数理方法 课堂小测II

姓名 .... 学号 .... 分数 ....

（一）选择题，每题3分，共45分。

(1) i^i 的所有可能取值为（ D ）

(A) -1 **(B)** ± 1 **(C)** $e^{-\frac{\pi}{2}}$ **(D)** $e^{-\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}$，$n \in Z$

(2) 在幅角连续变化的意义下，$\sqrt{z}$ 的原函数为（忽略不写积分常数）（ A ）

(A) $\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}$ **(B)** $\frac{1}{2\sqrt{z}}$ **(C)** $\frac{4}{3}z^{\frac{3}{4}}$ **(D)** $\frac{1}{2}\ln z$

(3) 方程 $z^5+z^4+z^3+2=0$ 的所有复数根的倒数之和为（ A ）

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** -1 **(D)** -2

直接利用零次项和一次项的根和系数关系；或者令 $u=\frac{1}{z}$，分析u的方程的所有根的和.

(4) 下列哪一个复数在单位圆 $|z|=1$ 的内部（ A ）

(A) $\frac{5}{6}+i\cos 1$ **(B)** $\frac{1}{2}+i\cos\frac{1}{2}$ **(C)** $\cos 2+i\sin 2$ **(D)** $\frac{1}{2}-i$

利用 $\frac{1}{2}>\sin\frac{1}{2}$排除B；或利用 $\frac{5}{6}=1-\frac{1}{6}<1-\frac{1}{6}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\ldots=\sin 1$ 确定A正确

(5) z_1,z_2,z_3,z_4 是四个互不相同的复数，且 $\frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_2-z_3)(z_4-z_1)}$ 为实数。那么 z_1,z_2,z_3,z_4 在复平面上对应的四个点（ D ）

(A) 构成平行四边形 **(B)** 共圆 **(C)** 构成平行四边形或共线 **(D)** 共圆或共线

画图，利用商的幅角的几何意义以及圆的几何性质。

(6) $\frac{1}{(z+1)(z+2)}$ 在环形区域 $1<|z|<2$ 内Laurent展开的 $\frac{1}{z^2}$ 的系数为（ C ）

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** -1 **(D)** -3

(7) $\frac{\sin^2 z}{(z-\pi)^5}$ 在 $z=\pi$ 处的留数等于（ D ）

(A) 0 **(B)** $\frac{2}{3}$ **(C)** $-\frac{2}{3}$ **(D)** $-\frac{1}{3}$

作变量替换 $t=z-\pi$并对分子进行展开；或者把$z=\pi$当成5阶极点用去极点的留数公式(虽然它实质上3阶极点，但课上讲过这样操作没有bug)。

(8) 下列哪个多值函数在区域 $1<|z|<2$ 内可以取单值分枝成为解析函数（ D ）

(A) $\ln\frac{z}{z-2}$ **(B)** $\sqrt{z(z-2)}$ **(C)** $\ln\frac{z-1}{z-2}$ **(D)** $\sqrt{z(z-1)(z-2)}$

(9) 考虑以原点为中心的一段小圆弧上的积分。当圆弧半径趋向于零时，下列哪个函数的积分一定趋向于零？（ C ）

(A) $\frac{e^z}{z}$ **(B)** $\frac{1}{z^2}$ **(C)** $\frac{1}{\sqrt{z}}$的任意单值分枝 **(D)** $\frac{\ln z}{z}$的任意单值分枝

$\frac{1}{\sqrt{z}}$的原函数为 $2\sqrt{z}$，其变化量趋向于零。一般地，只有z^α $(\alpha>-1)$或者一个有界函数的小圆弧积分才能直接不加计算地忽略。

(10) $z=0$是下列哪一个函数的本性奇点（即邻域Laurent展开有无穷多个负次幂项)?（ D ）

(A) $\frac{z}{1-\cos z}$ **(B)** $\frac{1}{z^{1000}}$ **(C)** $\frac{1}{e^z-1}$ **(D)** $e^{\frac{1}{z}}$

选项D可以直接展开验证。A，C均满足$\lim_{z\to 0} zf(z)$有限，都是一阶极点。

(11) 记 $f(x)=e^{-\frac{x^4}{2}}$ 的傅立叶变换为 $F(k)$，则积分$\int_{-\infty}^{\infty}|F(k)|^2dk$等于（ A ）

(A) $\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ **(B)** $\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$ **(C)** $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ **(D)** $\frac{1}{2}$

利用傅立叶变换保持内积不变的性质$\int_{-\infty}^{\infty}|F(k)|^2dk=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx$.

