

数学物理方法

Methods of Mathematical Physics

黄志琦

First printing, December 2021

Contents

复变函数

1	复变函数和欧拉公式	15
1.1	从实变函数到复变函数	15
1.2	欧拉公式和复数的指数表示	16
1.3	对数函数和复数次幂	18
1.4	第 1 章习题	19
2	解析函数和柯西定理	21
2.1	复变函数的导数	21
2.1.1	初等函数的导函数	21
2.1.2	复变函数的可导性: 柯西-黎曼方程	22
2.1.3	复变函数的可导性: 其他判断方法	25
2.2	复变函数的原函数	26
2.3	解析函数	28
2.3.1	解析函数	28
2.3.2	多值函数的解析的单值分支	29

2.4	柯西定理和柯西积分公式	31
2.4.1	柯西定理	31
2.4.2	柯西积分公式	33
2.5	第 2 章习题	34
3	洛朗展开和留数定理	37
3.1	泰勒展开和洛朗展开	37
3.1.1	泰勒展开	37
3.1.2	洛朗展开	38
3.1.3	洛朗展开的实战技巧	40
3.2	留数定理	45
3.3	留数定理的应用	46
3.3.1	一些补充说明	55
3.4	第 3 章习题	56
4	解析延拓和 Gamma 函数	59
4.1	解析函数的邻域近似	59
4.1.1	保角映射	59
4.1.2	最大模原理	60
4.1.3	代数基本定理	61
4.1.4	解析延拓	62
4.2	Gamma 函数	63
4.2.1	Stirling 公式	65
4.2.2	Beta 函数和互余宗量关系	69
4.2.3	Gamma 函数相关问题举例	70
4.3	第 4 章习题	80
II	积分变换	
5	狄拉克 delta 函数	89
5.1	狄拉克 delta 函数	89
5.2	delta 函数的积分性质	91
5.3	高维空间的 delta 函数	92

5.4	δ 复合函数	93
5.5	第 5 章习题	93
6	傅里叶变换	95
6.1	复矩阵简介	95
6.2	函数的离散表示	97
6.3	傅里叶变换和它的反演公式	100
6.4	高维空间的傅里叶变换	101
6.5	傅里叶空间的物理公式	102
6.6	卷积定理	103
6.7	第 6 章习题	105
7	拉普拉斯变换	107
7.1	拉普拉斯变换和它的反演公式	107
7.2	常见的拉普拉斯变换	108
7.3	拉普拉斯变换的应用	111
7.4	第 7 章习题	113

III

数理方程与特殊函数

8	正交曲面坐标系中的矢量分析	119
8.1	极坐标	120
8.2	正交曲面坐标系	121
8.2.1	柱坐标系	122
8.2.2	球坐标系	124
8.2.3	双球坐标系	126
8.3	梯度、散度和旋度	127
8.3.1	梯度	129
8.3.2	散度	130
8.3.3	旋度	133
8.3.4	拉普拉斯算符	135
8.4	矢量分析常见公式	136
8.5	第 8 章习题	138

9	常见数理方程	141
9.1	泊松方程	141
9.1.1	边界条件和唯一解定理	142
9.1.2	解的存在性问题	143
9.1.3	在一些特殊区域内的解	146
9.2	热传导方程	148
9.2.1	热传导方程参数 a 的物理意义	149
9.2.2	热传导方程的稳态解	151
9.3	波动方程	154
9.3.1	弦的横向小振动	154
9.3.2	杆的纵向小振动	155
9.3.3	真空中的电磁波	155
9.3.4	一维波动方程的通解	156
9.4	热传导方程和波动方程的修正	158
9.4.1	热传导方程的弛豫时间修正	158
9.4.2	波动方程的阻尼修正	159
9.4.3	波动方程的色散修正	160
9.4.4	热源和波源的修正	161
9.5	第 9 章习题	162
10	分离变量法和諧函数概述	165
10.1	零边界条件和諧函数	166
10.1.1	零边界条件下的实对称算符 ∇^2	166
10.1.2	諧函数: 零边界条件下 ∇^2 的本征函数	168
10.2	諧函数展开系数的通解	169
10.2.1	泊松方程的諧函数展开系数	170
10.2.2	热传导方程的諧函数展开系数	170
10.2.3	波动方程的諧函数展开系数	171
10.3	諧函数求解概述	173
10.3.1	一维直角坐标系	173
10.3.2	高维直角坐标系的諧函数	178
10.4	第 10 章习题	182

11 正交曲面坐标系中的谐函数	185
11.1 极坐标系的谐函数	187
11.2 柱函数的性质	189
11.2.1 柱函数的递推公式	191
11.2.2 两类贝塞尔函数在零附近的渐近行为	192
11.2.3 朗斯基 (Wronskian) 行列式	194
11.2.4 两类贝塞尔函数的大致图像	197
11.2.5 第一类贝塞尔函数的三个正交定理	197
11.2.6 整数阶第一类贝塞尔函数的特殊性质	201
11.3 极坐标系的数理方程	204
11.4 柱坐标系的谐函数和数理方程	218
11.5 球面谐函数	220
11.5.1 边界消失的后果	220
11.5.2 单位球面上的谐函数	220
11.5.3 球面谐函数的对称性	224
11.6 勒让德多项式	228
11.7 球坐标系的谐函数和数理方程	235
11.8 第 11 章习题	242
12 非零边界条件和格林函数方法	249
12.1 非零边界条件的泊松方程问题	249
12.1.1 取 $k \rightarrow 0^+$ 极限的方法	249
12.1.2 取虚宗量方法	251
12.1.3 非齐次边界条件泊松方程求解举例	253
12.2 非零边界条件的波动方程问题	259
12.3 格林函数 (Green's Function)	262
12.3.1 泊松方程的格林函数	263
12.3.2 热传导方程格林函数 I (瞬时点源)	263
12.3.3 热传导方程格林函数 II (持续点源)	265
12.3.4 Helmholtz 方程的格林函数	267
12.3.5 一维波动方程的格林函数	268
12.3.6 二维波动方程的格林函数	269
12.3.7 三维波动方程的格林函数	272

