MMP quiz paradise offline - group work

Name#1: ______________ Name#2: ______________ Name#3: ______________ Name#4: ______________

(一) 选择题，每题5分，共40分

1. 解析函数 $f(z)$ 的实部是 $u(x,y)=e^y\cos x$ （这里x,y分别是z的实部和虚部），那么下列哪个选项有可能是 $f(z)$ 的虚部？ ( )

   (A) $e^y\sin x$ **(B)** $-e^y\sin x$ **(C)** $e^{-y}\sin x$ **(D)** $-e^{-y}\sin x$

2. 下列哪一个函数在 $z=0$ 处的留数大于零？ ( )

   (A) $\frac{1}{z(e^z-1)}$ **(B)** $\frac{1}{1-e^{\sin(\sin z)}}$ **(C)** $\Gamma(z)$ **(D)** $[\Gamma(z)]^2$

3. 逆时针方向绕着圆 $|z|=8$ 的围道积分 $\oint_{|z|=8}\frac{dz}{z\sin z}$ 等于 ( )

   (A) $8i$ **(B)** 0 **(C)** $-8i$ **(D)** $-10i$

4. 积分$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(4x^2-1)\Gamma(x)\,\mathrm{d}x$的值为 ( )

   (A) $-\frac{\sqrt{\pi}}{4}$ **(B)** 0 **(C)** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ **(D)** $\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$

5. 设 $f(t)=\frac{1}{(1+t)\cosh t}$ 的拉普拉斯变换为 $F(p)$，则极限 $\lim\limits_{p\to\infty}pF(p)$ 等于

   (A) 0 **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** 1 **(D)** $e^{-1/2}$

6. 第二类贝塞尔函数的积分 $\int_{20!}^{100!}[\mathrm{N}_{1000}(x)]^2\,\mathrm{d}x$ 和下列哪个数量级最接近？

   (A) 1 **(B)** 100 **(C)** 10^4 **(D)** 10^6

7. 铀块里的中子数密度 $n(\mathbf{x},t)$ 除了随机扩散行为（类似于固体中热传导）之外，还存在自我增殖现象，具体满足的方程是：$\frac{\partial n}{\partial t}-D\nabla^2 n=\beta n$. 这里的常量 D 是扩散率，β 是净增殖率。球形铀块的零界半径（即内部 n 稳定不变时铀块的最小半径）等于多少？

   (A) $\sqrt{\frac{\beta}{D}}$ **(B)** $\sqrt{\frac{D}{\beta}}$ **(C)** $\pi\sqrt{\frac{\beta}{D}}$ **(D)** $\pi\sqrt{\frac{D}{\beta}}$

8. 限定 ℓ 为整数，那么极限 $\lim\limits_{\ell\to\infty}\frac{[\mathrm{J}_2(\ell)]^2+[\mathrm{J}_3(\ell)]^2}{[\mathrm{P}_{2\ell}(0)]^2}$ 等于 ( )

   (A) 1 **(B)** 2 **(C)** $\frac{\pi}{2}$ **(D)** $\frac{2}{\pi}$

(二) 计算题

(1) 考虑一个内部为真空的半球形区域，其边界的球面上的静电势为 V_0，底面的静电势为零。计算半球内的电势分布。(30分)

(2) 考虑一条长为 l，线质量密度为 ρ 的均匀柔软细线，$x=0$ 端固定在以角频率 ω 匀速转动的轴上，$x=l$ 端自由。在重力可忽略的条件下，由于惯性离心力的作用，细线的平衡位置为水平。

（a）在转动参考系内，求出细线上各点的张力，然后通过受力分析写出细线相对于平衡位置振动时满足的偏微分方程和两端的边界条件。(15分)

（b）在 $t=0$ 时刻，使细线偏离平衡位置。在转动参考系内，细线初始位移为 $u(x,t)|_{t=0}=ax$ (这里 $a \ll 1$ 为常量)，初始速度为零。请求解出细线之后的振动。(15分)

附录：特殊函数公式表

J_ν 和 N_ν 分别表示阶数为 ν 的第一类和第二类贝塞尔函数； Z_ν 表示 ν 阶柱函数（即任意固定的线性组合 $a\mathrm{J}_\nu + b\mathrm{N}_\nu$, a, b 均为和 ν 无关的常数）； j_ν 和 n_ν 分别表示第一类和第二类球贝塞尔函数； $\mathrm{Y}_{\ell m}$ 表示球面谐函数；P_ℓ 表示勒让德多项式；δ_{ij} 为克罗内克符号（当 $i = j$ 时为 1，否则为零）。

