数理方法 课堂小测I

姓名 .... 学号 .... 分数 ....

(一) 选择题，每题3分，共45分。

(1) $e^{i\pi}$的值为 (A)

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) i

(2) 方程$e^z = 1 + i$ 的全部复数解为 $z =$ (C)

(A) $\ln 2 + \frac{\pi}{4} i$ (B) $\ln 2 + \left(2n + \frac{1}{4}\right)\pi i,\ n \in Z$ (C) $\frac{1}{2}\ln 2 + \left(2n + \frac{1}{4}\right)\pi i,\ n \in Z$
(D) $\frac{1}{2}\ln 2 + \left(n + \frac{1}{4}\right)\pi i,\ n \in Z$

(3) 复变函数 $z\cos z$ 在 $z = 0$ 处的导数为 (C)

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) $2\pi i$

(4) 复变函数$f(z) = (1 + z)e^z$的原函数为（忽略不写积分常数）： (B)

(A) e^z (B) ze^z (C) $\left(z + \frac{z^2}{2}\right)e^z$ (D) $\frac{e^z}{1+z}$

(5) 方程 $z^5 + z^4 + z^3 + 2 = 0$ 的所有复数解的平方和为 (A)

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

设$z^5 + z^4 + z^3 + 2 = (z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_5)$，展开比较$z^4$和$z^3$系数

(6) 已知f和g在全复平面上解析，且在某个复数集S上f和g恒等。当S为下述哪个集合时，我们**不能**断言f和g在全复平面上恒等？(D)

(A) 单位圆$|z| = 1$内部 (B) 区间$(0, 1)$ (C) $(0, 1)$上的所有有理数 (D) 整数集

(7) $\frac{1}{(1+e^z)\sin z}$ 在区域$|z| < 5$内有多少个孤立奇点？(C)

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

(8) $\frac{1}{z^2-3z+2}$ 在 $z = 1$ 处的留数等于 (D)

(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) -1

(9) 下列哪个多值函数在区域 $1 < |z| < 2$ 内可以规定适当的幅角范围成为解析函数？ (D)

(A) $\ln(z - 1)$ (B) $\ln(z + 1)$ (C) $\ln[(z - 1)(z + 1)]$ (D) $\ln\frac{z-1}{z+1}$

(10) $\sqrt{2\pi}\,\delta(x^2 - 1)$的傅立叶变换为 (B)

(A) 1 (B) $\cos k$ (C) $\sin k$ (D) $\frac{\sin k}{k}$

(11) $e^{-t}\sin 2t$的拉普拉斯变换为 (A)

(A) $\frac{2}{(p+1)^2+4}$ (B) $\frac{2}{(p-1)^2+4}$ (C) $\frac{2p}{p^2+4}$ (D) $\frac{2e^{-p}}{p^2+4}$

(12) $\left|\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^{2719}}\,dz\right|$ 和下列哪个数量级最接近？ (C)

(A) 10^{-900} (B) 10^{-2700} (C) 10^{-5100} (D) 10^{-15300}

用Stirling公式算出结果$\sim 10^{-8100}$，数量级接近指取对数后接近。

(13) 在单位球内的积分 $\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1}(|x| + |y| + |z|)dxdydz$ 等于 (A)

(A) $\frac{3}{2}\pi$ (B) $\sqrt{3}\pi$ (C) 2π (D) $2\sqrt{3}\pi$

根据对称性把积分写成 $24\int_{x,y,z\ge 0, x^2+y^2+z^2\le 1} xdxdydz$，然后用变量替换以及限和积分公式

(14) 用z^*表示z的共轭复数，按逆时针沿着曲线$|z-3|+|z+3| = 10$的围道积分$\oint_{|z-3|+|z+3|=10}(z^*dz - zdz^*)$ 等于 (C)

(A) $48\pi i$ (B) $60\pi i$ (C) $80\pi i$ (D) $96\pi i$

转化为极坐标下的实数积分

(15) 下列哪一个复变函数在复平面上处处不可导？ (D)

(**A**) $\frac{1}{z}$ (**B**) $|z|^2$ (**C**) $\sin|z|$ (**D**) $e^{|z|}$

$|z|^2$在$z=0$可导，$\sin|z|$在$z=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$可导。

(二) 填空题，每题5分，共35分。

(1) 复变函数 $e^{\frac{\cos z}{1+z^2+z^4}}\cos\left(z^3\right)$ 在 $z=0$ 处的导数为 __0__ 。

偶函数在$z=0$导数为零。

(2) 函数 $\frac{1}{z^5+z+1}$ 的所有孤立奇点处的留数之和为 __0__ 。

考虑半径趋向无穷大的圆上的围道积分。

(3) 积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\,\sin^4\theta\,d\theta$ 等于 __$\frac{8}{315}$__ 。

作变量替换$x=\sin^2\theta$，然后用B函数和Γ函数的关系。

(4) 实积分 $\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2x\,dx$ 等于 __$\frac{\sqrt{\pi}}{2e}$__ 。

取适当围道把路径 $(-\infty+i,\infty+i)$上的积分转化为$(-\infty,\infty)$上的积分

(5) 逆时针方向沿着上半个单位圆的积分$\int_{|z|=1,\mathrm{Im}(z)\geq 0} z^{\frac{1}{3}}\,dz$ 等于 __$\frac{3}{4}e^{i\theta}\left(e^{\frac{4\pi i}{3}}-1\right)$，$\theta=0,\pm\frac{2\pi}{3}$.__

或者按在正实轴上幅角为零的默认约定把答案写成$\frac{3}{4}\left(e^{\frac{4\pi i}{3}}-1\right)$也算对。

(6) 复变函数$f(z)=|1-z|^4+(1+|z|)^4$的最小可能值等于 __2__ 。

利用 $|1-z|^4\geq 1-4|z|-6|z|^2-\ldots$

(7) 定义函数 $f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos\left(x\cos t\right)dt.$，则积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)f(\frac{\pi}{2}-x)\,dx$ 等于 __1__ 。

把$f(x)$进行拉普拉斯变换，然后用卷积定理。

(三) 长度为L的不良导体棒一端和温度为T_0的热库接触，并在$t=0$时刻和热库处于热平衡。从$t=0$时刻开始，在不良导体棒的另一端注入恒定大小为j的热流。设不良导体棒的导热系数λ，单位质量的比热c和质量密度ρ均已知。写出不良导体棒上温度$T(x,t)$ $(0\leq x\leq L, t\geq 0)$满足的方程和边界条件。(10分) 并简要分析当t很大时的解的渐近行为。(10分)

方程为

$$\frac{\partial T}{\partial t}-a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=0\,.$$

其中$a=\frac{\lambda}{\rho c}$。

边界条件为

$$\begin{aligned} T|_{t=0} &= T_0 \\ T|_{x=0} &= T_0 \\ \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L} &= \frac{j}{\lambda} \end{aligned}$$

假设当t远大于典型的变化时间L^2/a时，系统处于稳恒状态（温度梯度不再变化）。因为一端温度是固定的，要得到稳恒状态的必要条件是热量不在不良导体棒上积累，也就是说进来的热流j必须保持不变地通过整个不良导体棒，最后从另一端进入热库。这说明稳恒状态下$\frac{\partial T}{\partial x}$处处等于$\frac{j}{\lambda}$。由此得出：

$$T(x,t)\to T_0+\frac{j}{\lambda}x$$