12.4	无界区域方法总结：积分变换和格林函数	274
12.5	第 12 章习题	276
13	后记	279
13.1	二阶微分方程的级数解法	279
13.1.1	贝塞尔方程	280
13.1.2	一维谐振子的能级	281
13.1.3	氢原子的能级	282
13.2	正交定理的一些推广	283
13.3	临别赠题	284
	Bibliography	287

序

在网络购书的年代，很容易找到大量的《数学物理方法》的教材。其中比较经典的，经过大量教学实践检验的，有“吴版” [1] 和“梁版” [2]。

对本科低年级基础的学生而言，“吴版”和“梁版”的内容详尽丰富，需要花大量的时间才能掌握。在很多高校中，物理专业的《数学物理方法》仅是一门 3 至 4 学分的课程，这就给讲授“吴版”或者“梁版”提出了挑战。用较少的时间讲授《数学物理方法》一般有两种做法：一是删减一些比较难的内容（例如球谐函数、第二类贝塞尔函数等）；二是牺牲一些数学严谨性，把很多定理以几何/物理解释（而非严格证明）的方式给出。在中山大学任教期间，我一直采取第二种方式进行教学。对数学基础非常扎实、非常喜欢追求数学严谨性的同学而言，这种教学方式不一定是最佳的，他们往往需要再花相当多的时间去从参考文献中寻找（或者自己给出）严谨的证明。不过，对物理专业的绝大多数学生而言，直观性比逻辑严密性更加重要，因此比较欢迎我这种讲法。

这本书基于我的课件，很多定理的几何或者物理解释都是原创性的。内容和“吴版”、“梁版”相比，稍有删减，但对物理专业比较重要的，例如球谐函数的对称性等内容，反而有所加强。对物理专业的学生，本书可以直接作为教材进行讲授（适合 3-5 学分的课程）。对数学专业的学生而言，这本书的数学严谨性有所欠缺。不过即使如此，数学研究中也非常需要几何直觉的辅助。这本书可以作为一本很好的参考读物。

在写作过程中，中山大学物理与天文学院 2019 级的石寰宇同学、2020 级的强基班同学们作为本书的第一批读者，对本书内容提出了很多宝贵意见，尤其石寰宇同学和我关于贝塞尔函数积分的讨论为本书第 11 章的习题提供了很多有趣的素材，在此一并感谢。

复变函数

1	复变函数和欧拉公式	15
1.1	从实变函数到复变函数	
1.2	欧拉公式和复数的指数表示	
1.3	对数函数和复数次幂	
1.4	第 1 章习题	
2	解析函数和柯西定理	21
2.1	复变函数的导数	
2.2	复变函数的原函数	
2.3	解析函数	
2.4	柯西定理和柯西积分公式	
2.5	第 2 章习题	
3	洛朗展开和留数定理	37
3.1	泰勒展开和洛朗展开	
3.2	留数定理	
3.3	留数定理的应用	
3.4	第 3 章习题	
4	解析延拓和 Gamma 函数	59
4.1	解析函数的邻域近似	
4.2	Gamma 函数	
4.3	第 4 章习题	

内容概要

复变函数，顾名思义，就是以复数为变量的函数。由于复数满足和实数完全相同的四则运算规则，可以用四则运算表示出来的实变函数都可以直接推广到复变函数。利用指数函数的泰勒级数展开，也可以把指数函数推广到复变函数。比较麻烦的是指数函数的反函数——对数函数。通过应用欧拉公式，我们发现复变量意义下的指数函数映射是“多对一”的映射，因此并不存在普通意义上的反函数。为了解决这个问题，我们引入“多值函数”的概念，定义了复变量指数函数的反函数，实际上就是把指数函数的所有反映射解作为多值函数的计算结果。实变量对数函数是单值函数，复变量对数函数是多值函数，这一看起来似乎并不重要的区别，其实是复变函数理论的核心。

我们在物理问题中感兴趣的绝大多数函数，都可以展开为 z^n (n 为整数) 的线性组合，这种展开称为洛朗展开。然后函数的积分、求导等运算都归结为对 z^n 的积分、求导。我们特别感兴趣的是沿着闭合围道的积分，其实就是终点和起点重合的积分。这时候，除了 z^{-1} 的原函数是多值函数 $\ln z$ 以外，其他 z^n 都存在单值的原函数 $\frac{z^{n+1}}{n+1}$ 。因为起点和终点相同，单值的原函数在终点与起点的函数值之差（也就是沿着闭合围道的“定积分”的结果）总是零，所以问题就归结为如何计算 $\ln z$ 沿着围道走一圈后函数值的变化。由此即引出了柯西积分公式、留数定理等。

1. 复变函数和欧拉公式

1.1 从实变函数到复变函数

说起欧拉公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (1.1)$$

可能很多读者已经比较熟悉了。在很多科普读物中，对这一精妙绝伦的公式大加赞誉。但是，如果你在接触欧拉公式之前并未对 $e^{i\theta}$ 做过合适的定义，那么你所理解的欧拉公式恐怕还只停留在科普层面。我们可以做一个我们熟悉的 e^θ (θ 为实数) 和我们不熟悉的 $e^{i\theta}$ 的类比，然后就说服自己已经 (差不多) 掌握 $e^{i\theta}$ 的概念了。对我们物理专业的学生或者研究者而言，这种科普层面的类比经常有助于我们消除对新知识的恐惧感，但我们通常需要花多得多的力气来真正给出 $e^{i\theta}$ 的清晰定义。

当然，你也可以把欧拉公式当作 $e^{i\theta}$ 的定义。不过，这样你就很难解释清楚为什么欧拉公式是一个了不起的公式。

所以我们决定采用另一条途径：先给出一个 $e^{i\theta}$ 的不依赖于欧拉公式的“合理”定义。然后证明欧拉公式成立。

我们很清楚地知道如何把实变函数 $f(x) = x^2$ 推广到复变函数 $f(z) = z^2$ 。这个推广的“合理”性是不言自明的 (我希望至少对物理专业的同学们而言如此；对数学专业的同学们而言，可能还需要给“合理”这个词一个清晰的定义)。事实上，因为复数满足和实数完全一样的 (加减乘除) 四则运算法则，对只涉及四则运算就能定义的函数，我们可以直接把定义域从实数集扩展到复数集——当然，要除去那

