数理方法 课堂小测III 华山论剑版

特殊函数定义列表:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{J}_\nu(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu};\\
\mathrm{N}_\nu(x) &= \lim_{\mu\to\nu} \frac{\mathrm{J}_\mu(x)\cos\mu\pi - \mathrm{J}_{-\mu}(x)}{\sin(\mu\pi)};\\
\mathrm{j}_\ell(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{J}_{\ell+1/2}(x), \quad \ell \in Z;\\
\mathrm{n}_\ell(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{N}_{\ell+1/2}(x), \quad \ell \in Z;\\
\mathrm{P}_\ell(x) &= \sum_{k=0}^{\ell} \frac{(\ell+k)!}{(k!)^2(\ell-k)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^k, \quad \ell \in Z, \ell \geq 0;\\
\mathrm{Y}_{\ell,m}(\theta,\phi) &= \frac{1}{2^\ell \ell!}\sqrt{\frac{(2\ell+1)}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\left[\sin^m\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)^{\ell+m}\sin^{2\ell}\theta\right]e^{im\phi}, \quad \ell, m \in Z, \ell \geq |m|.
\end{aligned}
$$

(一) 选择题，每题6分，共30分。

(1) $\mathrm{P}_7(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有多少个实数零点？ ( )
(A) 0 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 7

(2) 下列哪个数量级和第二类贝塞尔函数$\left|\mathrm{N}_0\left(\frac{1}{10000!}\right)\right|$最接近？ ( )
(A) 10^3 **(B)** 10^5 **(C)** 10^7 **(D)** 10^9

(3) $f(t)$ $(t \geq 0)$ 满足微分方程$f'' - \frac{1}{t}f' + (4t^2 - \frac{8}{t^2})f = 0$以及初始条件$f(0) = 0$, 则$f(t)$和下列哪个函数成正比？ ( )
(A) $x\mathrm{J}_3(x)$ **(B)** $x^2\mathrm{J}_2(x)$ **(C)** $x\mathrm{J}_{3/2}(x^2)$ **(D)** $\mathrm{J}_{2\sqrt{2}}(x^2)$

(4) $\sin\theta\, e^{i\phi}\mathrm{Y}^*_{5,3}(\theta,\phi)$ 可写成哪两个球面谐函数的线性组合？( )
(A) $\mathrm{Y}_{4,-2}(\theta,\phi)$ 和 $\mathrm{Y}_{6,-2}(\theta,\phi)$ **(B)** $\mathrm{Y}_{4,4}(\theta,\phi)$ 和 $\mathrm{Y}_{6,4}(\theta,\phi)$ **(C)** $\mathrm{Y}_{4,3}(\theta,\phi)$ 和 $\mathrm{Y}_{6,3}(\theta,\phi)$ **(D)** $\mathrm{Y}_{5,-2}(\theta,\phi)$ 和 $\mathrm{Y}_{5,-4}(\theta,\phi)$

(5) 设$\theta = \frac{\pi}{2}$, 则$|\mathrm{Y}_{5,1}(\theta,\phi)|^2 + |\mathrm{Y}_{5,2}(\theta,\phi)|^2 + |\mathrm{Y}_{5,3}(\theta,\phi)|^2 + |\mathrm{Y}_{5,4}(\theta,\phi)|^2$ 等于 ( )
(A) $\frac{\pi}{2}$ **(B)** $\frac{1}{4\pi}$ **(C)** $\frac{15}{64\pi}$ **(D)** $\frac{715}{1024\pi}$

(二) 填空题（每题10分，共30分）

(1) 积分$\int_0^1 x\mathrm{P}_5(x)\mathrm{P}_6(x)\,dx =$ ______________。

(2) 积分$\int_0^1 x^4\mathrm{J}_1(x)\,dx =$ ______________。

(3) 设 $\mathrm{J}_1(x)$ 的所有正实数零点为 $\mu_1, \mu_2, \ldots$, 则 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_i^2} =$ ______________。

(三) 半径为R的均匀不良导体球，导热系数为 λ，单位质量比热为 c，质量密度为 ρ。以球心为原点建立球坐标系(r,θ,ϕ)。球表面的温度控制为$T = T_0 + T_1\cos\theta$并保持不变。计算球内部的稳定温度分布。（20分)

(四) 我们在课上学习了两端固定的，长度为L的弦的横向小振动的解法。现在考虑空气阻力对弦的横向小振动的影响：假设单位长度的弦所受的空气阻力和弦的横向位移速度成正比，弦的振动方程就修正为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2}{\tau}\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

其中的阻尼时间$\tau \gg \frac{L}{a}$为常量。 设初始条件为

$$\begin{aligned} u\big|_{t=0} &= A\sin\frac{\pi x}{L}, \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= 0 \end{aligned}$$

求解$u(x,t)$。 (20分)