数理方法 课堂小测II

姓名 .... 学号 .... 分数 ....

(一) 选择题，每题3分，共45分。

(1) i^i 的所有可能取值为（ ）

(A) -1 **(B)** ± 1 **(C)** $e^{-\frac{\pi}{2}}$ **(D)** $e^{-\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}$, $n \in Z$

(2) 在幅角连续变化的意义下，$\sqrt{z}$ 的原函数为 (忽略不写积分常数)（ ）

(A) $\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}$ **(B)** $\frac{1}{2\sqrt{z}}$ **(C)** $\frac{4}{3}z^{\frac{3}{4}}$ **(D)** $\frac{1}{2}\ln z$

(3) 方程 $z^5+z^4+z^3+2=0$ 的所有复数根的倒数之和为（ ）

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** -1 **(D)** -2

(4) 下列哪一个复数在单位圆 $|z|=1$ 的内部（ ）

(A) $\frac{5}{6}+i\cos 1$ **(B)** $\frac{1}{2}+i\cos\frac{1}{2}$ **(C)** $\cos 2+i\sin 2$ **(D)** $\frac{1}{2}-i$

(5) z_1, z_2, z_3, z_4 是四个互不相同的复数，且 $\frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_2-z_3)(z_4-z_1)}$ 为实数。那么 z_1, z_2, z_3, z_4 在复平面上对应的四个点（ ）

(A) 构成平行四边形 **(B)** 共圆 **(C)** 构成平行四边形或共线 **(D)** 共圆或共线

(6) $\frac{1}{(z+1)(z+2)}$ 在环形区域 $1<|z|<2$ 内Laurent展开的 $\frac{1}{z^2}$ 的系数为（ ）

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** -1 **(D)** -3

(7) $\frac{\sin^2 z}{(z-\pi)^5}$ 在 $z=\pi$ 处的留数等于（ ）

(A) 0 **(B)** $\frac{2}{3}$ **(C)** $-\frac{2}{3}$ **(D)** $-\frac{1}{3}$

(8) 下列哪个多值函数在区域 $1<|z|<2$ 内可以取单值分枝成为解析函数（ ）

(A) $\ln\frac{z}{z-2}$ **(B)** $\sqrt{z(z-2)}$ **(C)** $\ln\frac{z-1}{z-2}$ **(D)** $\sqrt{z(z-1)(z-2)}$

(9) 考虑以原点为中心的一段小圆弧上的积分。当圆弧半径趋向于零时，下列哪个函数的积分一定趋向于零？（ ）

(A) $\frac{e^z}{z}$ **(B)** $\frac{1}{z^2}$ **(C)** $\frac{1}{\sqrt{z}}$的任意单值分枝 **(D)** $\frac{\ln z}{z}$的任意单值分枝

(10) $z=0$是下列哪一个函数的本性奇点（即邻域Laurent展开有无穷多个负次幂项)?（ ）

(A) $\frac{z}{1-\cos z}$ **(B)** $\frac{1}{z^{1000}}$ **(C)** $\frac{1}{e^z-1}$ **(D)** $e^{\frac{1}{z}}$

(11) 记 $f(x)=e^{-\frac{x^4}{2}}$ 的傅立叶变换为 $F(k)$，则积分$\int_{-\infty}^{\infty}|F(k)|^2dk$等于（ ）

(A) $\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ **(B)** $\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$ **(C)** $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ **(D)** $\frac{1}{2}$

(12) 下列哪个数最大？（ ）

(A) $\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)$ **(B)** $\Gamma\left(\frac{6}{5}\right)$ **(C)** $\Gamma\left(\frac{11}{5}\right)$ **(D)** $\Gamma\left(\frac{16}{5}\right)$

(13) 随机抛6000次骰子，恰好 1，2，3，4，5，6 每个面向上都是1000次的概率和下列哪个数量级最接近？（ ）

(A) 10^{-3} **(B)** 10^{-6} **(C)** 10^{-9} **(D)** 10^{-12}

(14) 三维直角坐标系中，曲面$x^4+y^4+z^4=1$包围的体积为（ ）

(A) $\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{6\sqrt{2\pi}}$ **(B)** $\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{6\sqrt{2\pi}}$ **(C)** $\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^3}{6\sqrt{2\pi}}$ **(D)** $\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^4}{6\sqrt{2\pi}}$

(15) 已知全平面上解析的函数满足 $f(0)=1$，$|f(z)|>2|z|-1$。那么，下列哪个区域内一定有$f(z)$的零点？（ ）

(A) $|z|<1$ **(B)** $|z|>1$ **(C)** $|2z-1|<1$ **(D)** $|2z-1|>1$

(二) 填空题，每题5分，共40分。

(1) 复变函数 $f(z) = ze^z$ 的原函数为 ____________.

(2) 近似到小数点后两位 $\cos\frac{i}{10} \approx$ ____________.

(3) 逆时针方向沿着单位圆的围道积分$\oint_{|z|=1} \frac{1}{(10z^6-1)(z-2)}\,dz$等于 ____________.

(4) 规定在 $z = 1$ 处 z 的幅角为零，且幅角连续变化。逆时针方向沿着上半个单位圆（从1到-1）的积分$\int_{|z|=1,\mathrm{Im}(z)\geq 0} \ln z\,dz =$ ____________.

(5) 函数 $f(t) = \delta(t^2 - 1)$ 的拉普拉斯变换为____________.

(6) 记 $F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\left[k(x^2-1)\right]}{1+x^4}dx$，则 $\int_{-\infty}^{\infty} F(k)\,dk =$ ____________.

(7) $f(z) = \frac{z^8}{z^9+z^8+1}$的所有孤立奇点处的留数之和等于 ____________.

(8) 实积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx =$ ____________.

(三) 函数$f(t)$满足微分方程

$$f'' + 2f' + f = 2\cos t$$

和初始条件

$$f(0) = 1, f'(0) = -1.$$

(1) 设$f(t)$的拉普拉斯变换为$F(p)$，写出$F(p)$满足的代数方程，并解出$F(p)$；(10分)

(2) 把$F(p)$逆变换求出$f(t)$。(5分)