# MMP offline quiz

一、选择题 （共10小题，每小题3分，共30分）

1. 复数 $e^{1949\pi i}$ 等于

   A. $i$　B. $-i$　C. 1　D. $-1$

2. 下列哪个复变函数在整个复平面上处处不可导？

   A. $\sin|z|$　B. $\cos|z|$　C. $|z|^2$　D. $|z|^2+|z|$

3. 复变函数 $\frac{1}{\sinh^3 z}$ 在 $z=0$ 处的留数等于

   A. $-\frac{1}{2}$　B. 0　C. $-\frac{1}{6}$　D. $\frac{1}{2}$

4. 计算 $\Gamma(\frac{3}{2})$ 的值

   A. $\frac{3\pi}{2}$　B. $\frac{3\sqrt{\pi}}{2}$　C. $\frac{\pi}{2}$　D. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

5. 积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(2x+\pi)\sin x\,\mathrm{d}x$ 等于

   A. $-\frac{1}{2}$　B. $\frac{1}{2}$　C. 1　D. $-1$

6. 如果 $f(t)$ 的拉普拉斯变换为 $F(p)$，则函数 $g(t)=\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ 的拉普拉斯变换为

   A. $pF(p)-f(0)$　B. $F(p)/p-f(0)$　C. $F(p)/p$　D. $pF(p)$

7. 设对任意实数 $k$ 均有 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{1+k^4}}$，则积分 $\int_0^{\infty}[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$ 等于

   A. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$　B. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$　C. $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$　D. $\frac{\sqrt{2}}{8}$

8. 下列哪个等式对所有实数$x$成立？

   A. $\mathrm{J}_0'(x)=\mathrm{J}_1(x)$　B. $\mathrm{J}_0'(x)=-\mathrm{J}_1(x)$
   C. $\mathrm{J}_1'(x)=-\mathrm{J}_0(x)$　D. $\mathrm{J}_1'(x)=\mathrm{J}_0(x)$

9. 勒让德多项式 $\mathrm{P}_\ell$ 对所有复数都有定义，计算逆时针方向沿着圆围道 $|z|=1$ 的积分 $\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{P}_5(z)}{z}\,\mathrm{d}z$

   A. $2\pi i$　B. $-\frac{4\pi i}{11}$　C. $\frac{4\pi i}{11}$　D. 0

10. 有多少个正实数 $\mu$ 同时满足 $\mathrm{J}_1(\mu)=0$ 和 $\mathrm{J}_2(\mu)\mathrm{J}_4(\mu)>0$？

    A. 0 个　B. 2 个　C. 无穷多个　D. 1 个

二、计算题 （10分）

对任意实数对 $(x,y)$ 定义复变函数 $f(x+yi)=x^2+y^2-\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $g(x+yi)=y^2-y$。请找出一个复数 $\alpha$，使得 $f$ 和 $g$ 都在 $z=\alpha$ 处可导。

三、简答题 （共3小题，每小题20分，共60分）

1. 边长为 $L$ 的正方形均匀薄板的下边缘、左边缘和右边缘的温度保持为零，上边缘各点温度保持为 $T_0\sin\frac{\pi x}{2L}\cos\frac{3\pi x}{2L}$，这里的 $x$ 是到左边缘的距离，$T_0$ 是给定常量。计算薄板上各点的稳定温度分布。

2. 有一张边缘固定的圆形均匀弹性轻薄膜。其半径为 $R$，张力系数（单位线元所受张力）为 $\lambda$， 质量面密度为 $\sigma$ 。以薄膜中心为原点，在薄膜平衡时所在平面上建立极坐标系$(r,\theta)$。在初始 $t=0$ 时刻的薄膜上各点均处于静止状态，偏离平衡位置的的横向小位移是 $u|_{t=0}=A\,\mathrm{J}_1\left(\frac{\mu r}{R}\right)\cos(\theta)$，其中 $A,\mu$ 均是给定的正实数参数，$\mathrm{J}_1$ 是第一类贝塞尔函数，$\mu$ 是 $\mathrm{J}_1$ 的一个正实数零点。求解薄膜的横向小振动 $u(r,\theta,t)$。

