如何处理：

例题 14: 计算 $\arcsin t$ 的导函数。

解答：记 $x = \arcsin t$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$)，就可以得到 $t = \sin x$ ，

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d(\sin x)} = \frac{dx}{\cos x dx} = \frac{1}{\cos x}$$

利用 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 这个条件可以写出 $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - t^2}$ ，所以

$$\frac{d(\arcsin t)}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

上面给出的这些技巧足以应付绝大多数求导函数的问题了，我们以一道比较综合的问题来结束微分这部分内容。

例题 15: 在 $-1 < t < 1$ 范围内，计算 $\frac{t \arctan(e^t)}{\sqrt{1-t^2}}$ 的导函数。

解答：利用乘积的微分公式

$$d\left(\frac{t \arctan(e^t)}{\sqrt{1-t^2}}\right) = \frac{\arctan(e^t)}{\sqrt{1-t^2}} dt + t d\left(\frac{\arctan(e^t)}{\sqrt{1-t^2}}\right).$$

所以

$$\frac{d\left(\frac{t \arctan(e^t)}{\sqrt{1-t^2}}\right)}{dt} = \frac{\arctan(e^t)}{\sqrt{1-t^2}} + t \frac{d\left(\frac{\arctan(e^t)}{\sqrt{1-t^2}}\right)}{dt}.$$

再次利用乘积的微分公式，有

$$d\left(\frac{\arctan(e^t)}{\sqrt{1-t^2}}\right) = \arctan(e^t)d\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}d[\arctan(e^t)].$$

在 $d(t^p) = pt^{p-1}dt$ 中把 t 替换为 $(1-t^2)$ 并令 $p = -1/2$ ，就可以求出

$$d\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right) = -\frac{1}{2}(1-t^2)^{-3/2}d(1-t^2) = t(1-t^2)^{-3/2}$$

最后，令 $\arctan(e^t) = x$ ，则有 $e^t = \tan x$ ，再利用前面例题中得到过的结论 $d(\tan x) = \sec^2 x dx$ ，就可以写出

$$\frac{d[\arctan(e^t)]}{dt} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d(\tan x)} \frac{d(e^t)}{dt} = \frac{dx}{\sec^2 x dx} \frac{e^t dt}{dt} = \frac{e^t}{1 + \tan^2 x} = \frac{e^t}{1 + e^{2t}}.$$

把所有的结果放到一起并化简，就有

$$\frac{d\left(\frac{t \arctan(e^t)}{\sqrt{1-t^2}}\right)}{dt} = (1-t^2)^{-3/2} \arctan(e^t) + \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \frac{e^t}{1+e^{2t}}.$$

下面我还是给出若干个习题供你练习。

第一关 计算 $t^4 + 2t + 3$ 的导函数。

第二关 计算 $\ln(e^t + 1)$ 的导函数。

第三关 计算 $\frac{\sin t}{t}$ 的导函数。

第四关 对 $a \neq 0$ ，计算 $\frac{1}{a} \arctan \frac{t}{a}$ 的导函数。

第五关 计算 $\ln(t + \sqrt{1+t^2})$ 的导函数。

6 积分

前面学习的微分操作，就是把 $f(t)$ 的一阶变化量 df 写成 $g(t)dt$ 的形式，也就是计算 f 的导函数 g 的问题。

积分是反过来的操作：把 $g(t)dt$ 写成某个 $f(t)$ 的一阶变化量。例如 $d(\cos t) = -\sin t dt$ 反向操作就可以得到 $\sin t dt = d(-\cos t)$ ；又如 $d(t^p) = pt^{p-1}dt$ 反向操作可以得到 $t^\alpha dt = d\left(\frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1}\right)$ （注意这里只适用于 $\alpha \neq -1$ 的情况）；以及 $(1-t^2)dt = d\left(t - \frac{1}{3}t^3\right)$ 等等很一目了然的结果。

在讨论如何对付不那么一目了然的情形之前，我们先来看几个简单的例子，加深对积分的物理意义的理解。

例题 16: 小明在时间 $t \in [0, \pi]$ 内的速度为 $v(t) = \sin t$ ，计算小明在这段时间内的位移。

解答: 在这段时间内的每一小段时间的位移都可以写成 $v(t)dt = \sin t dt = d(-\cos t)$ ，也就是 $-\cos t$ 的变化量。所以总位移等于 $-\cos t$ 的总变化量。具体写出来就是

$$\sum_{t=0}^{t=\pi} \sin t dt = \sum_{t=0}^{t=\pi} d(-\cos t) = [-\cos(\pi)] - [-\cos(0)] = 1 - (-1) = 2.$$

