数理方法 课堂小测III 初入江湖版

（一）选择题，每题3分，共30分。

(1) 下列哪个物理问题对应的方程**不是**波动方程（ C ）
(A) 均匀弦的横向小振动 **(B)** 均匀弹性杆的纵向小振动 **(C)** 孤立均匀球的温度变化
(D) 引力波的传播

(2) 下列哪个函数具有分离变量的形式（ B ）
(A) e^{-xt} **(B)** $\frac{x^2}{1+e^t}$ **(C)** $\sqrt{t^2+x^2}$ **(D)** $e^{\frac{x}{t}}$
所谓分离变量形式就是能写成$f(x)g(t)$形式的函数。

(3) 下列关于格林函数的说法**错误**的是（ D ）
(A) 是线性系统对脉冲输入的响应 **(B)** 依赖于脉冲输入的位置 **(C)** 依赖于边界条件
(D) 只适用于无限大空间的问题
格林函数是线性系统（不需要无限大）对单位脉冲输入的响应。如果改变边界条件（例如把边界上为零改为边界上导数为零），显然响应会发生变化。

(4) 球坐标系(r,θ,ϕ)的拉普拉斯算符为：（ A ）
(A) $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$ **(B)** $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$
(C) $\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$ **(D)** $\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$

(5) 贝塞尔函数的**导函数** $\mathrm{J}'_{100}(x)$ 的最小正实数零点大约为（ C ）
(A) 1 **(B)** 10 **(C)** 100 **(D)** 10^4
知识点：J_m的第一个峰值在m附近。

(6) 下列哪个贝塞尔函数在 $x=0$ 处发散？（ D ）
(A) $\mathrm{J}_1(x)$ **(B)** $\mathrm{J}_{-1}(x)$ **(C)** $\mathrm{J}_{1/2}(x)$ **(D)** $\mathrm{J}_{-1/2}(x)$
知识点：对整数m，$\mathrm{J}_{-m}(x)=(-1)^m\mathrm{J}_m(x)$；非整数阶$\mathrm{J}_\nu$在$x\to 0^+$时的行为$\sim x^\nu$。注意$\mathrm{J}_{-m}$的展开虽然粗看形式上有负次幂项，但那些项的系数为零，其实并不存在。

(7) 积分$\int_0^a \mathrm{J}_1(x)dx=$（ B ）
(A) $\mathrm{J}_0(a)$ **(B)** $1-\mathrm{J}_0(a)$ **(C)** $a\mathrm{J}_0(a)$ **(D)** $a\mathrm{J}_1(a)$
贝塞尔函数的递推公式 $\mathrm{J}_{m-1}-\mathrm{J}_{m+1}=2\mathrm{J}'_m$，令$m=0$并利用$\mathrm{J}_{-1}=-\mathrm{J}_1$。或者利用$(x^{-\nu}\mathrm{J}_\nu)'=-x^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}$并令$\nu=0$。

(8) 两类贝塞尔函数的平方和 $[\mathrm{J}_5(100)]^2+[\mathrm{N}_5(100)]^2$ 大约为（ A ）
(A) 0.006 **(B)** 0.01 **(C)** 0.06 **(D)** 1
利用 J_m 和 N_m 在无穷远处的渐近展开以及第二类贝塞尔函数的引入思想（即x很大时，$\mathrm{J}_m\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x-\ldots)$, $\mathrm{N}_m\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(x-\ldots)$）。

(9) 设μ,ν是球贝塞尔函数$\mathrm{j}_\ell(x)$ $(\ell\geq 0)$的两个不同的零点，则下列哪个等式一定正确？（ C ）
(A) $\int_0^1 \mathrm{j}_\ell(\mu x)\mathrm{j}_\ell(\nu x)dx=0$ **(B)** $\int_0^1 \mathrm{j}_\ell(\mu x)\mathrm{j}_\ell(\nu x)xdx=0$
(C) $\int_0^1 \mathrm{j}_\ell(\mu x)\mathrm{j}_\ell(\nu x)x^2dx=0$ **(D)** $\int_0^1(1-x^2)\mathrm{j}_\ell(\mu x)\mathrm{j}_\ell(\nu x)dx=0$
解法一：利用谐函数正交定理得出 $\mathrm{j}_\ell(\mu x)\mathrm{Y}_{\ell 0}$ 和 $\mathrm{j}_\ell(\nu x)\mathrm{Y}_{\ell 0}$ 在单位球内的正交性。
解法二：把j_ℓ转化为第一类贝塞尔函数并利用第一类贝塞尔函数的正交性（虽然严格来说我们在课上并未讨论分数阶的情形）。

