数理方法 课堂小测III 诸神黄昏版

(一) 选择题，每题10分，共30分。

(1) $\sin\theta\,\frac{\partial \mathrm{Y}_{7,3}(\theta,\phi)}{\partial\theta}$ 可以表示成哪些球谐函数的线性组合？ (C)

(A) $\mathrm{Y}_{6,3}(\theta,\phi)$ 和 $\mathrm{Y}_{7,3}(\theta,\phi)$ **(B)** $\mathrm{Y}_{7,3}(\theta,\phi)$ 和 $\mathrm{Y}_{8,3}(\theta,\phi)$ **(C)** $\mathrm{Y}_{6,3}(\theta,\phi)$ 和 $\mathrm{Y}_{8,3}(\theta,\phi)$
(D) $\mathrm{Y}_{6,3}(\theta,\phi)$, $\mathrm{Y}_{7,3}(\theta,\phi)$ 和 $\mathrm{Y}_{8,3}(\theta,\phi)$

提示：直接利用$\mathrm{Y}_{7,3}$的微分表达式，把$\sin\theta\,\frac{\partial \mathrm{Y}_{7,3}(\theta,\phi)}{\partial\theta}$写成$\mathrm{Y}_{1,0}\mathrm{Y}_{7,3}$和$\mathrm{Y}_{1,-1}\mathrm{Y}_{7,4}$的线性组合。然后利用我们学过的熟知技巧。

(2) 一个单位体积的比热为 $10^5\,\mathrm{J\,K^{-1}\,m^{-3}}$， 导热系数为$100\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$，半径为$R = 0.1\,\mathrm{m}$的均匀材质孤立不良导体球。一开始上半球温度为$350\,\mathrm{K}$，下半球温度为$250\,\mathrm{K}$。估算至少经过多长时间后，球各处的温度都在$299.9\,\mathrm{K}$和$300.1\,\mathrm{K}$之间 (请选择数量级最接近的答案)。 (C)

(A) $0.003\,\mathrm{s}$ **(B)** $0.1\,\mathrm{s}$ **(C)** $3\,\mathrm{s}$ **(D)** $90\,\mathrm{s}$

提示：估算最低的非零k然后利用e^{-ak^2t}的衰减规律。注意到符合边界条件的$k = \frac{\mu}{R}$，μ为$j_\ell'(x)$的零点。$\mathrm{j}_0(x) = \frac{\sin x}{x}$的导函数的第一个零点在$\frac{3\pi}{2}$附近，其他$j_\ell'$的第一个零点则更大了（利用$\mathrm{J}_m$的一个峰在$m$附近的知识）。所以可以估算出最小的$k \approx \frac{3\pi}{2R}$。

(3) 把e^k的小数部分记为r_k，例如$e^1 = 2.718\ldots$, $r_1 = 0.718\ldots$; $e^2 = 7.389\ldots$, $r_2 = 0.389\ldots$。把第k个质数记为m_k，例如$m_1 = 2, m_2 = 3, m_3 = 5, \ldots$。记$\ell = m_{1001}$，试估计

$$\sum_{k=1}^{1000}\left[\mathrm{Y}_{\ell,m_k}\left(\arccos(2r_k-1),0\right)\right]^2$$

和下列哪一个数量级最接近？ (C)

(A) 1 **(B)** 10 **(C)** 100 **(D)** 1000

提示： 记$\theta = \arccos(2r_k - 1)$，则$\cos\theta$在$[-1,1]$内均匀分布。由于$\phi$不影响$|\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta,\phi)|$，我们不妨取$\phi$在$[0,2\pi)$内均匀分布。这样$(\theta,\phi)$在球面上均匀分布。对单位球面上随机选取的$\theta,\phi$，$|\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta,\phi)|^2$的平均值为$\frac{1}{4\pi}$ （这是根据归一化得到的），所以1000个这样的数的和大致为 $\frac{1000}{4\pi} \sim 100$。

(二) 填空题（每题10分，共20分）

(1) 计算不定积分： $\int \frac{dx}{x\left[(\mathrm{J}_3(x))^2+(\mathrm{N}_3(x))^2\right]} = \underline{\frac{\pi}{2}\arctan\frac{\mathrm{N}_3(x)}{\mathrm{J}_3(x)}}$ 。