些让分母为零的点。比如，把整个实数轴上有定义的实变函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 推广到复变函数 $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ 时，定义域并不是整个复平面，而是要刨去 $z = \pm i$ 这两个点。

现在的任务是把实变函数 e^x “合理”地推广为复变函数。虽然 e^x 并不能简单地用四则运算定义，但是我们可以用四则运算表示出来函数无限逼近 e^x ：

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \quad (1.2)$$

于是，我们把复变函数

$$e^z \equiv 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \quad (1.3)$$

作为实变函数 e^x 的推广。定义式(1.3)右边的级数和在复平面上处处收敛，因此它作为一个合法的定义并没有什么问题。不过，仅仅基于(1.2)和(1.3)的相似性而断言推广的“合理”性仍稍显苍白，我们必须验证指数函数最基本的性质——

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}. \quad (1.4)$$

如果上式不成立，你恐怕很难接受把这样的函数称为指数函数。好在，从定义(1.3)出发很容易就可以得到等式(1.4)，具体过程如下：

按照 e^z 的定义，所求证的等式(1.4)等价于

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = \sum_{n_1, n_2 \geq 0} \frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2}}{n_1! n_2!} \quad (1.5)$$

对任意 $n_1, n_2 \geq 0$ ，我们来比较两边 $z_1^{n_1} z_2^{n_2}$ 的项的系数：

左边 $z_1^{n_1} z_2^{n_2}$ 的项只能来自于 $n = n_1 + n_2$ 的项的展开，在展开 $(z_1 + z_2)^n$ 时在 n_1 个括号内取 z_1 ， n_2 个括号内取 z_2 ，总共有 $\frac{n!}{n_1! n_2!}$ 种取法，即左边 $z_1^{n_1} z_2^{n_2}$ 的系数为

$$\frac{1}{n!} \frac{n!}{n_1! n_2!} = \frac{1}{n_1! n_2!} \quad (1.6)$$

和右边相同。由 n_1, n_2 的任意性即得证。

(实际上，一个严谨的证明还需要补充说明上述双重级数和的收敛性。这个比较容易，就留给读者作为练习了。)

1.2 欧拉公式和复数的指数表示

上一节我们给出了复变量指数函数的“合理”定义，下面我们来导出欧拉公式。

对实数 θ ，按定义(1.3)，有

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \theta^n}{n!}. \quad (1.7)$$

上式右边 n 为偶数的项是实数项， n 为奇数的项是虚数项。分离实虚部即得：

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (1.8)$$

实部和虚部恰好分别是三角函数 $\cos \theta$ 和 $\sin \theta$ 的级数展开式，于是就得到了欧拉公式(1.1)。

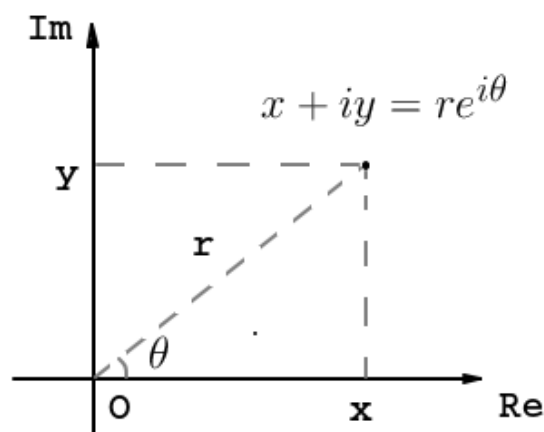


Figure 1.1: 复数 $x + iy$ 可以写为 $re^{i\theta}$ ，这里的 r 是模， θ 是幅角

在学习欧拉公式之前，我们习惯于在二维复平面的直角坐标系中把复数可视化。现在，我们可以尝试用极坐标系。请参考图 1.1，利用极坐标和直角坐标的关系，以及欧拉公式，可以得到复数的指数表示：

$$x + iy = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}. \quad (1.9)$$

这里 $x = \operatorname{Re} z$ ， $y = \operatorname{Im} z$ 分别是 z 的实部和虚部； $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 是复数 $z = x + iy$ 的模，我们通常写作 $r = |z|$ ； θ 是复数 $z = x + iy$ 幅角，我们通常写作 $\theta = \operatorname{arg} z$ 。注意幅角不是唯一的，它可以加上 2π 的任意整数倍。有时候为了确定起见，我们会规定一个范围，并把落在这个范围内的幅角称为幅角主值，记作 $\operatorname{Arg} z$ 。常见的定义幅角主值的范围有 $[0, 2\pi)$ 和 $(-\pi, \pi]$ 。我们在之后会看到，这种人为的选择在大多数时候并没有什么用处，最合适的方法是用“动态”的观点来看待幅角。因为我们研究的是复变函数的微积分（连续变化），我们一开始可以在任意范围内取复数的幅角，然后当复数连续变动时，让幅角也连续地变化（也就是说，你不能心血来潮突然就给幅角加个 2π ）。

注意：复数零的幅角没有确定的意义。也就是说 $\operatorname{arg} 0$ 是不合法的表达式。

通过一些基本的练习，你很容易掌握一些关于复数的常识：

1. 当 n 是奇数， $e^{n\pi i} = -1$ ；当 n 是偶数， $e^{n\pi i} = 1$ ；
2. $e^{\pm \frac{\pi}{2}i} = \pm i$

3. 当 θ 是实数时, $e^{i\theta}$ 的共轭复数是 $e^{-i\theta}$ 。且两者都在方程 $|z| = 1$ 所确定的单位圆上。两者也互为倒数。
4. 如果 n 为正整数, 则方程 $z^n = 1$ 有 n 个解: $z = e^{\frac{2k\pi}{n}i}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$), 这些解均匀地分布在单位圆周 $|z| = 1$ 上。
5. 如果 n 为正整数, 则方程 $1 + z^n = 0$ 有 n 个解: $z = e^{\frac{(2k+1)\pi}{n}i}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$), 这些解均匀地分布在单位圆周 $|z| = 1$ 上。

