数理方法 课堂小测III 华山论剑版

(一) 选择题，每题6分，共30分。

(1) $\mathrm{P}_7(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有多少个实数零点？ (B)
(**A**) 0 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 7
提示：用归纳法证明$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^\ell$在$(-1,1)$有$n$个实数零点。然后利用$\mathrm{P}_7(x)$是奇函数。

(2) 下列哪个数量级和第二类贝塞尔函数$\left|\mathrm{N}_0\left(\frac{1}{10000!}\right)\right|$最接近？ (B)
(**A**) 10^3 (**B**) 10^5 (**C**) 10^7 (**D**) 10^9
提示：用$\mathrm{N}_0(x)\approx\frac{2}{\pi}\ln x$ 和Stirling公式。

(3) $f(t)$ $(t\geq 0)$ 满足微分方程$f''-\frac{1}{t}f'+(4t^2-\frac{8}{t^2})f=0$以及初始条件$f(0)=0$, 则$f(t)$和下列哪个函数成正比？ (C)
(**A**) $x\mathrm{J}_3(x)$ (**B**) $x^2\mathrm{J}_2(x)$ (**C**) $x\mathrm{J}_{3/2}(x^2)$ (**D**) $\mathrm{J}_{2\sqrt{2}}(x^2)$
见习题中关于一般的类贝塞尔方程的通解。

(4) $\sin\theta\, e^{i\phi}\mathrm{Y}^*_{5,3}(\theta,\phi)$ 可写成哪两个球面谐函数的线性组合？ (A)
(**A**) $\mathrm{Y}_{4,-2}(\theta,\phi)$ 和 $\mathrm{Y}_{6,-2}(\theta,\phi)$ (**B**) $\mathrm{Y}_{4,4}(\theta,\phi)$ 和 $\mathrm{Y}_{6,4}(\theta,\phi)$ (**C**) $\mathrm{Y}_{4,3}(\theta,\phi)$ 和 $\mathrm{Y}_{6,3}(\theta,\phi)$ (**D**) $\mathrm{Y}_{5,-2}(\theta,\phi)$ 和 $\mathrm{Y}_{5,-4}(\theta,\phi)$
设$\sin\theta\, e^{i\phi}\mathrm{Y}^*_{5,3}(\theta,\phi)=\sum_{\ell m}c_{\ell m}\mathrm{Y}_{\ell m}$并利用$\mathrm{Y}_{\ell m}$的正交归一化条件写出$c_{\ell m}$的积分表达式，然后注意到$\sin\theta e^{i\phi}\propto \mathrm{Y}_{1,1}$，使用三个球谐函数积分非零的条件，以及$\mathrm{Y}^*_{\ell,m}=(-1)^m\mathrm{Y}_{\ell,-m}$

(5) 设$\theta=\frac{\pi}{2}$, 则$|\mathrm{Y}_{5,1}(\theta,\phi)|^2+|\mathrm{Y}_{5,2}(\theta,\phi)|^2+|\mathrm{Y}_{5,3}(\theta,\phi)|^2+|\mathrm{Y}_{5,4}(\theta,\phi)|^2$ 等于 (D)
(**A**) $\frac{\pi}{2}$ (**B**) $\frac{1}{4\pi}$ (**C**) $\frac{15}{64\pi}$ (**D**) $\frac{715}{1024\pi}$
利用加法公式(令$\mathbf{n}_1=\mathbf{n}_2=(\theta,\phi)$) 以及$\mathrm{Y}_{5,0}(\frac{\pi}{2},\phi)\propto \mathrm{P}_5(0)=0$，而$\mathrm{Y}_{5,5}$可以转化为$\mathrm{Y}_{5,-5}$并利用球谐函数的微分表示直接计算。