3. 一个半径为 $R$，热扩散系数（即热传导方程里的参数）为 $a$ 的均匀孤立金属球的球心位于三维$x$-$y$-$z$直角坐标系的原点。一开始球内温度分布为 $T(x,y,z,t=0)=T_0\frac{x+2y+2z}{R}$，这里 $T_0$ 为给定常量。计算球内温度如何随时间变化。

附录：特殊函数公式表

$\mathrm{J}_\nu$ 和 $\mathrm{N}_\nu$ 分别表示阶数为 $\nu$ 的第一类和第二类贝塞尔函数； $Z_\nu$ 表示 $\nu$ 阶柱函数（即任意固定的线性组合 $a\mathrm{J}_\nu + b\mathrm{N}_\nu$, $a, b$ 均为和 $\nu$ 无关的常数）； $\mathrm{j}_\nu$ 和 $\mathrm{n}_\nu$ 分别表示第一类和第二类球贝塞尔函数；$\mathrm{I}_\nu$ 和 $\mathrm{K}_\nu$ 分别表示第一类和第二类虚宗量贝塞尔函数。$\mathrm{P}_\ell$ 表示勒让德多项式；$\mathrm{P}_\ell^m$ 表示连带勒让德函数；$\mathrm{Y}_{\ell m}$ 表示球面谐函数；$\delta_{ij}$ 为克罗内克符号（当 $i = j$ 时为 1，否则为零）。

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \tag{1}$$

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right), \tag{2}$$

$$x! \approx \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x, \quad (\mathrm{Re}\, x \gg 1) \tag{3}$$

$$\mathrm{J}_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \tag{4}$$

$$\mathrm{N}_\nu(x) = \lim_{\alpha\to\nu}\frac{\mathrm{J}_\alpha(x)\cos(\alpha\pi) - \mathrm{J}_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}, \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^\nu Z_\nu(x)\right] = x^\nu Z_{\nu-1}(x), \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-\nu} Z_\nu(x)\right] = -x^{-\nu} Z_{\nu+1}(x), \tag{7}$$

$$Z_{\nu-1}(x) - Z_{\nu+1}(x) = 2Z_\nu'(x), \tag{8}$$

$$Z_{\nu-1}(x) + Z_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}Z_\nu(x), \tag{9}$$

$$\mathrm{J}_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\nu}{2}\pi - \frac{\pi}{4}\right), \quad (当 x \gg \sqrt{|\nu^2 - \frac{1}{4}|}), \tag{10}$$

$$\mathrm{N}_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{\nu}{2}\pi - \frac{\pi}{4}\right), \quad (当 x \gg \sqrt{|\nu^2 - \frac{1}{4}|}), \tag{11}$$

$$\mathrm{J}_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} e^{i(x\sin\theta - m\theta)}\,\mathrm{d}\theta, \quad (m 为整数, a 为任意常数), \tag{12}$$

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_n(x)t^n, \tag{13}$$

$$\int_0^1 x\,\mathrm{J}_m(\mu_i x)\mathrm{J}_m(\mu_j x)\,\mathrm{d}x = \delta_{ij}\frac{\left[\mathrm{J}_{m+1}(\mu_i)\right]^2}{2}, \quad (\mu_1 < \mu_2 < \ldots 是 \mathrm{J}_m 的正实数零点), \tag{14}$$

$$\int_0^1 x\,\mathrm{J}_m(\lambda_i x)\mathrm{J}_m(\lambda_j x)\,\mathrm{d}x = \delta_{ij}\frac{\left(1-\frac{m^2}{\lambda_i^2}\right)\left[\mathrm{J}_m(\lambda_i)\right]^2}{2}, \quad (\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots 是 \mathrm{J}_m' 的正实数零点), \tag{15}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{J}_m(k_1 r)\mathrm{J}_m(k_2 r) r\,\mathrm{d}r = \frac{\delta(k_1 - k_2)}{k_1}, \quad (k_1, k_2 > 0), \tag{16}$$