1.3 对数函数和复数次幂

有了复变量的指数函数之后, 我们可以很轻松地完成三角函数和双曲函数的复变量推广, 例如

$$\cos z \equiv \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \quad (1.10)$$

$$\sin z \equiv \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \quad (1.11)$$

$$\cosh z \equiv \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad (1.12)$$

$$\sinh z \equiv \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad (1.13)$$

这样, 欧拉公式(1.1)实际上对任意复数 θ 成立。另外, 不难根据定义以及欧拉公式直接验证, $\sin z = 0$ 的解仍然只有 $z = n\pi$, ($n \in \mathbb{Z}$); $\cos z = 0$ 的解仍然只有 $z = (n + \frac{1}{2})\pi$, ($n \in \mathbb{Z}$)。

设 $z = re^{i\theta} \neq 0$, 我们可以写出

$$e^{\ln|z| + i\arg z} = e^{\ln r + i\theta} = e^{\ln r} e^{i\theta} = re^{i\theta} = z. \quad (1.14)$$

从而容易想到这样定义对数函数

$$\ln z := \ln|z| + i\arg z. \quad (z \neq 0) \quad (1.15)$$

注意, 定义式(1.15)左边的 \ln 表示(需要定义的)复变对数函数, 右边的 \ln 是(已经有明确定义的)正实变量对数函数。我们之前接触到复变量指数函数、复变量正弦函数等, 都沿用了和实变量函数相同的符号。复变量的对数函数沿用相同的符号 \ln 似乎无可非议, 但事实上这样会导致一些麻烦: 由于 $\arg z$ 可以加上 2π 的任意整数倍, 式(1.15)定义的 $\ln z$ 可以随意加上 $2\pi i$ 的整数倍。所以复变量的 \ln 不是严格意义上的函数——我们称之为多值函数。那么, 和指数函数、正弦函数这些函数不同, 正实变量的 \ln 不能看作复变量的 \ln 的特殊情况。例如, 在正实数变量的对数函数意义下: $\ln 1 = 0$; 而在复变量对数函数的意义下: $\ln 1 = 2n\pi i$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)。如果我们不区分复变量 \ln 和正实变量的 \ln , 就会产生很大的问题。

很容易想到，既然如此，那么把复变量的对数函数换个符号吧，就像有些教材中采用的那样，把复变量的对数函数写作 Ln 。另外一种解决方案——也是我们将采用的解决方案，是做一些默认约定，并在默认约定不能清晰适用的情况下额外补充说明。我们的默认约定是：

当 \ln 的作用对象（正式的名字叫函数的宗量）是正实数或者是恒为正实数的表达式时，约定 \ln 是正实变量对数函数（也就是你的计算器上的那个 \ln ），否则 \ln 就是（定义式(1.15)左边的）复变量对数函数。

在极少数的情况下，会出现很难判断 \ln 的宗量是否恒为正实数，或者你不想遵守默认约定的情形，这时候只需要补充说明 \ln 的意义就行了。

你可能会有些困惑，为什么一向推崇清晰简明的我会选择一种看起来有些麻烦的人为约定的方案，直接复变量对数函数用 Ln 不就好了？

我是“约定派”成员而非“ Ln 派”成员，是因为还需要考虑另一种表达式 z^α (z, α 均为复数， $z \neq 0$) 的涵义，它的定义是：

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z}. \quad (1.16)$$

作为“约定派”成员，我在写下(1.16)之后就没有其他什么要说的了。

如果你是 Ln 派的，灵魂拷问立刻来了：定义式(1.16)右边到底该用 \ln 还是 Ln 。你说该用 Ln 吗？好的，那么

$$\sqrt{2} = 2^{1/2} \stackrel{?}{=} e^{\frac{1}{2} \text{Ln} 2} = e^{\frac{1}{2}(\ln 2 + 2n\pi i)} = \sqrt{2} e^{n\pi i} = \pm \sqrt{2}. \quad (1.17)$$

(像 $\sqrt{2}$ 或者 $2^{1/2}$ 这种表达式的涵义早已经深入人心，不是你随便扔出个 Ln 就能改变的。)

如果这还不足以让你动摇，请再看一个例子：

$$e^{1/3} \stackrel{?}{=} e^{\frac{1}{3} \text{Ln} e} = e^{\frac{1}{3}(1 + 2n\pi i)} = e^{1/3} e^{\frac{2}{3}n\pi i}. \quad (1.18)$$

这次连我们觉得万分稳妥的指数函数的写法都出现危机了！好吧，你放弃了，你决定改变说法：当 z 是正实数时，定义式(1.16)用 \ln 没错，否则要用 Ln 。等等，我怎么觉得你其实已经是“约定派”的呢了？

思考题：当 n 是整数时，按照我们的约定 $z^n = e^{n \ln z}$ ，会导致 z^n 是多值函数吗？

1.4 第1章习题

习题 1: 明确地写出 i^i 的所有可能取值。

习题 2: 计算 $(1+i)^{20}$ 的值。

习题 3: 满足 $|z| + |z - 3| = 5$ 的所有复数 z 在复平面上的轨迹是什么?

习题 4: 满足 $|z - 1| = 2|z + 2i|$ 的所有复数在复平面上的轨迹是什么?

习题 5: 满足 $\operatorname{Re}(z) = |z - 1|$ 的所有复数 z 在复平面上的轨迹是什么。这里 $\operatorname{Re} z$ 表示 z 的实部。

习题 6: 写出方程 $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ 的所有复数解。

习题 7: z_1, z_2, z_3, z_4 是四个互不相同的复数, 且

$$\frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_4 - z_1)}$$

为实数。证明: z_1, z_2, z_3, z_4 在复平面上对应的四个点共线或者共圆。

习题 8: 一个内接于半径为 1 的圆的正 314 边形, 从它一个顶点可以引出 311 条对角线。计算这些对角线的长度的乘积。

习题 9: 计算复变函数 $f(z) = |z|^4 + (3 + |3 + z|)^4$ 的最小可能值。

习题 10: 对正整数 n 定义

$$f(n) = \sum_{k=1}^n \tan^2 \frac{k\pi}{2n+1}$$

计算无穷级数和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}.$$

2. 解析函数和柯西定理

2.1 复变函数的导数

2.1.1 初等函数的导函数

复变函数的导函数的定义和实变函数的导函数没什么差别：

$$f'(z) \equiv \frac{df}{dz} \equiv \lim_{|\Delta z| \rightarrow 0^+} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}. \quad (2.1)$$

