数理方法 课堂小测III 初入江湖版

特殊函数定义：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{J}_\nu(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu};\\
\mathrm{N}_\nu(x) &= \lim_{\mu\to\nu}\frac{\mathrm{J}_\mu(x)\cos\mu\pi-\mathrm{J}_{-\mu}(x)}{\sin(\mu\pi)};\\
\mathrm{j}_\ell(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{J}_{\ell+1/2}(x),\quad \ell\in Z;\\
\mathrm{n}_\ell(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{N}_{\ell+1/2}(x),\quad \ell\in Z;\\
\mathrm{P}_\ell(x) &= \sum_{k=0}^{\ell}\frac{(\ell+k)!}{(k!)^2(\ell-k)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^k,\quad \ell\in Z,\ell\geq 0;\\
\mathrm{Y}_{\ell,m}(\theta,\phi) &= \frac{1}{2^\ell\ell!}\sqrt{\frac{(2\ell+1)}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\left[\sin^m\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)^{\ell+m}\sin^{2\ell}\theta\right]e^{im\phi},\quad \ell,m\in Z,\ell\geq|m|.
\end{aligned}
$$

(一) 选择题，每题3分，共30分。

(1) 下列哪个物理问题对应的方程**不是**波动方程（ ）
(A) 均匀弦的横向小振动 **(B)** 均匀弹性杆的纵向小振动 **(C)** 孤立均匀球的温度变化
(D) 引力波的传播

(2) 下列哪个函数具有分离变量的形式（ ）
(A) e^{-xt} **(B)** $\frac{x^2}{1+e^t}$ **(C)** $\sqrt{t^2+x^2}$ **(D)** $e^{\frac{x}{t}}$

(3) 下列关于格林函数的说法**错误**的是（ ）
(A) 是线性系统对脉冲输入的响应 **(B)** 依赖于脉冲输入的位置 **(C)** 依赖于边界条件
(D) 只适用于无限大空间的问题

(4) 球坐标系(r,θ,ϕ)的拉普拉斯算符为：（ ）
(A) $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$ **(B)** $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$
(C) $\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$ **(D)** $\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$

(5) 贝塞尔函数的**导函数** $J'_{100}(x)$ 的最小正实数零点大约为（ ）
(A) 1 **(B)** 10 **(C)** 100 **(D)** 10^4

(6) 下列哪个贝塞尔函数在 $x=0$ 处发散？（ ）
(A) $\mathrm{J}_1(x)$ **(B)** $\mathrm{J}_{-1}(x)$ **(C)** $\mathrm{J}_{1/2}(x)$ **(D)** $\mathrm{J}_{-1/2}(x)$

(7) 积分$\int_0^a \mathrm{J}_1(x)dx=$（ ）
(A) $\mathrm{J}_0(a)$ **(B)** $1-\mathrm{J}_0(a)$ **(C)** $a\mathrm{J}_0(a)$ **(D)** $a\mathrm{J}_1(a)$

(8) 两类贝塞尔函数的平方和 $[\mathrm{J}_5(100)]^2+[\mathrm{N}_5(100)]^2$ 大约为（ ）
(A) 0.006 **(B)** 0.01 **(C)** 0.06 **(D)** 1

(9) 设μ,ν是球贝塞尔函数$\mathrm{j}_\ell(x)$ $(\ell\geq 0)$的两个不同的零点，则下列哪个等式一定正确？（ ）
(A) $\int_0^1\mathrm{j}_\ell(\mu x)\mathrm{j}_\ell(\nu x)dx=0$ **(B)** $\int_0^1\mathrm{j}_\ell(\mu x)\mathrm{j}_\ell(\nu x)xdx=0$
(C) $\int_0^1\mathrm{j}_\ell(\mu x)\mathrm{j}_\ell(\nu x)x^2dx=0$ **(D)** $\int_0^1(1-x^2)\mathrm{j}_\ell(\mu x)\mathrm{j}_\ell(\nu x)dx=0$

(10) $\cos\theta\,\mathrm{Y}_{4,2}(\theta,\phi)$ 可写成哪两个球面谐函数的线性组合？（ ）
(A) $\mathrm{Y}_{3,2}(\theta,\phi)$ 和 $\mathrm{Y}_{5,2}(\theta,\phi)$ **(B)** $\mathrm{Y}_{4,2}(\theta,\phi)$ 和 $\mathrm{Y}_{5,2}(\theta,\phi)$ **(C)** $\mathrm{Y}_{3,2}(\theta,\phi)$ 和 $\mathrm{Y}_{4,2}(\theta,\phi)$
(D) $\mathrm{Y}_{4,1}(\theta,\phi)$ 和 $\mathrm{Y}_{4,3}(\theta,\phi)$

(二) 填空题（每题5分，共30分）

(1) 设二维正交曲面坐标系(x,y)的正交线元长度依次为 dx 和 $e^{-x^2}dy$，写出该坐标系的拉普拉斯算符的显式表达: $\nabla^2 f =$______________________________。

(2) 积分$\int_0^1 x^4 P_6(x)dx =$ ____________。

(3) 函数 $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ 在椭圆 $2x^2+y^2=1$ 上的取值处处为零，在该椭圆内部分别满足 $\nabla^2 f_1 = -k_1^2 f_1$ 以及 $\nabla^2 f_2 = -k_2^2 f_2$，其中$k_1 > k_2 > 0$。
则在该椭圆内的积分$\iint f_1(x,y)f_2(x,y)dxdy =$ ____________。

(4) 设 $\mu > 0$，$\mathrm{J}_2(\mu) = 0$，则积分$\int_0^1 [\mathrm{J}_2(\mu x)]^2\, xdx =$ ____________。

(5) 一维无边界的空间内满足方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ 和初始条件 $u|_{t=0} = e^{-x^2}$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$ 的解是: $u(x,t) =$ ______________________________。

(6) 一维无边界的空间内满足方程 $\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ 和初始条件 $u|_{t=0} = e^{-x^2}$ 的解是: $u(x,t) =$
______________________________。

(三) 两端固定的，长度为L的均匀弦的横向振动$u(x,t)$ $(0 \le x \le L)$满足初始条件:

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= A\sin\frac{\pi x}{L} \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= 0. \end{aligned}$$

求解$u(x,t)$。设弦的线密度λ，张力f均已知。（20分)

(四) 有半径为 R，导热系数为 λ，单位质量比热为 c，质量密度为 ρ 的孤立均匀薄圆盘。以圆盘中心为原点建立极坐标 (r,θ)。初始时刻各点的温度为 $T|_{t=0} = T_0\left(2 + \frac{r^2}{R^2}\cos\theta\right)$。计算之后圆盘上各点的温度变化。(20分)