数理方法 课堂小测I

姓名 .... 学号 .... 分数 ....

(一) 选择题，每题3分，共45分。

(1) $e^{i\pi}$的值为（ ）
(**A**) -1 (**B**) 0 (**C**) 1 (**D**) i

(2) 方程$e^z = 1 + i$ 的全部复数解为 $z =$（ ）
(**A**) $\ln 2 + \frac{\pi}{4}i$ (**B**) $\ln 2 + \left(2n + \frac{1}{4}\right)\pi i,\, n \in Z$ (**C**) $\frac{1}{2}\ln 2 + \left(2n + \frac{1}{4}\right)\pi i,\, n \in Z$
(**D**) $\frac{1}{2}\ln 2 + \left(n + \frac{1}{4}\right)\pi i,\, n \in Z$

(3) 复变函数 $z\cos z$ 在 $z = 0$ 处的导数为（ ）
(**A**) -1 (**B**) 0 (**C**) 1 (**D**) $2\pi i$

(4) 复变函数$f(z) = (1 + z)e^z$的原函数为（忽略不写积分常数）：（ ）
(**A**) e^z (**B**) ze^z (**C**) $\left(z + \frac{z^2}{2}\right)e^z$ (**D**) $\frac{e^z}{1+z}$

(5) 方程 $z^5 + z^4 + z^3 + 2 = 0$ 的所有复数解的平方和为（ ）
(**A**) -1 (**B**) 0 (**C**) 1 (**D**) 2

(6) 已知f和g在全复平面上解析，且在某个复数集S上f和g恒等。当S为下述哪个集合时，我们**不能**断言f和g在全复平面上恒等?（ ）
(**A**) 单位圆$|z| = 1$内部 (**B**) 区间$(0, 1)$ (**C**) $(0, 1)$上的所有有理数 (**D**) 整数集

(7) $\frac{1}{(1+e^z)\sin z}$ 在区域$|z| < 5$内有多少个孤立奇点?（ ）
(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6

(8) $\frac{1}{z^2-3z+2}$ 在 $z = 1$ 处的留数等于（ ）
(**A**) 2 (**B**) 1 (**C**) 0 (**D**) -1

(9) 下列哪个多值函数在区域 $1 < |z| < 2$ 内可以规定适当的幅角范围成为解析函数?（ ）
(**A**) $\ln(z - 1)$ (**B**) $\ln(z + 1)$ (**C**) $\ln[(z - 1)(z + 1)]$ (**D**) $\ln\frac{z-1}{z+1}$

(10) $\sqrt{2\pi}\,\delta(x^2 - 1)$的傅立叶变换为（ ）
(**A**) 1 (**B**) $\cos k$ (**C**) $\sin k$ (**D**) $\frac{\sin k}{k}$

(11) $e^{-t}\sin 2t$的拉普拉斯变换为（ ）
(**A**) $\frac{2}{(p+1)^2+4}$ (**B**) $\frac{2}{(p-1)^2+4}$ (**C**) $\frac{2p}{p^2+4}$ (**D**) $\frac{2e^{-p}}{p^2+4}$

(12) $\left|\oint_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^{2719}}\,dz\right|$ 和下列哪个数量级最接近?（ ）
(**A**) 10^{-900} (**B**) 10^{-2700} (**C**) 10^{-5100} (**D**) 10^{-15300}

(13) 在单位球内的积分 $\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1}(|x| + |y| + |z|)dxdydz$ 等于（ ）
(**A**) $\frac{3}{2}\pi$ (**B**) $\sqrt{3}\pi$ (**C**) 2π (**D**) $2\sqrt{3}\pi$

(14) 用z^*表示z的共轭复数，按逆时针沿着曲线$|z-3|+|z+3| = 10$的围道积分$\oint_{|z-3|+|z+3|=10}(z^*dz - zdz^*)$ 等于（ ）
(**A**) $48\pi i$ (**B**) $60\pi i$ (**C**) $80\pi i$ (**D**) $96\pi i$

(15) 下列哪一个复变函数在复平面上处处不可导?（ ）
(**A**) $\frac{1}{z}$ (**B**) $|z|^2$ (**C**) $\sin|z|$ (**D**) $e^{|z|}$

(二) 填空题，每题5分，共35分。

(1) 复变函数 $e^{\frac{\cos z}{1+z^2+z^4}}\cos(z^3)$ 在 $z=0$ 处的导数为_______。

(2) 函数 $\frac{1}{z^5+z+1}$ 的所有孤立奇点处的留数之和为_______。

(3) 积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta\,\sin^4\theta\,d\theta$ 等于_______。

(4) 实积分 $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos 2x dx$ 等于_______。

(5) 逆时针方向沿着上半个单位圆的积分$\int_{|z|=1,\mathrm{Im}(z)\geq 0} z^{\frac{1}{3}}\,dz$ 等于_______。

(6) 复变函数$f(z)=|1-z|^4+(1+|z|)^4$的最小可能值等于_______。

(7) 定义函数 $f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\cos t)\,dt.$，则积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)f(\frac{\pi}{2}-x)\,dx$ 等于 _______。

(三) 长度为L的不良导体棒一端和温度为T_0的热库接触，并在$t=0$时刻和热库处于热平衡。从$t=0$时刻开始，在不良导体棒的另一端注入恒定大小为j的热流。设不良导体棒的导热系数λ，单位质量的比热c和质量密度ρ均已知。写出不良导体棒上温度$T(x,t)$ $(0\leq x\leq L, t\geq 0)$满足的方程和边界条件。(10分) 并简要分析当t很大时的解的渐近行为。(10分)