这里的 $\sum_{t=0}^{t=\pi}$ 表示对 $t \in [0, \pi]$ 内的所有小时间段求和。不过为了体现这里的求和是连续的而不是离散的，数学家们把求和符号 \sum 改造得更加丝滑，像这样：

$$\sum \rightarrow \int$$

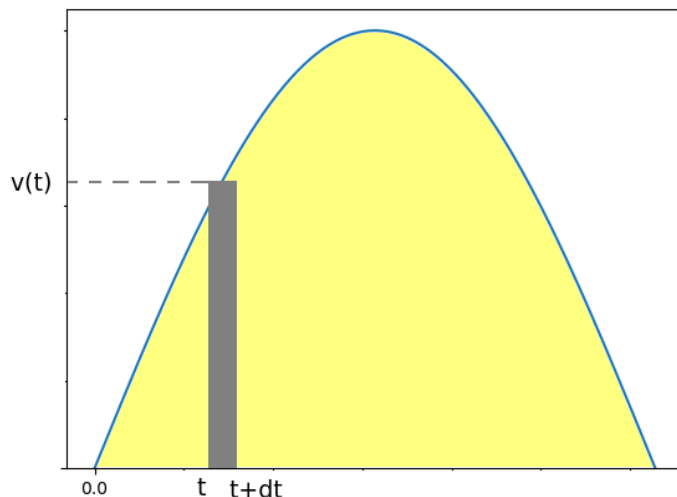
这个丝滑的求和符号有个新的名字：**积分符号**。

上面的过程用积分符号写出来就是

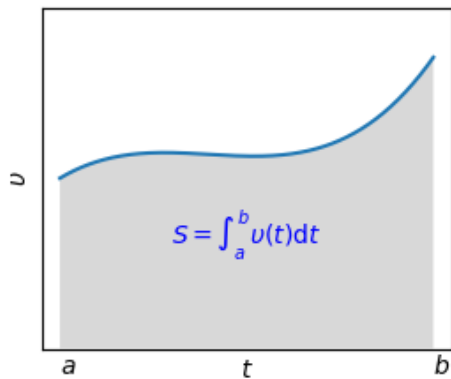
$$\int_0^{\pi} \sin t \, dt = \int_0^{\pi} d(-\cos t) = -\cos t \Big|_0^{\pi} = 1 - (-1) = 2.$$

这里的记号 $(-\cos t)|_0^{\pi}$ 也是个不错的新发明：它表示函数 $-\cos t$ 在“积分上限” π 和“积分下限” 0 的值的差。

上述计算结果还可以和几何图形的面积联系起来。



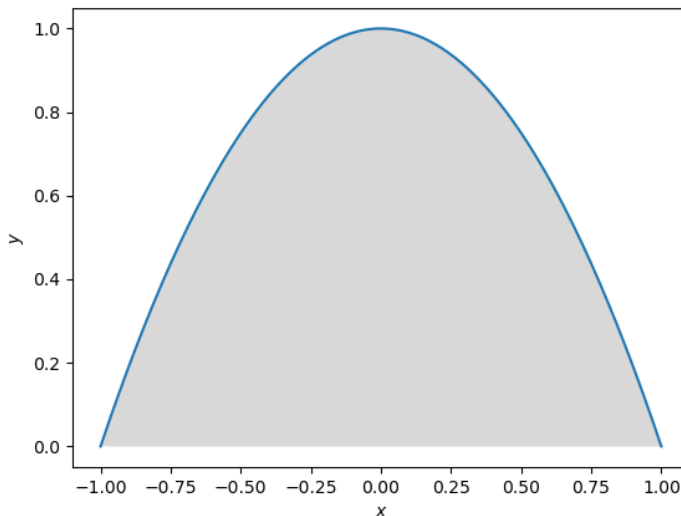
如图，画出 $v = \sin t$ 的函数图像，在 t 到 $t + dt$ 之间的灰色柱状地带的面积等于 $v(t)dt = dx$ 。想象用这样的柱状带填满整个函数图像下方（黄色区域）。整个函数图像下方的总面积就等于所有 dx 之和，即上面算出来的总位移 2 。



更一般地，如图所示， $\int_a^b v(t)dt$ 给出的是 $v(t)$ 的函数图像和 $t = a$, $t = b$, 以及 t 轴包围的闭合区域的面积。(不过，当函数图像在 t 轴下方时，面积得添加个负号。)

例题 17: 在 $x-y$ 平面上，抛物线 $y = 1 - x^2$ 和 x 轴包围的闭合区域的面积等于多少?