用通俗的话来说就是：导函数（如果存在）是函数值的微小变化和自变量的微小变化之比。

我们已经熟悉了一系列实变函数的求导法则，例如 $f(x) = x^2$ 的导函数为 $f'(x) = 2x$ 。具体的推导过程如下：

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x. \quad (2.2)$$

如果把(2.2)中的 x 换成复变量 z ，就可以得到复变函数 $f(z) = z^2$ 的导函数为 $2z$ 。其实，由于复数遵循和实数完全相同的加减乘除法，任何只涉及有限次四则运算的复变函数的求导法则和实变函数完全相同。在很多情况下，“有限次”这个约束也可以去掉。例如 e^z 的导函数

$$\frac{d}{dz} e^z = \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z, \quad (2.3)$$

这里交换求和与求导的次序，当然是安全的（因为级数很好的收敛性）。用同样的方法你可以得到 $\frac{d}{dz} \sin z = \cos z$, $\frac{d}{dz} \cos z = -\sin z$ 这些“无聊”的结果。

下面，我们来处理“爱惹麻烦”的多值函数 $\ln z$ 。

当 $z = re^{i\theta}$ 沿复平面上的一条 (不经过原点的) 曲线连续变化时，我们让幅角 θ 也连续地变化 (即不允许突然心血来潮加个 2π 什么的)，这样 $\ln z = \ln r + i\theta$ 也连续地发生变化。在这个意义下可以定义 $\ln z$ 的导数：

$$\frac{d \ln z}{dz} = \frac{d \ln r + i d\theta}{e^{i\theta} dr + i r e^{i\theta} d\theta} = \frac{\frac{dr}{r} + i d\theta}{e^{i\theta} dr + i r e^{i\theta} d\theta} = \frac{1}{r e^{i\theta}} = \frac{1}{z}. \quad (2.4)$$

结果想必在你的意料之中吧！

按照定义(2.1)，求导的链式法则显然也是成立的。我们已经学会了把 z^α 写成 $e^{\alpha \ln z}$ ，这样在规定 z 的幅角连续变化的情况下，它的导函数是：

$$\frac{d}{dz} z^\alpha = \frac{d}{dz} e^{\alpha \ln z} = \alpha \frac{1}{z} e^{\alpha \ln z} = \alpha z^{\alpha-1}. \quad (2.5)$$

注意，上式的最后一步写法只是为了让你和实函数的求导法则进行对比，但这样写没有指明左右两边多值函数该如何取值，很容易引起混淆。我更喜欢把结果写成 $\frac{d}{dz} z^\alpha = \frac{\alpha}{z} z^\alpha$ ，以强调左右两边的多值函数 z^α 必须取相同的值。

2.1.2 复变函数的可导性：柯西-黎曼方程

至此我们掌握了具有初等表达式的复变函数的求导法则。不过，一旦函数不以初等表达式的形式出现，它是否可导就成了一个问题。

在实函数的情况下，只要函数图像是光滑的，函数就可导。也就是说，让我四岁的儿子在纸上随便画个实函数图像，像图2.1那样，它多半是几乎处处可导的。

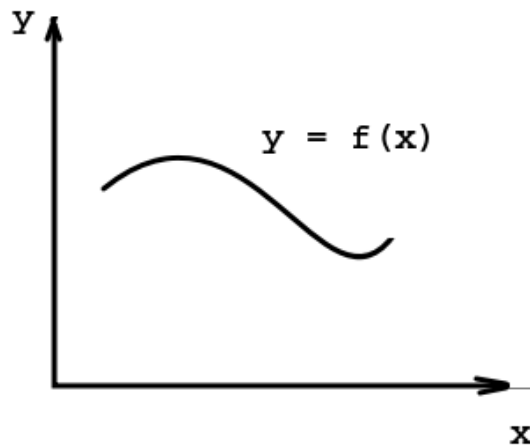


Figure 2.1: 随手画的一个实函数图像几乎处处可导

但在复变函数的情况下，因为 Δz 可以取任意幅角，可导是要苛刻得多的条件。

复变函数的图像可以这样“随手画出来”。我给我儿子一支蘸满墨水的毛笔，让他在一张标记好 x - y 直角坐标系的纸上刷一下。颜色的深浅代表函数值的大小。

这样就可以得到一个随意刷出来的二元实函数 $u(x,y)$ 。然后再随意刷一个二元实函数 $v(x,y)$ ，任务就完成了：复变函数 f 由 $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ 定义。

如果要求 f 在 $z = x + iy$ 处可导，(2.1)中的 Δz 可以取任何幅角这个“高难度要求”可以这样来体现：我先取 $\Delta z = \varepsilon$ (ε 是实数)，再取 $\Delta z = i\varepsilon$ ，分别按照(2.1)计算 $f'(z)$ ，两种方式得到的答案应该是一样的。在第一种 $\Delta z = \varepsilon$ 情况：

$$f'(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u(x+\varepsilon, y) - u(x, y) + i(v(x+\varepsilon, y) - v(x, y))}{\varepsilon} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.6)$$

在第二种 $\Delta z = i\varepsilon$ 的情况：

$$f'(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u(x, y+\varepsilon) - u(x, y) + i(v(x, y+\varepsilon) - v(x, y))}{i\varepsilon} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.7)$$

这两种结果要相等，下列柯西-黎曼方程(简称为 CR 条件)必须成立：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.8)$$

如果 u, v 都可以在 (x, y) 附近写成全微分，那么 CR 条件就成为可导的充分必要条件。充分性证明如下：令 $dz = dx + idy$ ，那么

$$\begin{aligned} df &= du + idv \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) idy \\ &= f'(z) dz \end{aligned} \quad (2.9)$$

这里导函数

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.10)$$

的存在性直接由 CR 条件(2.8)给出。

思考题：设函数 $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ (这里 x, y, u, v 均为实变量) 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处可导且导数不为零，证明在 x - y 平面上，曲线 $u(x,y) = u(x_0, y_0)$ 和曲线 $v(x,y) = v(x_0, y_0)$ 正交，也就是说，在 (x_0, y_0) 处作两条曲线的切线，两条切线一定互相垂直。

