数理方法 课堂小测III 诸神黄昏版

特殊函数定义列表：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{J}_\nu(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu};\\
\mathrm{N}_\nu(x) &= \lim_{\mu\to\nu}\frac{\mathrm{J}_\mu(x)\cos\mu\pi-\mathrm{J}_{-\mu}(x)}{\sin(\mu\pi)};\\
\mathrm{j}_\ell(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{J}_{\ell+1/2}(x),\quad \ell\in Z;\\
\mathrm{n}_\ell(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{N}_{\ell+1/2}(x),\quad \ell\in Z;\\
\mathrm{P}_\ell(x) &= \sum_{k=0}^{\ell}\frac{(\ell+k)!}{(k!)^2(\ell-k)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^k,\quad \ell\in Z,\ell\geq 0;\\
\mathrm{Y}_{\ell,m}(\theta,\phi) &= \frac{1}{2^\ell\ell!}\sqrt{\frac{(2\ell+1)}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\left[\sin^m\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)^{\ell+m}\sin^{2\ell}\theta\right]e^{im\phi},\quad \ell,m\in Z,\ell\geq|m|.
\end{aligned}
$$

(一) 选择题，每题10分，共30分。

(1) $\sin\theta\,\frac{\partial \mathrm{Y}_{7,3}(\theta,\phi)}{\partial\theta}$ 可以表示成哪些球谐函数的线性组合？ ( )
(A) $\mathrm{Y}_{6,3}(\theta,\phi)$ 和 $\mathrm{Y}_{7,3}(\theta,\phi)$ **(B)** $\mathrm{Y}_{7,3}(\theta,\phi)$ 和 $\mathrm{Y}_{8,3}(\theta,\phi)$ **(C)** $\mathrm{Y}_{6,3}(\theta,\phi)$ 和 $\mathrm{Y}_{8,3}(\theta,\phi)$
(D) $\mathrm{Y}_{6,3}(\theta,\phi)$, $\mathrm{Y}_{7,3}(\theta,\phi)$ 和 $\mathrm{Y}_{8,3}(\theta,\phi)$

(2) 一个单位体积的比热为 $10^6\,\mathrm{J\,K^{-1}\,m^{-3}}$， 导热系数为$100\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$，半径为$R=0.1\,\mathrm{m}$的均匀材质孤立不良导体球。一开始上半球温度为$350\,\mathrm{K}$，下半球温度为$250\,\mathrm{K}$。估算至少经过多长时间后，球各处的温度都在$299.9\,\mathrm{K}$和$300.1\,\mathrm{K}$之间 (请选择数量级最接近的答案)。 ( )
(A) 0.003 s **(B)** 0.1 s **(C)** 3 s **(D)** 90 s

(3) 把e^k的小数部分记为r_k，例如$e^1=2.718\ldots, r_1=0.718\ldots; e^2=7.389\ldots, r_2=0.389\ldots$。把第$k$个质数记为$m_k$，例如$m_1=2, m_2=3, m_3=5,\ldots$。记$\ell=m_{1001}$，试估计

$$\sum_{k=1}^{1000}\left[\mathrm{Y}_{\ell,m_k}\left(\arccos(2r_k-1),0\right)\right]^2$$

和下列哪一个数量级最接近？ ( )
(A) 1 **(B)** 10 **(C)** 100 **(D)** 1000

(二) 填空题（每题10分，共20分）

(1) 计算不定积分： $\int\frac{dx}{x\left[(\mathrm{J}_3(x))^2+(\mathrm{N}_3(x))^2\right]}=$ ______________________________ 。

(2) 请估算球面谐函数： $\mathrm{Y}_{10000,2}\left(\frac{\pi}{50},0\right)\approx$ ________________ 。

(三) 内半径为R，外半径为$2R$的均匀不良导体空心球，导热系数为 λ，单位质量比热为 c，质量密度为 ρ，一开始温度为 T_0。在 $t=0$ 时刻把空心球投入温度为 $2T_0$ 的热库，计算此后空心球内各点的温度变化。（25分)

(四) 设在某个空间区域 Ω 内的每一点都有个对应的“势能”，即可以写出势能函数 $V(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$。考虑满足微分方程

$$\left[V(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}\nabla^2\right] u = Eu,$$

且在 Ω 的边界上满足一般零边界条件(u 和 ∇u 的法向分量的某个固定线性组合为零，线性组合的系数允许在边界各个点不同)的解。其中 E 为待定的“本征值”。在量子力学里, u是波函数，算符$-\frac{1}{2}\nabla^2$具有动能的含义，本征值E则代表了总能量。

(1) 证明任何两个不同的 E 对应的两个解在 Ω 内正交（乘积的积分为零）。(10分)

(2) 设 Ω 为整个三维空间；$V(\mathbf{x}) = -\frac{1}{|\mathbf{x}|}$；是否存在$E < 0$ (对应量子力学里的束缚态) 使方程有处处有限且在无穷远处趋向于零的解？如果存在，E要取怎样的值？ (15分)