MMP quiz paradise offline - group work #2

Name#1: _______________ Name#2: _______________ Name#3: _______________ Name#4: _______________

(一) 选择题，每题5分，共25分

1. 下列哪个特殊函数在 $x \to 0^+$ 时发散？ (  )
   **(A)** $\mathrm{J}_0(x)$ **(B)** $\mathrm{N}_0(x)$ **(C)** $\mathrm{P}_0(x)$ **(D)** $\mathrm{j}_0(x)$
2. 以下哪个不是一维无界波动方程$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$的解？ (  )
   **(A)** $\sin(akt)\cos(kx)$ **(B)** $\sin(akt)\sinh(kx)$ **(C)** $(x+at)^2$ **(D)** $(x-at)^2$
3. 已知 $f(x) = 5x^3 - 2x + 1$，以下哪个积分不等于零？ (  )
   **(A)** $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{P}_2(x)\mathrm{d}x$ **(B)** $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{P}_3(x)\mathrm{d}x$ **(C)** $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{P}_4(x)\mathrm{d}x$ **(D)** $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{P}_5(x)\mathrm{d}x$
4. $f(t)$ $(t \geq 0)$满足微分方程$f'' - \frac{1}{t}f' + (4t^2 - \frac{8}{t^2})f = 0$以及初始条件$f(0) = 0$, 则$f(t)$和下列哪个成正比？ (  )
   **(A)** $t\mathrm{J}_3(t)$ **(B)** $t^2\mathrm{J}_2(t)$ **(C)** $t\mathrm{J}_{3/2}(t^2)$ **(D)** $\mathrm{J}_{2\sqrt{2}}(t^2)$
5. 积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{1}{\Gamma(x)}\right) dx$ 等于多少？ (  )
   **(A)** $0$ **(B)** $1$ **(C)** $e$ **(D)** $\pi$

(二) 计算题，每题25分，共75分

(1) 计算逆时针方向沿着椭圆围道 $\mathrm{C} = \{z: \ |z-3| + |z+3| = 10\}$ 的积分

$$\oint_C \frac{e^{1/z}}{(z^3+1)(z-6)} dz.$$

(2) 有一张边缘固定的圆形均匀弹性轻薄膜。其半径为 $R$，张力系数（单位线元所受张力）为 $\lambda$， 质量面密度为 $\sigma$ 。以薄膜中心为原点，在薄膜平衡时所在平面上建立极坐标系$(r,\theta)$ 。 在初始 $t=0$ 时刻的薄膜上各点均处于静止状态，偏离平衡位置的的横向小位移是

$$u|_{t=0} = A\,\mathrm{J}_1\left(\frac{\mu r}{R}\right)\cos\theta$$

其中 $A$, $\mu$ 均是给定的正实数参数。

(a) 写出薄膜横向小振动的波速 $a$ 和 $\lambda,\sigma$ 的关系（直接写结果，不必写推导过程）。

(b) 写出薄膜横向小位移 $u(r,\theta,t)$ 满足的方程和边界条件。

(c) 假设 $u$ 是处处光滑连续的，根据边界条件写出 $\mu$ 必须满足的条件。

(d) 求解 $u(r,\theta,t)$。

(3) 柱坐标系 $(r,\theta,z)$ 里 $r\le 1,\ -1\le z\le 1$ 描述了一个均匀材质圆柱体所占的空间区域。现在控制圆柱体侧表面的温度恒为

$$T|_{r=1} = T_0\left(\frac{1}{\sqrt{z^2-4z+5}}+\frac{1}{\sqrt{z^2+4z+5}}\right),$$

其中$T_0$为常量。同时控制圆柱体上下表面的温度恒为

$$T|_{z=\pm 1} = T_0\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{r^2+9}}\right).$$

计算圆柱体内的温度的稳定分布。

附录：特殊函数公式表

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \tag{1}$$

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right), \tag{2}$$

$$x! \approx \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x, \quad (\mathrm{Re}\, x \gg 1) \tag{3}$$

$$\mathrm{J}_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \tag{4}$$

$$\mathrm{N}_\nu(x) = \lim_{\alpha\to\nu}\frac{\mathrm{J}_\alpha(x)\cos(\alpha\pi)-\mathrm{J}_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}, \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^\nu Z_\nu(x)\right] = x^\nu Z_{\nu-1}(x), \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-\nu} Z_\nu(x)\right] = -x^{-\nu} Z_{\nu+1}(x), \tag{7}$$