提示：考虑从 z_0 出发，沿着两条曲线令 z 分别变化 $dz_1 = \frac{du}{f'(z_0)}$ 和 $dz_2 = \frac{idv}{f'(z_0)}$ ，容易看出 dz_2 幅角比 dz_1 多 $\frac{\pi}{2}$ 。

显然，你很难期待我儿子随手刷出来的两个二元函数 u, v 能够满足 CR 条件。也就是说，随手画出来的复变函数一般是处处不可导的。其实，当我儿子随手刷完

第一张图，给出了 $u(x,y)$ 后，即使让专业的数学家来设计 $v(x,y)$ ，可能也无法让 $u(x,y) + iv(x,y)$ 可导。这是因为，假设 u, v 二阶可导且偏导数连续，联立两个 CR 条件，可以得出：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0. \quad (2.11)$$

满足(2.11)的函数 u 称为调和函数。同样可以证明 v 也满足一样的条件。也就是说：可导的复变函数的实部、虚部一般都是调和函数。而我儿子随手一画，显然不太可能就画出个调和函数，所以在他画完第一张图时，失败已经不可避免了。

聊完了我儿子的画，我们回头来看一些更实际的计算技巧。利用 CR 条件，可以把(2.10)写成一个更有用的形式：

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.12)$$

也就是说，只要知道了实部 $u(x,y)$ 或者虚部 $v(x,y)$ 的表达式，我们就能求出 $f'(z)$ 。根据需要，还可以积分得到 $f(z)$ （但会有个积分常数无法确定）。

例题 1: 设某个解析函数 $f(x+iy)$ （这里 x, y 为任意实数）的虚部为

$$v(x+iy) = y^3 - 3x^2y$$

求 $f(x+iy)$ 的实部 $u(x,y)$ 的表达式。

解答: 令 $z = x + iy$ ，根据(2.12)，有

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 3y^2 - 3x^2 - 6xyi = -3z^2$$

所以 $f(z) = -z^3 + C$ ，其实部为

$$u(x,y) = -x^3 + 3xy^2 + C$$

C 是（实的）积分常数。

思考题: 在上面的例题中，如果你没能一眼看出 $3y^2 - 3x^2 - 6xyi = -3z^2$ ，该如何计算 $u(x,y)$ 呢？

看起来我们有了一个很好用的工具来判断一个复变函数是否可导，以及计算可导复变函数的实虚部等。不过，坦白地说，我不太喜欢这一小节的内容。我研究复变函数的原因是复数把两个变量 x, y 变成一个变量 z 来表述，更加简洁优美。把复数重新拆分为实部和虚部分开来研究，就和研究多元实函数没有什么本质差别了。

2.1.3 复变函数的可导性：其他判断方法

我们先用 CR 条件来判断一个函数 $f(z) = |z|^2$ ，即 $f(x+iy) = x^2 + y^2$ 是否可导。这里 $u(x,y) = x^2 + y^2$ ， $v(x,y) = 0$ ，因此 CR 条件(2.8)等价于： $2x = 0$ 以及 $2y = 0$ 。也就是说， $|z|^2$ 仅有可能在 $z = 0$ 处可导。实际上，由于 u, v 都可以写成全微分形式，所以 CR 条件也是充分条件。函数 $f(z) = |z|^2$ 确实在 $z = 0$ 处可导，导数 $f'(0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} |_{x=y=0} = 0$ 。

CR 条件只是导数存在的定义(2.1)的一个简单应用。在很多情况下，直接用(2.1)来思考更加容易判断一个函数是否可导。例如，我们可以直接断言 $f(z) = |z|$ 在全复平面都不可导。这是因为在(2.1)中，当我们固定 dz 的模，让 dz 的幅角变化时， $d(|z|)$ (即 $|z|$ 的改变量) 取遍 $-|dz|$ 到 $|dz|$ 之间的所有实数¹：两者之比 $\frac{d|z|}{dz}$ (实数和幅角任意取的复数之比) 显然无法趋向于一个常数，所以 $|z|$ 处处不可导。除了这个结果之外，我们还注意到 $\frac{d|z|}{dz}$ 虽然不趋向于一个常数，但它的范围是有限的。

再回顾下刚才讨论的 $|z|^2$ 的可导性，我们现在可以直接由

$$\frac{d}{dz} (|z|^2) = 2|z| \frac{d|z|}{dz}, \quad (2.13)$$

看出，如果 $|z| \neq 0$ ，那么因为 $\frac{d|z|}{dz}$ 不趋向于一个常数， $2|z| \frac{d|z|}{dz}$ 也不趋向于一个常数，所以 $|z|^2$ 不可导；如果 $|z| = 0$ ，由于 $\frac{d|z|}{dz}$ 范围有限，所以 $2|z| \frac{d|z|}{dz} = 0$ ，即 $|z|^2$ 在 $z = 0$ 处可导且导数为零。

思考题：请用上面的方法讨论 $\sin |z|$ 的可导性。

幅角主值 $\text{Arg}z$ ，取实部函数 $\text{Re}z$ ，取虚部函数 $\text{Im}z$ 等也可以用上面处理 $|z|$ 的方式来讨论。

复数的实部、虚部可以分别写成 z 和它共轭复数 z^* 的组合

$$\text{Re}z = \frac{z+z^*}{2}, \quad \text{Im}z = \frac{z-z^*}{2i} \quad (2.14)$$

如果 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 都能写成 x,y 的初等表达式，那么 $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ 就能写成 z 和 z^* 的初等表达式。我们已经知道，如果函数能写成仅仅依赖于 z 的初等表达式，那么函数就可以按照我们习惯的求导法则求导。如果函数依赖于 z^* ，那么函数一般就不可导。不过，这并不绝对。例如： $f(z) = |z|^2 = zz^*$ 有一个特殊的 $z = 0$ 点可导。为了更精确地进行判断，我们采取一种技术上很常见，但可能让你有点不习惯的操作：把 z, z^* 形式上看成完全独立的变量 (即假装不知道它们的实部相同，虚部之和为零这些约束条件)，然后对 z^* 求偏导。如果偏导不为零，则说明