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \tag{1}$$

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right), \tag{2}$$

$$x! \approx \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x, \quad (\mathrm{Re}\, x \gg 1) \tag{3}$$

$$\mathrm{J}_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \tag{4}$$

$$\mathrm{N}_\nu(x) = \lim_{\alpha\to\nu}\frac{\mathrm{J}_\alpha(x)\cos(\alpha\pi) - \mathrm{J}_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}, \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^\nu Z_\nu(x)\right] = x^\nu Z_{\nu-1}(x), \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-\nu} Z_\nu(x)\right] = -x^{-\nu} Z_{\nu+1}(x), \tag{7}$$

$$Z_{\nu-1}(x) - Z_{\nu+1}(x) = 2Z'_\nu(x), \tag{8}$$

$$Z_{\nu-1}(x) + Z_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}Z_\nu(x), \tag{9}$$

$$\mathrm{J}_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\nu}{2}\pi-\frac{\pi}{4}\right),\quad (当x \gg \sqrt{|\nu^2-\frac{1}{4}|}), \tag{10}$$

$$\mathrm{N}_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\nu}{2}\pi-\frac{\pi}{4}\right),\quad (当x \gg \sqrt{|\nu^2-\frac{1}{4}|}), \tag{11}$$

$$\mathrm{J}_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} e^{i(x\sin\theta-m\theta)}\mathrm{d}\theta,\quad (m为整数, a为任意常数), \tag{12}$$

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_n(x)t^n, \tag{13}$$

$$\int_0^1 x\,\mathrm{J}_m(\mu_i x)\mathrm{J}_m(\mu_j x)\,\mathrm{d}x = \delta_{ij}\frac{[\mathrm{J}_{m+1}(\mu_i)]^2}{2},\quad (\mu_1<\mu_2<\ldots 是\mathrm{J}_m的正实数零点), \tag{14}$$

$$\int_0^1 x\,\mathrm{J}_m(\lambda_i x)\mathrm{J}_m(\lambda_j x)\mathrm{d}x = \delta_{ij}\frac{\left(1-\frac{m^2}{\lambda_i^2}\right)[\mathrm{J}_m(\lambda_i)]^2}{2},\quad (\lambda_1<\lambda_2<\ldots 是\mathrm{J}'_m的正实数零点), \tag{15}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{J}_m(k_1 r)\mathrm{J}_m(k_2 r)r dr = \frac{\delta(k_1-k_2)}{k_1},\ (k_1,k_2>0), \tag{16}$$

$$\mathrm{j}_\ell(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{J}_{\ell+1/2}(x), \tag{17}$$

$$\mathrm{n}_\ell(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{N}_{\ell+1/2}(x), \tag{18}$$

$$\mathrm{j}_l(x) = (-x)^l\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^l\frac{\sin x}{x}, \tag{19}$$

$$\mathrm{n}_l(x) = -(-x)^l\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^l\frac{\cos x}{x}, \tag{20}$$

$$\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta,\phi) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\sqrt{\frac{(2\ell+1)}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\left[\sin^m\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\right)^{\ell+m}\sin^{2\ell}\theta\right]e^{im\phi}, \tag{21}$$

$$\mathrm{P}_\ell(\cos\theta) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\mathrm{Y}_{\ell 0}(\theta,\phi), \tag{22}$$

$$\mathrm{P}_\ell(x) = \sum_{k=0}^{\ell}\frac{(\ell+k)!}{(k!)^2(\ell-k)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^k, \tag{23}$$

$$\mathrm{P}_\ell(x) = \sum_{k=0}^{\ell}\frac{(-1)^{\ell-k}(\ell+k)!}{(k!)^2(\ell-k)!}\left(\frac{x+1}{2}\right)^k, \tag{24}$$

$$\mathrm{P}_{2n}(x) = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}[2(n+k)]!}{(n+k)!(n-k)!(2k)!}x^{2k},\quad (n为非负整数) \tag{25}$$

$$\mathrm{P}_{2n+1}(x) = \frac{1}{2^{2n+1}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}[2(n+k+1)]!}{(n+k+1)!(n-k)!(2k+1)!}x^{2k+1},\quad (n为非负整数) \tag{26}$$

$$\mathrm{P}_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}(x^2-1)^\ell, \tag{27}$$

$$(2\ell+1)x\mathrm{P}_\ell(x) = (\ell+1)\mathrm{P}_{\ell+1}(x)+\ell\mathrm{P}_{\ell-1}(x), \tag{28}$$

$$(2\ell+1)\mathrm{P}_\ell(x) = \mathrm{P}'_{\ell+1}(x)-\mathrm{P}'_{\ell-1}(x), \tag{29}$$

$$\int_{-1}^1 \mathrm{P}_m(x)\mathrm{P}_n(x)dx = \frac{2}{2m+1}\delta_{mn}, \tag{30}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2xt}} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\mathrm{P}_\ell(x)t^\ell,\ (t<|x\pm\sqrt{x^2-1}|), \tag{31}$$

$$\mathrm{P}_\ell(\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2) = \frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\mathrm{Y}^*_{\ell m}(\mathbf{n}_1)\mathrm{Y}_{\ell m}(\mathbf{n}_2), \tag{32}$$