1 三种方程

1 泊松方程（静电势，稳定温度分布）：

$$\nabla^2 u = 0.$$

2 热传导方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\nabla^2 u = 0.$$

（参数a的物理意义：单位时间扩散区域的尺度平方。）

3 波动方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\nabla^2 u = 0.$$

(参数 a为波速）

2 零边界条件

零边界条件的定义：在边界的每一个点，函数值和梯度的法向分量的给定线性组合为零。（不同边界点的线性组合系数允许不同）

3 按照谐函数展开

上述三种方程的解可以展开为

$$u = \sum_i c_i Q_i(\mathbf{x}; k_i) f(t; k_i).$$

时间依赖因子$f(t;k)$由下表给出：

方程	时间依赖函数
泊松方程$\nabla^2 u = 0$	1
热传导方程 $\frac{\partial u}{\partial t} - a\nabla^2 u = 0$	$e^{-ak^2 t}$
波动方程$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\nabla^2 u = 0$	$\ldots\cos(akt) + \ldots\sin(akt)$

对热传导方程和波动方程，依赖于空间坐标的谐函数 $Q(\mathbf{x};k)$ $(k>0)$由下表给出

坐标系	应用区域	谐函数
一维直角	线段	$\ldots\cos(kx) + \ldots\sin(kx)$
高维直角	方形区域	多个一维直角坐标的谐函数的乘积(每个维度上取k的一个分量构造谐函数，而不是用总的k)
极坐标	圆盘	$J_m(kr)\left[\ldots\cos(m\theta) + \ldots\sin(m\theta)\right]$, $(m = 0, 1, 2\ldots)$
	圆环	$\left[\ldots J_m(kr) + \ldots N_m(kr)\right]\left[\ldots\cos(m\theta) + \ldots\sin(m\theta)\right]$, $(m = 0, 1, 2\ldots)$
柱坐标	实心圆柱	$J_m(k_{2D}r)\left[\ldots\cos(m\theta) + \ldots\sin(m\theta)\right]\left[\ldots\cos(k_z z) + \ldots\sin(k_z z)\right]$, $k_z^2 + k_{2D}^2 = k^2$
	空心圆柱	$\left[\ldots J_m(k_{2D}r) + \ldots N_m(k_{2D}r)\right]\left[\ldots\cos(m\theta) + \ldots\sin(m\theta)\right]\left[\ldots\cos(k_z z) + \ldots\sin(k_z z)\right]$, $k_z^2 + k_{2D}^2 = k^2$
球坐标	实心球	$j_l(kr)Y_{lm}(\theta,\phi)$, $(l = 0, 1, 2\ldots; -l \le m \le l)$
	空心球	$\left[\ldots j_l(kr) + \ldots n_l(kr)\right]Y_{lm}(\theta,\phi)$, $(l = 0, 1, 2\ldots; -l \le m \le l)$

对泊松方程（稳定问题），没有初始条件，于是通常或者不是零边界条件，或者方程右边是有源的（严格来讲就不是泊松方程了）——否则啥都是零你还解什么……

这时需要用到 $k=0$的谐函数，好吧其实严格来讲因为不是零边界条件，这些函数也未必能叫谐函数了。下面给出了一些简单问题中常用的解：

坐标系	应用区域	谐函数
极坐标	圆内部	$r^m\left[\ldots\cos(m\theta) + \ldots\sin(m\theta)\right]$ $(m = 0, 1, 2\ldots)$
	圆外部	$\ln r$ $(m=0$情形)或者 $r^{-m}\left[\ldots\cos(m\theta) + \ldots\sin(m\theta)\right]$ $(m = 1, 2\ldots)$
球坐标	球内部	$r^l Y_{lm}(\theta,\phi)$, $(l = 0, 1, 2\ldots; -l \le m \le l)$
	球外部	$r^{-l-1}Y_{lm}(\theta,\phi)$, $(l = 0, 1, 2\ldots; -l \le m \le l)$

在更复杂的稳定解问题中，常常还要用到虚宗量的三角函数（也就是双曲正弦，双曲余弦）、虚宗量的贝塞尔函数等，就不一一讨论了。