¹这很容易通过画图理解，也可以从复数的三角不等式 $-|dz| \leq |z+dz| - |z| \leq |dz|$ 得到。

函数“真正地依赖于” z^* ，函数就是不可导的²。如果偏导为零，则在一阶近似的意义下， z^* 可以看成是一个常数，函数成为只依赖于 z 的初等表达式，通常就可导了。

我们来看一个具体的例子： $f(z) = z \sin(z^*)$ ，它当且仅当 $z \cos(z^*) = 0$ 时可导，也就是 $z = 0$ 或者 $z = (n + \frac{1}{2})\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) 时可导。

2.2 复变函数的原函数

至此，我们对复变函数求导的讨论就结束了。下一步自然是要研究复变函数的积分。和实函数的积分不同，复变函数的积分必须在复平面上一条指定的路径上进行。当 z 沿着一条(带方向的)分段光滑曲线 C 连续变化时， z 的变化量 dz 和 $f(z)$ 的乘积之和(当 $|dz|$ 趋向于零时)的极限可以写成积分：

$$\int_C f(z) dz \equiv \lim_{dz \rightarrow 0} \sum_{z \in C} f(z) dz. \quad (2.15)$$

当然，上述极限的存在性是一个麻烦。为了避免不必要的(和物理也没什么关系的)讨论，我们只考虑由有限段光滑曲线组成的积分路径上的连续函数的积分，这样上面极限的存在就不是问题了。

显然，如果把沿着曲线积分的方向改成相反，则积分结果相差个负号。

模仿实变函数的定积分技巧：如果能找到一个函数 $F(z)$ 使得它的导数为 $f(z)$ ，即 $f(z) dz = dF(z)$ ，那么 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分就只要计算从起点到终点 $F(z)$ 的总改变量就可以了。设积分路径 C 的起点为 a ，终点为 b ，则

$$\int_C f(z) dz = \int_C dF(z) = F(b) - F(a). \quad (2.16)$$

和实函数的积分类似， $F(z)$ 称为 $f(z)$ 的**原函数**，并可以像实函数那样抽象地写成不定积分的形式：

$$\int f(z) dz = F(z) + c \quad (2.17)$$

这里 c 是积分常数。

很多实函数中熟悉的公式和技巧都可以照搬到复变函数中：

$$\int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + c, \quad (n \in \mathbb{Z}, n \neq -1) \quad (2.18)$$

$$\int e^z dz = e^z + c, \quad (2.19)$$

$$\int \cos z dz = \sin z + c, \quad (2.20)$$

$$\int \sin z dz = -\cos z + c, \quad (2.21)$$

²如果你喜欢更加严谨地说明这件事情，你可以考虑让 z 的实部改变 dx ，就得到 $f'(z) = \frac{df}{dz} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z} dx + \frac{\partial f}{\partial z^*} dx}{dx} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z^*}$ ；然后考虑让 z 的虚部改变 dy ，则 $f'(z) = \frac{df}{dz} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z} (idy) + \frac{\partial f}{\partial z^*} (-idy)}{idy} = \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z^*}$ 。由导数唯一性即知道 $\frac{\partial f}{\partial z^*}$ 必须为零。

你也可以用分部积分等各种技巧计算初等函数的原函数。

如果存在单值的原函数，则函数沿着闭合围道的积分等于零。这是因为积分的起点和终点重合 ((2.16)中 $b = a$)。但是，当复变函数的原函数是多值函数时，情况就不一样了。例如

$$\int \frac{1}{z} dz = \ln z + c. \quad (2.22)$$

在这个例子里，由于需要遵循幅角连续变化的约定，当我们计算定积分时，(2.16)右边的 $F(b) - F(a)$ ，也就是 $\ln b - \ln a$ 就不只是和起点与终点有关了（注意 $\ln z$ 是多值函数，所以 $\ln b - \ln a$ 并不是看起来那样是个确定无疑的数）。

我们来看一个比较有代表性的例子。

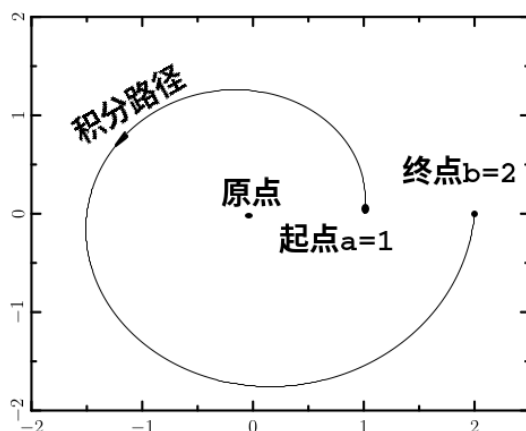


Figure 2.2: 把 $\frac{1}{z}$ 按所示路径积分，结果是 $\ln(2e^{2\pi i}) - \ln 1 = \ln 2 + 2\pi i$

如图 2.2 所示，把 $\frac{1}{z}$ 按所示路径积分，结果是 $\ln(2e^{2\pi i}) - \ln 1 = \ln 2 + 2\pi i$ 。这和沿着实轴积分 $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2$ 结果不同。

如果把终点挪到和起点相同，也就是把 $\frac{1}{z}$ 沿着逆时针围绕原点一周的闭合围道积分，则结果是 $\ln z|_a^{ae^{2\pi i}} = 2\pi i$ ，这里 a 是闭合围道上的任意一个点（选为起点，同时也是终点）。或者进一步推广，有如下的结论：

负一次幂函数 $\frac{1}{z-z_0}$ 沿着逆时针围绕 z_0 一周的闭合围道积分，结果是 $2\pi i$ 。如果是顺时针围绕 z_0 一周的闭合围道，则积分结果是 $-2\pi i$ 。如果闭合围道不包围 z_0 ，则积分结果是零。

对其他所有的幂函数 $(z-z_0)^n$ ($n \neq -1$) 而言，原函数 $\frac{(z-z_0)^{n+1}}{n+1}$ 都是单值函数，所以沿任意闭合围道（无论是否包围 z_0 ）的积分均为零。