提示：先利用J_ν和N_ν满足的微分方程联合推导出$\mathrm{J}_\nu\mathrm{N}_\nu' - \mathrm{N}_\nu\mathrm{J}_\nu' = \frac{C}{x}$ （朗斯基行列式），然后利用$x \to 0^+$的极限求出$C = \frac{2}{\pi}$。把积分式中的$\frac{1}{x}$替换为$\frac{\pi}{2}\left(\mathrm{J}_\nu\mathrm{N}_\nu' - \mathrm{N}_\nu\mathrm{J}_\nu'\right)$，分子分母同除以$\mathrm{J}_\nu^2$即可求得原函数。

(2) 请估算球面谐函数： $\mathrm{Y}_{10000,2}\left(\frac{\pi}{50},0\right) \approx \underline{-0.9}$ 。

提示：在θ比较小时，把北极附近的一小块区域当成平坦的，由于$\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta,\phi)$带了$e^{im\phi}$的因子，对应了平坦近似（极坐标）的$\mathrm{J}_m(kr)e^{im\phi}$，其中$k\sqrt{\ell(\ell+1)} \approx \ell$, $r = \theta$。因此:

$$\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta,\phi) = C\mathrm{J}_m(\ell\theta)e^{im\phi},$$

其中的常数C只依赖于ℓ, m。

下面我们来求C。当$\theta \to 0^+$时，取θ的最低阶近似（为$O(\theta^m)$量级):

$$\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta,\phi) \approx e^{im\phi}\frac{1}{2^\ell \ell!}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\theta^m \lim_{t\to 0}\left(\frac{d}{dt}\right)^{\ell+m}\left[t^\ell(2-t)^\ell\right],$$

其中$t = 1-\cos\theta$，我们在上式中利用了球谐函数的微分表示以及$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta} = \frac{d}{dt}$，并注意到$\theta\to 0$时，$t = 1-\cos\theta \to 0$。最后那项极限是可以求出来的：

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{d}{dt}\right)^{\ell+m} t^\ell(2-t)^\ell = (-1)^m 2^{\ell-m}\frac{\ell!(\ell+m)!}{m!(\ell-m)!}$$

于是，当$\theta\to 0^+$时，

$$\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta,\phi) \approx e^{im\phi}(-1)^m\frac{1}{2^m m!}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}}\theta^m.$$

然后对比$\mathrm{J}_m(\ell\theta)$的最低阶近似：

$$\mathrm{J}_m(\ell\theta) \approx \frac{\ell^m\theta^m}{m!2^m}$$

就得到系数

$$C = \left(-\frac{1}{\ell}\right)^m\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}}.$$

(三) 内半径为R，外半径为$2R$的均匀不良导体空心球，导热系数为 λ，单位质量比热为 c，质量密度为 ρ，一开始温度为 T_0。在 $t=0$ 时刻把空心球投入温度为 $2T_0$ 的热库，计算此后空心球内各点的温度变化。（25分）

令$u = T - 2T_0$ 则有

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - a\nabla^2 u &= 0,\\ u|_{r=2R} &= 0,\\ \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} &= 0,\\ u|_{t=0} = -T_0,\end{aligned}$$

其中$a = \frac{\lambda}{\rho c}$。

由对称性知道可以把u展开为$\mathrm{j}_0(kr)e^{-ak^2t}$和$\mathrm{n}_0(kr)e^{-ak^2t}$的线性组合。而

$$\mathrm{j}_0(kr) = \frac{\sin(kr)}{kr};\mathrm{n}_0(kr) = -\frac{\cos(kr)}{kr},$$

的线性组合要满足$r=2R$处为零，$r=R$处对r的偏导数为零，只有下述可能性：

$$\frac{\sin\frac{\mu_i(r-2R)}{R}}{r},$$

μ_i是所有满足

$$\tan\mu + \mu = 0$$

的正实数根 ($\mu_1 = 2.02876$, $\mu_2 = 4.91318$, $\mu_3 = 7.97867$, $\mu_4 = 11.0855$, $\mu_5 = 14.20744\ldots$)。

按套路令

$$u = \sum_i c_i\frac{\sin\frac{\mu_i(r-2R)}{R}}{r}e^{-\frac{a\mu_i^2t}{R^2}},$$

剩下的问题就是求解c_i，根据一般正交定理

$$\int_R^{2R} \frac{\sin\frac{\mu_i(r-2R)}{R}}{r} \frac{\sin\frac{\mu_j(r-2R)}{R}}{r} r^2 dr = \delta_{ij}\mathcal{N}_i,$$

其中$\mathcal{N}_i$是需要花点精力计算的归一化因子：

$$\mathcal{N}_i = \int_R^{2R} \sin^2\frac{\mu_i(r-2R)}{R} dr = \frac{R}{2}\left(1-\frac{\sin 2\mu_i}{2\mu_i}\right) = \frac{R}{2}\left(1-\frac{2\tan\mu_i}{2\mu_i(1+\tan^2\mu_i)}\right) = \frac{R(2+\mu_i^2)}{2(1+\mu_i^2)}.$$