$$\mathrm{I}_\nu(x) = \equiv e^{-\frac{i\nu\pi}{2}}\mathrm{J}_\nu(e^{\frac{\pi i}{2}}x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}, \tag{17}$$

$$\mathrm{K}_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\lim_{\alpha\to\nu}\frac{\mathrm{I}_{-\alpha}(x) - \mathrm{I}_\alpha(x)}{\sin(\alpha\pi)}, \tag{18}$$

$$\mathrm{j}_\ell(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{J}_{\ell+1/2}(x), \tag{19}$$

$$\mathrm{n}_\ell(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{N}_{\ell+1/2}(x), \tag{20}$$

$$\mathrm{j}_l(x) = (-x)^l \left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^l \frac{\sin x}{x}, \tag{21}$$

$$\mathrm{n}_l(x) = -(-x)^l \left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^l \frac{\cos x}{x}, \tag{22}$$

$$\mathrm{P}_\ell^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\mathrm{P}_\ell(x) \quad (-1 \le x \le 1), \tag{23}$$

$$\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{(2\ell+1)}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\mathrm{P}_\ell^m(\cos\theta)e^{im\phi}, \tag{24}$$

$$\mathrm{Y}_{\ell m}(\theta,\phi) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\sqrt{\frac{(2\ell+1)}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\left[\sin^m\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\right)^{\ell+m}\sin^{2\ell}\theta\right]e^{im\phi}, \tag{25}$$

$$\mathrm{P}_\ell(\cos\theta) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\mathrm{Y}_{\ell 0}(\theta,\phi), \tag{26}$$

$$\mathrm{P}_\ell(x) = \sum_{k=0}^{\ell}\frac{(\ell+k)!}{(k!)^2(\ell-k)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^k, \tag{27}$$

$$\mathrm{P}_\ell(x) = \sum_{k=0}^{\ell}\frac{(-1)^{\ell-k}(\ell+k)!}{(k!)^2(\ell-k)!}\left(\frac{x+1}{2}\right)^k, \tag{28}$$

$$\mathrm{P}_{2n}(x) = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}\,[2(n+k)]!}{(n+k)!(n-k)!(2k)!}x^{2k}, \quad (n\text{为非负整数}) \tag{29}$$

$$\mathrm{P}_{2n+1}(x) = \frac{1}{2^{2n+1}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}\,[2(n+k+1)]!}{(n+k+1)!(n-k)!(2k+1)!}x^{2k+1}, \quad (n\text{为非负整数}) \tag{30}$$

$$\mathrm{P}_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}(x^2-1)^\ell, \tag{31}$$

$$(2\ell+1)x\mathrm{P}_\ell(x) = (\ell+1)\mathrm{P}_{\ell+1}(x)+\ell\mathrm{P}_{\ell-1}(x), \tag{32}$$

$$(2\ell+1)\mathrm{P}_\ell(x) = \mathrm{P}'_{\ell+1}(x)-\mathrm{P}'_{\ell-1}(x), \tag{33}$$

$$\mathrm{P}'_{\ell+1}(x) = x\mathrm{P}'_\ell(x)+(\ell+1)\mathrm{P}_\ell(x), \tag{34}$$

$$\mathrm{P}'_{\ell-1}(x) = x\mathrm{P}'_\ell(x)-\ell\mathrm{P}_\ell(x), \tag{35}$$

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_m(x)\mathrm{P}_n(x)\ \mathrm{d}x = \frac{2}{2m+1}\delta_{mn}, \tag{36}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2xt}} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\mathrm{P}_\ell(x)t^\ell,\ (t<|x\pm\sqrt{x^2-1}|), \tag{37}$$

$$\mathrm{P}_\ell(\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2) = \frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\mathrm{Y}^*_{\ell m}(\mathbf{n}_1)\mathrm{Y}_{\ell m}(\mathbf{n}_2), \tag{38}$$