$$Z_{\nu-1}(x) - Z_{\nu+1}(x) = 2Z'_\nu(x), \tag{8}$$

$$Z_{\nu-1}(x) + Z_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}Z_\nu(x), \tag{9}$$

$$\mathrm{J}_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\nu}{2}\pi-\frac{\pi}{4}\right), \quad (\text{当}x \gg \sqrt{|\nu^2-\frac{1}{4}|}), \tag{10}$$

$$\mathrm{N}_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\nu}{2}\pi-\frac{\pi}{4}\right), \quad (\text{当}x \gg \sqrt{|\nu^2-\frac{1}{4}|}), \tag{11}$$

$$\mathrm{J}_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} e^{i(x\sin\theta - m\theta)}\mathrm{d}\theta, \quad (m\text{为整数}, a\text{为任意常数}), \tag{12}$$

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_n(x)t^n, \tag{13}$$

$$\int_0^1 x\,\mathrm{J}_m(\mu_i x)\mathrm{J}_m(\mu_j x)\,\mathrm{d}x = \delta_{ij}\frac{[\mathrm{J}_{m+1}(\mu_i)]^2}{2}, \quad (\mu_1<\mu_2<\ldots\text{是}\mathrm{J}_m\text{的正实数零点}), \tag{14}$$

$$\int_0^1 x\,\mathrm{J}_m(\lambda_i x)\mathrm{J}_m(\lambda_j x)\mathrm{d}x = \delta_{ij}\frac{\left(1-\frac{m^2}{\lambda_i^2}\right)[\mathrm{J}_m(\lambda_i)]^2}{2}, \quad (\lambda_1<\lambda_2<\ldots\text{是}\mathrm{J}'_m\text{的正实数零点}), \tag{15}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{J}_m(k_1 r)\mathrm{J}_m(k_2 r)r dr = \frac{\delta(k_1-k_2)}{k_1}, \ (k_1, k_2>0), \tag{16}$$

$$\mathrm{j}_\ell(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{J}_{\ell+1/2}(x), \tag{17}$$

$$\mathrm{n}_\ell(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{N}_{\ell+1/2}(x), \tag{18}$$

$$\mathrm{j}_l(x) = (-x)^l\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^l\frac{\sin x}{x}, \tag{19}$$

$$\mathrm{n}_l(x) = -(-x)^l\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^l\frac{\cos x}{x}, \tag{20}$$

$$\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta,\phi) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\sqrt{\frac{(2\ell+1)}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\left[\sin^m\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\right)^{\ell+m}\sin^{2\ell}\theta\right]e^{im\phi}, \tag{21}$$

$$\mathrm{P}_\ell(\cos\theta) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\mathrm{Y}_{\ell 0}(\theta,\phi), \tag{22}$$

$$\mathrm{P}_\ell(x) = \sum_{k=0}^{\ell}\frac{(\ell+k)!}{(k!)^2(\ell-k)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^k, \tag{23}$$

$$\mathrm{P}_\ell(x) = \sum_{k=0}^{\ell}\frac{(-1)^{\ell-k}(\ell+k)!}{(k!)^2(\ell-k)!}\left(\frac{x+1}{2}\right)^k, \tag{24}$$

$$\mathrm{P}_{2n}(x) = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}[2(n+k)]!}{(n+k)!(n-k)!(2k)!}x^{2k}, \quad (n\text{为非负整数}) \tag{25}$$

$$\mathrm{P}_{2n+1}(x) = \frac{1}{2^{2n+1}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}[2(n+k+1)]!}{(n+k+1)!(n-k)!(2k+1)!}x^{2k+1}, \quad (n\text{为非负整数}) \tag{26}$$

$$\mathrm{P}_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}(x^2-1)^\ell, \tag{27}$$

$$(2\ell+1)x\mathrm{P}_\ell(x) = (\ell+1)\mathrm{P}_{\ell+1}(x)+\ell\mathrm{P}_{\ell-1}(x), \tag{28}$$

$$(2\ell+1)\mathrm{P}_\ell(x) = \mathrm{P}'_{\ell+1}(x)-\mathrm{P}'_{\ell-1}(x), \tag{29}$$

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_m(x)\mathrm{P}_n(x)dx = \frac{2}{2m+1}\delta_{mn}, \tag{30}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2xt}} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\mathrm{P}_\ell(x)t^\ell, \ (t<|x\pm\sqrt{x^2-1}|), \tag{31}$$

$$\mathrm{P}_\ell(\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2) = \frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\mathrm{Y}^*_{\ell m}(\mathbf{n}_1)\mathrm{Y}_{\ell m}(\mathbf{n}_2), \tag{32}$$