于是根据初始条件

$$\sum_i c_i \frac{\sin\frac{\mu_i(r-2R)}{R}}{r} = -T_0$$

得到系数

$$\begin{aligned}
c_i &= -\frac{T_0}{\mathcal{N}_i}\int_R^{2R}\frac{\sin\frac{\mu_i(r-2R)}{R}}{r} r^2 dr \\
&= \frac{T_0}{\mathcal{N}_i}\frac{R}{\mu_i}\left[r\cos\frac{\mu_i(r-2R)}{R}\Big|_R^{2R} - \int_R^{2R}\cos\frac{\mu_i(r-2R)}{R}dr\right] \\
&= \frac{T_0}{\mathcal{N}_i}\frac{R}{\mu_i}\left[(2-\cos\mu_i)R - \frac{R}{\mu_i}\sin\frac{\mu_i(r-2R)}{R}\Big|_R^{2R}\right] \\
&= \frac{T_0}{\mathcal{N}_i}\frac{R}{\mu_i}\left[(2-\cos\mu_i)R - \frac{R}{\mu_i}\sin\mu_i\right] \\
&= \frac{2T_0R^2}{\mathcal{N}_i\mu_i} \\
&= \frac{4T_0R(1+\mu_i^2)}{\mu_i(2+\mu_i^2)}
\end{aligned}$$

最后结果就是

$$T = 2T_0\left[1 + 2\sum_i \frac{(1+\mu_i^2)}{\mu_i(2+\mu_i^2)}\frac{R}{r}\sin\frac{\mu_i(r-2R)}{R} e^{-\frac{a\mu_i^2 t}{R^2}}\right].$$

(四) 设在某个空间区域 Ω 内的每一点都有个对应的"势能"，即可以写出势能函数 $V(\mathbf{x})$，$\mathbf{x}\in\Omega$。考虑满足微分方程

$$\left[V(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}\nabla^2\right] u = Eu,$$

且在 Ω 的边界上满足一般零边界条件(u 和 ∇u 的法向分量的某个固定线性组合为零，线性组合的系数允许在边界各个点不同)的解。其中 E 为待定的"本征值"。在量子力学里，u是波函数，算符$-\frac{1}{2}\nabla^2$具有动能的含义，本征值E则代表了总能量。

(1) 证明任何两个不同的 E 对应的两个解在 Ω 内正交（乘积的积分为零）。(10分)

(2) 设 Ω 为整个三维空间；$V(\mathbf{x}) = -\frac{1}{|\mathbf{x}|}$；是否存在$E<0$ (对应量子力学里的束缚态) 使方程有处处有限且在无穷远处趋向于零的解？如果存在，E要取怎样的值？ (15分)

(1) 正交性的证明和书上谐函数正交定理的证明几乎完全相同，略去。

(2) 设$E = -\frac{k^2}{2}$ $(k>0)$，$u = f(r)\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta,\phi)$，则

$$f'' + \frac{2}{r}f' + \left(\frac{2}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - k^2\right) f = 0.$$

在 $r\to\infty$处，微分方程渐近行为是

$$f''-k^2f=0$$

由收敛性知道$f\sim e^{-kr}$，因此我们假设$f=g(r)e^{-kr}$，则

$$f'=e^{-kr}(g'-kg)$$

$$f''=e^{-kr}(g''-2kg'+k^2g)$$

代入f的方程得到

$$g''+(\frac{2}{r}-2k)g'+\left[-k^2+\frac{2-2k}{r}-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right]g=0. \tag{1}$$

在$r=0$附近，上式的渐近行为是

$$g''+\frac{2}{r}g'-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}g=0.$$

在球心有限的渐近解是$g\sim r^\ell$，因此可以设

$$g=r^\ell\sum_{n=0}^{\infty}c_nr^n.$$

代入g的微分方程(**??**)，得到

$$c_{n+1}=\frac{2k(n+\ell+1)-2}{(n+\ell+2)(n+\ell+1)-\ell(\ell+1)}c_n.$$

容易看出要使这个级数在$r=1$处收敛，则级数必须在某个n截断：

$$k=\frac{1}{n+\ell+1}$$

即

$$E=-\frac{1}{2N^2}$$

其中

$$N=n+\ell+1$$

为正整数。

注： 上面实际上是量子力学里面氢原子能级的计算过程，以后在学习量子力学时会再次遇到。