(10) $\cos\theta\,\mathrm{Y}_{4,2}(\theta,\phi)$ 可写成哪两个球面谐函数的线性组合？（ A ）
(A) $\mathrm{Y}_{3,2}(\theta,\phi)$ 和 $\mathrm{Y}_{5,2}(\theta,\phi)$ **(B)** $\mathrm{Y}_{4,2}(\theta,\phi)$ 和 $\mathrm{Y}_{5,2}(\theta,\phi)$ **(C)** $\mathrm{Y}_{3,2}(\theta,\phi)$ 和 $\mathrm{Y}_{4,2}(\theta,\phi)$
(D) $\mathrm{Y}_{4,1}(\theta,\phi)$ 和 $\mathrm{Y}_{4,3}(\theta,\phi)$

假设$\cos\theta \mathrm{Y}_{4,2} = \sum_{\ell m} c_{\ell m}\mathrm{Y}_{\ell m}$，利用正交归一条件写出$c_{\ell m}$的积分表达式，并考虑何时$c_{\ell m}$非零。注意$\cos\theta$正比于$\mathrm{Y}_{10}$，用三个球谐函数乘积的积分非零条件，以及$\mathrm{Y}^*_{\ell m} = (-1)^m \mathrm{Y}_{\ell,-m}$的对称性。

(二) 填空题（每题5分，共30分）

(1) 设二维正交曲面坐标系(x, y)的正交线元长度依次为 dx 和 $e^{-x^2}dy$，写出该坐标系的拉普拉斯算符的显式表达: $\underline{e^{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-x^2}\frac{\partial}{\partial x}\right) + e^{2x^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}}$

正交曲面坐标系的知识。

(2) 积分$\int_0^1 x^4 \mathrm{P}_6(x)dx = \underline{0}$。

利用罗巨格公式容易看出偶数阶勒让德多项式都是偶函数，奇数阶勒让德函数都是奇函数。因此这个积分可以写成 $[-1,1]$上的积分的一半。而在$[-1,1]$内, P_6和低于6次的多项式都正交（因为低于6次的多项式总是能展开为$\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_5$的线性组合）。

罗巨格公式是对付勒让德多项式的首选工具。对积分问题，除了用正交性直接判断之外，还能用分部积分ℓ次的套路硬来。对求$\mathrm{P}_\ell(t)$ (t为常数，特别是为某个特殊点±1, 0)的值问题，可以把$(x^2-1)^\ell$展开为$x-t$的多项式然后逐项求导ℓ次。

(3) 函数 $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ 在椭圆 $2x^2 + y^2 = 1$ 上的取值处处为零，在该椭圆内部分别满足 $\nabla^2 f_1 = -k_1^2 f_1$ 以及 $\nabla^2 f_2 = -k_2^2 f_2$，其中$k_1 > k_2 > 0$。
则在该椭圆内的积分$\iint f_1(x, y)f_2(x, y)dxdy = \underline{0}$。

谐函数的正交定理。

(4) 设 $\mu > 0$，$\mathrm{J}_2(\mu) = 0$，则积分$\int_0^1 [\mathrm{J}_2(\mu x)]^2 x dx = \underline{\frac{[\mathrm{J}_3(\mu)]^2}{2}\ (\text{或}\frac{[\mathrm{J}_2'(\mu)]^2}{2})}$。

贝塞尔函数的第一条正交定理。

(5) 一维无边界的空间内满足方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ 和初始条件 $u|_{t=0} = e^{-x^2}$， $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$ 的解是: $u(x, t) = \underline{\frac{1}{2}\left[e^{-(x+at)^2} + e^{-(x-at)^2}\right]}$ 。

一维无边界波动方程的通解

(6) 一维无边界的空间内满足方程 $\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ 和初始条件 $u|_{t=0} = e^{-x^2}$ 的解是: $u(x, t) = \underline{\frac{1}{\sqrt{4at+1}}e^{-\frac{x^2}{4at+1}}}$ 。

解法一：用格林函数方法写出$u = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_0^2}\frac{1}{\sqrt{4\pi at}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4at}}dx_0$然后轻轻一化简...

解法二：直接把这个解看成在原点的脉冲输入经过一段时间扩散后的结果，把$x_0 = 0$的格林函数做一下时间平移并乘以适当常数。

(三) 两端固定的，长度为L的均匀弦的横向振动$u(x, t)$ $(0 \le x \le L)$满足初始条件:

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= A\sin\frac{\pi x}{L} \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= 0. \end{aligned}$$

求解$u(x, t)$。设弦的线密度λ，张力f均已知。（20分）

方程为波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

其中$a^2 = \frac{f}{\lambda}$。

解法1:

按边界条件确定谐函数形式为$\sin\frac{n\pi x}{L}$，配上波动方程的时间演化因子：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{L}\left(c_n\cos\frac{n\pi at}{L}+s_n\sin\frac{n\pi at}{L}\right).$$

由初始条件速度为零，确定所有$s_n=0$。

由初始位移条件：得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\frac{n\pi x}{L}=A\sin\frac{\pi x}{L}$$