(二) 填空题（每题10分，共30分）

(1) 积分$\int_0^1 x\mathrm{P}_5(x)\mathrm{P}_6(x)\,dx=$ <u>6/143</u>。
提示：利用 $(2\ell+1)x\mathrm{P}_\ell(x)=(\ell+1)\mathrm{P}_{\ell+1}(x)+\ell\mathrm{P}_{\ell-1}(x)$ 以及P_ℓ的奇偶对称性。

(2) 积分$\int_0^1 x^4\mathrm{J}_1(x)\,dx=$ <u>$7\mathrm{J}_0(1)-12\mathrm{J}_1(1)$ (或 $\mathrm{J}_2(1)-2\mathrm{J}_3(1)$等其他任何等价形式)</u>。
提示：反复分部积分并利用贝塞尔函数的递推公式$(x^\nu\mathrm{J}_\nu)'=x^\nu\mathrm{J}_{\nu-1}$。

(3) 设 $\mathrm{J}_1(x)$ 的所有正实数零点为 $\mu_1,\mu_2,\ldots$， 则 $\sum_{i=1}^\infty\frac{1}{\mu_i^2}=$ <u>1/8</u>。
提示：$\mathrm{J}_1(x)=\frac{x}{2}\left(1-\frac{x^2}{8}+\ldots\right)=\frac{x}{2}\left(1-\frac{x^2}{\mu_1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\mu_2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\mu_3^2}\right)\ldots$

(三) 半径为R的均匀不良导体球，导热系数为 λ，单位质量比热为 c，质量密度为 ρ。以球心为原点建立球坐标系(r,θ,ϕ)。球表面的温度控制为$T=T_0+T_1\cos\theta$并保持不变。计算球内部的稳定温度分布。（20分）

观察边界条件易得
$$T=T_0+T_1\frac{r}{R}\cos\theta.$$

注意无论是球坐标系的$r^\ell\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta,\phi)$和$r^{-\ell-1}\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta,\phi)$，还是极坐标系的$r^{\pm m}e^{\pm im\theta}$ (这个不大容易出现)，都是用来求特解，不是用来解零边界问题的。（它们可以看成k很小，满足巨大的的球面（圆周）上的零边界条件的谐函数在球心（圆心）附近的函数形式，零边界条件只能在很遥远的（虚构）边界上取得）。

(四) 我们在课上学习了两端固定的，长度为L的弦的横向小振动的解法。现在考虑空气阻力对弦的横向小振动的影响：假设单位长度的弦所受的空气阻力和弦的横向位移速度成正比，弦的振动方程就修正为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2}{\tau}\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

其中的阻尼时间$\tau \gg \frac{L}{a}$为常量。 设初始条件为

$$\begin{aligned} u\big|_{t=0} &= A \sin \frac{\pi x}{L}, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= 0 \end{aligned}$$

求解$u(x,t)$。 (20分)

分离变量设

$$u = A \sin \frac{\pi x}{L} f(t),$$

代入原方程

$$f'' + \frac{2}{\tau} f' + \frac{\pi^2 a^2}{L^2} f = 0.$$

假设$f = Ce^{i\omega t}$，得到

$$\omega^2 - \frac{2i}{\tau}\omega - \frac{\pi^2 a^2}{L^2} = 0.$$

解出

$$\omega = \frac{i}{\tau} \pm \sqrt{\frac{\pi^2 a^2}{L^2} - \frac{1}{\tau^2}}.$$

再利用初始条件即可以确定:

$$u = \frac{A}{\sqrt{1 - \frac{L^2}{\pi^2 a^2 \tau^2}}} \sin \frac{\pi x}{L} \cos\left(t\sqrt{\frac{\pi^2 a^2}{L^2} - \frac{1}{\tau^2}} - \arcsin \frac{L}{\pi a \tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

另外，如果采用近似方法（这里不再详细讲述）可以得到近似解

$$u = A \sin \frac{\pi x}{L} \cos \frac{\pi a t}{L} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

也足够精确（主要修正是指数衰减因子）。