(12) 下列哪个数最大？（ A ）

(A) $\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)$ **(B)** $\Gamma\left(\frac{6}{5}\right)$ **(C)** $\Gamma\left(\frac{11}{5}\right)$ **(D)** $\Gamma\left(\frac{16}{5}\right)$

利用递推公式算出选项之间的比值。

(13) 随机抛6000次骰子，恰好 1，2，3，4，5，6 每个面向上都是1000次的概率和下列哪个数量级最接近？ (C)

(**A**) 10^{-3} (**B**) 10^{-6} (**C**) 10^{-9} (**D**) 10^{-12}

对$P = \frac{\frac{6000!}{(1000!)^6}}{6^{6000}}$用Stirling公式.

(14) 三维直角坐标系中，曲面$x^4 + y^4 + z^4 = 1$包围的体积为 (D)

(**A**) $\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{6\sqrt{2\pi}}$ (**B**) $\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{6\sqrt{2\pi}}$ (**C**) $\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^3}{6\sqrt{2\pi}}$ (**D**) $\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^4}{6\sqrt{2\pi}}$

利用 n 维限和积分公式以及互余宗量关系 $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}$.

(15) 已知全平面上解析的函数满足 $f(0) = 1$， $|f(z)| > 2|z| - 1$。那么，下列哪个区域内一定有$f(z)$的零点？ (A)

(**A**) $|z| < 1$ (**B**) $|z| > 1$ (**C**) $|2z - 1| < 1$ (**D**) $|2z - 1| > 1$

假设在单位圆内无零点，取解析函数 $g(z) = \frac{1}{f(z)}$，对$g(z)$运用最大模原理得到矛盾。

(二) 填空题，每题5分，共40分。

(1) 复变函数 $f(z) = ze^z$ 的原函数为 $\underline{(z-1)e^z + c}$.

(2) 近似到小数点后两位 $\cos\frac{i}{10} \approx \underline{1.01}$.

(3) 逆时针方向沿着单位圆的围道积分$\oint_{|z|=1} \frac{1}{(10z^6-1)(z-2)}\,dz$等于 $\underline{-\frac{2\pi i}{639}}$.

(4) 规定在 $z = 1$ 处 z 的幅角为零，且幅角连续变化。逆时针方向沿着上半个单位圆（从1到-1）的积分$\int_{|z|=1,\mathrm{Im}(z)\geq 0} \ln z\,dz = \underline{2 - i\pi}$.

(5) 函数 $f(t) = \delta(t^2 - 1)$ 的拉普拉斯变换为 $\underline{\frac{e^{-p}}{2}}$.

注意拉普拉斯变换积分范围是$(0, \infty)$.

(6) 记 $F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\left[k(x^2-1)\right]}{1+x^4}dx$，则 $\int_{-\infty}^{\infty} F(k)\,dk = \underline{\pi}$.

交换积分次序，并利用 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x^2-1)}dk = 2\pi\delta(x^2 - 1)$.

(7) $f(z) = \frac{z^8}{z^9+z^8+1}$的所有孤立奇点处的留数之和等于 $\underline{1}$.

在大圆上积分趋向于 $\oint \frac{dz}{z} = 2\pi i$，所以内部留数之和为1。

(8) 实积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx = \underline{-\frac{\pi}{2}\ln 2}$.

令$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx$，根据对称性$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)dx$。两式相加并利用倍角公式。

(三) 函数$f(t)$满足微分方程

$$f'' + 2f' + f = 2\cos t$$

和初始条件

$$f(0) = 1, f'(0) = -1.$$

(1) 设$f(t)$的拉普拉斯变换为$F(p)$，写出$F(p)$满足的代数方程，并解出$F(p)$； (10分)

(2) 把$F(p)$逆变换求出$f(t)$。 (5分)

(1)

$$(p^2F - p + 1) + 2(pF - 1) + F = \frac{2p}{p^2+1},$$

解出

$$F(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{2p}{(p^2+1)(p+1)^2}.$$

(2) 把$F(p)$拆写为

$$F(p)=\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p^2+1}-\frac{1}{(p+1)^2}.$$

逐项求逆变换，得到

$$f(t)=e^{-t}+\sin t-te^{-t}$$