观察该式子左右两边，显然$c_1=A$，其余c_n均为零。于是最后结果为

$$u=A\sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi at}{L}$$

解法2: 设通解 $u=f(x-at)+g(x+at)$ 由初始条件得到

$$\begin{aligned}f(x)+g(x)&=A\sin\frac{\pi x}{L},\\ f'(x)-g'(x)&=0\end{aligned}$$

由此得到$f(x)=g(x)=\frac{A}{2}\sin\frac{\pi x}{L}$

但是注意这个等式是在$x\in[0,L]$内求出来的。在这个范围之外需要拓展定义。

在这个问题里，边界条件的要求为

$$f(at)+g(-at)=0;$$

$$f(L+at)+g(L-at)=0.$$

这两个条件交替使用可以把$[0,L]$的函数拓展到任意范围。在本题中（由于运气好），拓展的结果恰好是$\frac{A}{2}\sin\pi xL$的自然延拓。所以最后结果为

$$u(x,t)=\frac{A}{2}\left(\sin\frac{\pi(x+at)}{L}+\sin\frac{\pi(x-at)}{L}\right)=A\sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi at}{L}.$$

后记： 一般来说，有限区域内的问题用第二种方法比较容易出错。要理解本题第二种解法里的“运气好”的意思，你可以把初始位移替换成$u|_{t=0}=A\left(1-\cos\frac{2\pi x}{L}\right)$然后分别尝试使用第一种和第二种解法，看看结果是否相同。

(四) 有半径为 R，导热系数为 λ，单位质量比热为 c，质量密度为 ρ 的孤立均匀薄圆盘。以圆盘中心为原点建立极坐标 (r,θ)。初始时刻各点的温度为 $T|_{t=0}=T_0\left(2+\frac{r^2}{R^2}\cos\theta\right)$。计算之后圆盘上各点的温度变化。(20分)

令$u=T-2T_0$ (这一步并非必须，但能免去之后讨论$k=0$的谐函数的各种麻烦，是很好的处理习惯)。

u满足热传导方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a\nabla^2u=0.$$

和绝热边界条件：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R}=0.$$

初始条件为:
$$u|_{t=0} = T_0 \frac{r^2}{R^2} \cos\theta.$$
一般的谐函数为$\mathrm{J}_m(kr)\cos m\theta$和$\mathrm{J}_m(kr)\sin m\theta$。但既然初始条件正比于$\cos\theta$，就可以只考虑$\mathrm{J}_1(kr)\cos\theta$。
根据边界绝热条件，并添上热传导方程的时间依赖因子:
$$u = \sum_i c_i \mathrm{J}_1\left(\frac{\mu_i}{R} r\right) \cos\theta\, e^{-a\frac{\mu_i^2}{R^2}t},$$
其中μ_i是J_1'的第i个正实数零点，c_i为待定系数。
初始条件给出:
$$\sum_i c_i \mathrm{J}_1\left(\frac{\mu_i}{R} r\right) = T_0 \frac{r^2}{R^2}.$$
记$x = \frac{r}{R}$，则上式成为:
$$\sum_i c_i \mathrm{J}_1(\mu_i x) = T_0 x^2.$$
两边同乘以$x\mathrm{J}_1(\mu_j x)$并在$[0,1]$内积分，得到
$$\frac{\left(1-\frac{1}{\mu_j^2}\right)[\mathrm{J}_1(\mu_j)]^2}{2} c_j = T_0 \int_0^1 x^3 \mathrm{J}_1(\mu_j x) dx.$$
即
$$c_j = \frac{2T_0 \int_0^1 x^3 \mathrm{J}_1(\mu_j x) dx}{\left(1-\frac{1}{\mu_j^2}\right)[\mathrm{J}_1(\mu_j)]^2}.$$
即最后结果为:
$$T = 2T_0 \left[1 + \sum_i \frac{\int_0^1 x^3 \mathrm{J}_1(\mu_i x) dx}{\left(1-\frac{1}{\mu_i^2}\right)[\mathrm{J}_1(\mu_i)]^2} \mathrm{J}_1\left(\frac{\mu_i}{R} r\right) \cos\theta\, e^{-a\frac{\mu_i^2}{R^2}t}\right],$$

后记: 其中的积分可以化简为(1,2)类超几何函数:
$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^3 \mathrm{J}_1(\mu_i x) dx &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \mu_i^{2k+1}}{k!(k+1)!2^{2k+1}} x^{2k+4} dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \mu_i^{2k+1}}{k!(k+1)!(2k+5)2^{2k+1}} \\
&= \frac{\mu_i}{10}\, {}_1F_2\left(\frac{5}{2}; 2, \frac{7}{2}; -\frac{\mu_i^2}{4}\right)
\end{aligned}$$
一般地，积分 $\int x^n \mathrm{J}_m(x) dx$ 当 $n+m$ 为奇数时总能通过分部积分把结果写成贝塞尔函数；当$n+m$为偶数则结果无法写成贝塞尔函数，只能写成超几何函数。因为养生MMP课没有学习超几何函数，当 $n+m$ 为偶数时，你完全有理由把积分扔在那里不管。