解答:



如图，该区域的面积等于

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2)dx = \int_{-1}^1 d\left(x - \frac{1}{3}x^3\right) = \left(x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

通过上面几个例子，我们发现积分的关键步骤就是对给定的函数 $g(t)$ ，寻找 $f(t)$ 使得它的导函数是 $g(t)$ ，我们管这种操作叫“求原函数”。教科书中一般用下面的“不定积分”（“不定”的意思是不告诉你在哪段时间内积分）符号来表示对 $g(t)$ 求原函数的运算

$$\int g(t)dt$$

由于常数的导函数是零，不定积分的结果不是唯一的一个函数，而是可以添加任意一个常数 C （叫做积分常数）。

从 (15-19) 可以直接得出一些很平凡的结果

$$\int t^p dt = \frac{1}{p+1} t^{p+1} + C \quad (p \neq -1) \tag{20}$$

$$\int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C \quad (t \neq 0) \tag{21}$$

$$\int e^t dt = e^t + C \tag{22}$$

$$\int \sin t dt = -\cos t + C \tag{23}$$

$$\int \cos t dt = \sin t + C \tag{24}$$

注意 (21) 中 $t \neq 0$ 的意思是：不允许在包含 $t = 0$ 的区间上对 $\frac{1}{t}$ 积分。

我们来看一些基于 (20-24) 的一些实战。

例题 18: 计算不定积分 $\int t^4 dt$ 。

解答：在 (20) 中取 $p = 4$ 即有 $\int t^4 dt = \frac{1}{5}t^5 + C$ 。

例题 19: 计算不定积分 $\int \frac{t^2+1}{t} dt$ 。

解答：

$$\int \frac{t^2+1}{t} dt = \int \left(t + \frac{1}{t} \right) dt = \int t dt + \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}t^2 + \ln|t| + C \quad (t \neq 0).$$

除了这些常规操作之外，还有两种高级技巧：变量替换和分部积分。先来看变量替换技术。

例题 20: 计算不定积分 $\int e^{2t} dt$ 。

解答：做变量替换 $y = 2t$,

$$\int e^{2t} dt = \int e^y d\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{1}{2} \int e^y dy = \frac{1}{2} \int d(e^y) = \frac{1}{2}e^y + C = \frac{1}{2}e^{2t} + C.$$

当你熟练之后，可以直接这样写：

$$\int e^{2t} dt = \frac{1}{2} \int e^{2t} d(2t) = \frac{1}{2} \int d(e^{2t}) = \frac{1}{2}e^{2t} + C.$$

例题 21: 计算不定积分 $\int \frac{2t}{1+t^2} dt$ 。

解答：令 $y = 1 + t^2$ ，并利用 (21)，就有

$$\int \frac{2t dt}{1+t^2} = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C = \ln(1+t^2) + C.$$

当你熟练之后，可以这样写

$$\int \frac{2t dt}{1+t^2} = \int \frac{d(1+t^2)}{1+t^2} = \ln(1+t^2) + C.$$

例题 22: 对固定的 $a > 0$ ，计算不定积分 $\int \frac{1}{a^2+t^2} dt$ 。

解答：令 $t = a \tan y$ ，注意到

$$d(\tan y) = d\left(\frac{\sin y}{\cos y}\right) = \frac{d(\sin y)}{\cos y} + \sin y d\frac{1}{\cos y} = dy - \sin y \frac{d(\cos y)}{\cos^2 y} = \sec^2 y dy.$$

就有

$$\int \frac{dt}{a^2 + t^2} = \int \frac{d(a \tan y)}{a^2 + a^2 \tan^2 y} = \int \frac{a \sec^2 y dy}{a^2 \sec^2 y} = \int \frac{dy}{a} = \frac{y}{a} + C = \frac{1}{a} \arctan \frac{t}{a} + C.$$

分部积分技术则是反向使用乘积的微分公式，把 fdg 转化为 $d(fg) - gdf$ 。请看下面两个例子。

例题 23: 计算不定积分 $\int \ln t dt$ 。

解答：利用乘积的微分公式，有

$$\ln t dt = d(t \ln t) - t d(\ln t).$$

于是

$$\int \ln t dt = \int d(t \ln t) - \int t d(\ln t) = t \ln t - \int t \frac{dt}{t} = t \ln t - \int dt = t \ln t - t + C.$$

例题 24: 计算不定积分 $\int te^t dt$ 。

解答：首先把待积分的量转化为 fdg 的形式。

$$\int te^t dt = \int t d(e^t)$$

然后利用乘积的微分公式把 fdg 写成 $d(fg) - gdf$ ：

$$t d(e^t) = d(te^t) - e^t dt.$$

于是

$$\int te^t dt = \int t d(e^t) = \int d(te^t) - \int e^t dt = te^t - \int d(e^t) = te^t - e^t + C.$$

老规矩，一些适当的练习必不可少

第一关 计算不定积分 $\int \sqrt{1+t} dt$ 。

第二关 计算不定积分 $\int \frac{\ln t}{t} dt$ 。

第三关 对 $a > 0$ ，计算不定积分 $\int \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}}$ 。（提示：做变量替换 $t = a \sin y$ ）

第四关 计算不定积分 $\int t \sin t dt$ 。

第五关 对 $a > 0$ ，计算不定积分 $\int \sqrt{a^2 + t^2} dt$ 。（提示：令 $t = \frac{a}{2}(e^y - e^{-y})$ ）

7 结语

网上流传这样一句话：高数十分简单，剩下 90 分很难。

上面介绍的就是“十分简单”的部分，剩下 90 分靠你自己了！