MMP quiz paradise offline　Name ______________ Student number ______________

(一) 选择题，每题5分，共30分

(1) 方程$e^z = 1 + i$ 的全部复数解为 $z =$ ( )

(**A**) $\ln 2 + \frac{\pi}{4} i$ (**B**) $\ln 2 + \left(2n + \frac{1}{4}\right)\pi i,\ n \in Z$ (**C**) $\frac{1}{2}\ln 2 + \left(2n + \frac{1}{4}\right)\pi i,\ n \in Z$
(**D**) $\frac{1}{2}\ln 2 + \left(n + \frac{1}{4}\right)\pi i,\ n \in Z$

(2) 下列哪一个复变函数在复平面上处处不可导？ ( )

(**A**) $\frac{1}{z}$ (**B**) $|z|^2$ (**C**) $\sin|z|$ (**D**) $e^{|z|}$

(3) 复平面的原点 $z = 0$ 是下列哪个函数的孤立奇点？( )

(**A**) $\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ (**B**) $\frac{1}{\cosh\frac{1}{z}}$ (**C**) $\frac{1}{\cosh\frac{1}{z}+\sinh\frac{1}{z}}$ (**D**) $\frac{1}{\cos\frac{1}{z}+\sin\frac{1}{z}}$

(4) $e^{-t}\sin 2t$的拉普拉斯变换为 ( )

(**A**) $\frac{2}{(p+1)^2+4}$ (**B**) $\frac{2}{(p-1)^2+4}$ (**C**) $\frac{2p}{p^2+4}$ (**D**) $\frac{2e^{-p}}{p^2+4}$

(5) $\frac{\mathrm{P}_{10}''(0)}{\mathrm{P}_{10}(0)}$ 等于 ( )

(**A**) -110 (**B**) -10 (**C**) 1 (**D**) 10

(6) 有多少个正实数 μ 同时满足 $\mathrm{J}_0(\mu) = 0$ 和 $\frac{\mathrm{J}_3(\mu)}{\mathrm{J}_1(\mu)} > 0$? ( )

(**A**) 0个 (**B**) 1个 (**C**) 2个 (**D**) 无穷多个

(二) 计算题

(1) 计算逆时针方向沿着圆 $|z| = 3$ 的围道积分 (10分)

$$\oint_{|z|=3} \frac{dz}{z^2 \sin z}.$$

(2) 两端固定的，长度为L的均匀弦的横向振动$u(x,t)$ $(0 \le x \le L)$ 的初始位移 $u|_{t=0} = A\sin\frac{\pi x}{L}$，初始速度为零。 求解$u(x,t)$。设弦的线密度$\lambda$，张力$f$均已知。（30分）

(3) 有半径为 R，导热系数为 λ，单位质量比热为 c，质量密度为 ρ 的孤立均匀薄圆盘。以圆盘中心为原点建立极坐标 (r,θ)。初始时刻各点的温度为 $T|_{t=0} = T_0\left(1+\frac{r}{R}\cos\theta\right)$。计算之后圆盘上各点的温度变化。（30分）

附录：特殊函数公式表

J_ν 和 N_ν 分别表示阶数为 ν 的第一类和第二类贝塞尔函数； Z_ν 表示 ν 阶柱函数（即任意固定的线性组合 $a\mathrm{J}_\nu + b\mathrm{N}_\nu$, a, b 均为和 ν 无关的常数）； j_ν 和 n_ν 分别表示第一类和第二类球贝塞尔函数； $\mathrm{Y}_{\ell m}$ 表示球面谐函数；P_ℓ 表示勒让德多项式；δ_{ij} 为克罗内克符号（当 $i = j$ 时为 1，否则为零）。

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \tag{1}$$

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right), \tag{2}$$

$$x! \approx \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x, \quad (\mathrm{Re}\, x \gg 1) \tag{3}$$

$$\mathrm{J}_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \tag{4}$$

$$\mathrm{N}_\nu(x) = \lim_{\alpha\to\nu}\frac{\mathrm{J}_\alpha(x)\cos(\alpha\pi) - \mathrm{J}_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}, \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^\nu Z_\nu(x)\right] = x^\nu Z_{\nu-1}(x), \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-\nu} Z_\nu(x)\right] = -x^{-\nu} Z_{\nu+1}(x), \tag{7}$$

$$Z_{\nu-1}(x) - Z_{\nu+1}(x) = 2Z'_\nu(x), \tag{8}$$

$$Z_{\nu-1}(x) + Z_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}Z_\nu(x), \tag{9}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{J}_\nu(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\nu}{2}\pi-\frac{\pi}{4}\right),\ \ (\text{当}x\gg\sqrt{|\nu^2-\frac{1}{4}|}), && (10)\\
\mathrm{N}_\nu(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\nu}{2}\pi-\frac{\pi}{4}\right),\ \ (\text{当}x\gg\sqrt{|\nu^2-\frac{1}{4}|}), && (11)\\
\mathrm{J}_m(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} e^{i(x\sin\theta-m\theta)}\mathrm{d}\theta,\ \ (m\text{为整数}, a\text{为任意常数}), && (12)\\
e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_n(x)t^n, && (13)\\
\int_0^1 x\,\mathrm{J}_m(\mu_i x)\mathrm{J}_m(\mu_j x)\,\mathrm{d}x &= \delta_{ij}\frac{[\mathrm{J}_{m+1}(\mu_i)]^2}{2},\ \ (\mu_1<\mu_2<\ldots\text{是}\mathrm{J}_m\text{的正实数零点}), && (14)\\
\int_0^1 x\,\mathrm{J}_m(\lambda_i x)\mathrm{J}_m(\lambda_j x)\mathrm{d}x &= \delta_{ij}\frac{\left(1-\frac{m^2}{\lambda_i^2}\right)[\mathrm{J}_m(\lambda_i)]^2}{2},\ \ (\lambda_1<\lambda_2<\ldots\text{是}\mathrm{J}'_m\text{的正实数零点}), && (15)\\
\int_0^\infty \mathrm{J}_m(k_1 r)\mathrm{J}_m(k_2 r)rdr &= \frac{\delta(k_1-k_2)}{k_1},\ (k_1,k_2>0), && (16)\\
\mathrm{j}_\ell(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{J}_{\ell+1/2}(x), && (17)\\
\mathrm{n}_\ell(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{N}_{\ell+1/2}(x), && (18)\\
\mathrm{j}_l(x) &= (-x)^l\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^l\frac{\sin x}{x}, && (19)\\
\mathrm{n}_l(x) &= -(-x)^l\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^l\frac{\cos x}{x}, && (20)\\
\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta,\phi) &= \frac{1}{2^\ell\ell!}\sqrt{\frac{(2\ell+1)}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\left[\sin^m\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\right)^{\ell+m}\sin^{2\ell}\theta\right]e^{im\phi}, && (21)\\
\mathrm{P}_\ell(\cos\theta) &= \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\mathrm{Y}_{\ell 0}(\theta,\phi), && (22)\\
\mathrm{P}_\ell(x) &= \sum_{k=0}^{\ell}\frac{(\ell+k)!}{(k!)^2(\ell-k)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^k, && (23)\\
\mathrm{P}_\ell(x) &= \sum_{k=0}^{\ell}\frac{(-1)^{\ell-k}(\ell+k)!}{(k!)^2(\ell-k)!}\left(\frac{x+1}{2}\right)^k, && (24)\\
\mathrm{P}_{2n}(x) &= \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}[2(n+k)]!}{(n+k)!(n-k)!(2k)!}x^{2k},\ \ (n\text{为非负整数}) && (25)\\
\mathrm{P}_{2n+1}(x) &= \frac{1}{2^{2n+1}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}[2(n+k+1)]!}{(n+k+1)!(n-k)!(2k+1)!}x^{2k+1},\ \ (n\text{为非负整数}) && (26)\\
\mathrm{P}_\ell(x) &= \frac{1}{2^\ell\ell!}\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}(x^2-1)^\ell, && (27)\\
(2\ell+1)x\mathrm{P}_\ell(x) &= (\ell+1)\mathrm{P}_{\ell+1}(x)+\ell\mathrm{P}_{\ell-1}(x), && (28)\\
(2\ell+1)\mathrm{P}_\ell(x) &= \mathrm{P}'_{\ell+1}(x)-\mathrm{P}'_{\ell-1}(x), && (29)\\
\int_{-1}^1 \mathrm{P}_m(x)\mathrm{P}_n(x)dx &= \frac{2}{2m+1}\delta_{mn}, && (30)\\
\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2xt}} &= \sum_{\ell=0}^{\infty}\mathrm{P}_\ell(x)t^\ell,\ (t<|x\pm\sqrt{x^2-1}|), && (31)\\
\mathrm{P}_\ell(\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2) &= \frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\mathrm{Y}^*_{\ell m}(\mathbf{n}_1)\mathrm{Y}_{\ell m}(\mathbf{n}_2), && (32)
\end{aligned}
$$