这就引出了一个很有意思的情况：如果我们能把一个很难计算原函数的复变函数写成幂函数的线性组合：

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad (2.23)$$

那么 $f(z)$ 沿着逆时针围绕 z_0 一周的闭合围道积分，结果是 $2\pi ia_{-1}$ 。如果是顺时针围绕 z_0 一周的闭合围道，则积分结果是 $-2\pi ia_{-1}$ 。如果闭合围道不包围 z_0 ，则积分结果是零。这实际上就是我们最后要给出的留数定理。留数定理的威力在于，即使你不会计算原函数，只要你能得到形如(2.23)的展开（之后我们会把这种展开叫做洛朗展开）的负一次项的系数（我们之后会把它叫做 $f(z)$ 在 z_0 处的留数），你也能计算出 $f(z)$ 在闭合围道上的积分。

今后，我们将采用特殊的积分符号 $\oint f(z) dz$ 来表示沿着闭合围道的积分。复变函数积分的核心内容，就是讨论这种在实函数中没有出现过的（不易计算原函数，但能通过洛朗展开计算）的积分。那么，什么样的函数在什么样的区域内能够进行洛朗展开呢？怎样计算洛朗展开的负一次幂系数？为了解答这一系列问题，我们需要从一个重要的概念“解析函数”出发。

2.3 解析函数

2.3.1 解析函数

设 S 为复平面上的非空点集，在图2.3的标注中我们用正规的数学语言定义了点集的内部、外部和边界。

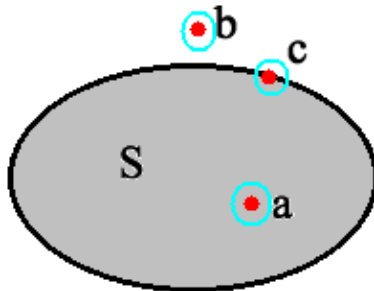


Figure 2.3: 内部的点 a : 可取足够小的 δ , 使邻域 $\{z: |z-a| < \delta\}$ 完全在 S 之内; 外部的点 b : 可取足够小的 δ , 使邻域 $\{z: |z-b| < \delta\}$ 完全在 S 之外; 边界的点 c : 无论取多小的 δ , 邻域 $\{z: |z-c| < \delta\}$ 总是部分在 S 内, 部分在 S 外。

如果点集 S 只包含内部的点，则称 S 为开区域。例如：环形区域 $z: 1 < |z| < 2$ 是开区域。如果点集 S 包含所有边界上的点，则称 S 为闭区域。例如 $z: 1 \leq |z| \leq 2$ 是闭区域，

如图2.4所示，复平面上的非空点集的边界的正向是用“左内原则”定义的：当你沿着点集的边界的正方向移动，点集内部的点总在你的左手边。

为了避免没有必要的（通常也和物理没有什么关系的）麻烦，在本书中我们默认只研究这样的区域：它的边界由有限段光滑的曲线组成。在不加以额外说明的情况下，我们都默认沿着边界的积分是沿着边界正向进行的。

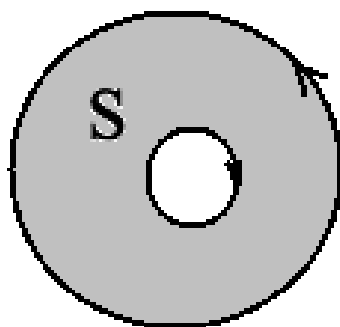


Figure 2.4: 假想你沿着边界的正方向移动，内部的点总在你的左手边。因此，“外围”的边界正向是逆时针的；“空洞”的边界正向是顺时针的。

如果复变函数 $f(z)$ 在某个开区域 S 内处处可导，则称 $f(z)$ 为 S 上的**解析函数**。

思考题：在解析函数的定义里，为什么要限定处处可导的范围是开区域？换成闭区域行吗？

有很多在复平面上处处不解析的函数： $|z|$ ， $\text{Arg} z$ 等处处不可导，所以在任何开区域内不是解析函数。 $\sin |z|$ 仅在一些圆周上 ($|z| = \frac{\pi}{2}$, $|z| = \frac{3\pi}{2}$ ……) 可导，无法在一个开区域内处处可导，所以在任何开区域内不是解析函数。

但我们也可以不费吹灰之力就找到一大堆解析函数的例子： z^2 ， e^z ， $\sin z$ 等都是全复平面上的解析函数（这种在全复平面上解析的函数称为纯函数）。 $\frac{e^z}{z^2+1}$ 是全复平面挖去 $z = \pm i$ 后的区域上的解析函数（这种在除去有限个点的复平面上解析的函数称为亚纯函数）。

2.3.2 多值函数的解析的单值分支

多值函数连真正的函数都不是，更加不能是解析函数。不过，是否能加一些约定使它成为解析函数呢？

在我们讨论多值函数的可导性时，曾经（不太严谨地）说只要约定宗量的幅角连续变化就可以了。例如我们认为 $\ln z$ 在除去 $z = 0$ 点之外是“处处可导”的。但是，这里的“处处可导”实际上是要求你随机应变地规定 z 的幅角取值范围。例如当你希望 $\ln z$ 在 $z = 1$ 处可导时，你规定 $-\pi < \arg z \leq \pi$ ；而当你希望 $\ln z$ 在 $z = -1$ 处可导时，你可以改变策略，规定 $0 \leq \arg z < 2\pi$ 。可惜的是，并不存在一个单一的幅角取值策略，使得 $\ln z$ 在 $z \neq 0$ 范围内处处可导。（实际上，如果固定幅角取值策略，就连让 $\ln z$ 处处连续都做不到。）这时，我们说在 $z \neq 0$ 区域内， $\ln z$ 不存在解析的单值分支。

在更小一点的区域里， $\ln z$ 可能存在解析的单值分枝。例如在挖掉负实轴和

原点的复平面上，可以约定 $-\pi < \arg z < \pi$ 使 $\ln z = \ln|z| + i\arg z$ 为解析的单值函数。（由于禁止跨过负实轴，之前的幅角的不连续性问题消失了。）

我们再来看一个例子：在 $|z| < 1$ 的范围内， $\ln(1+z)$ 可以取解析的单值分支。如图 2.5 所示，我们可以约定宗量 $z+1$ 的幅角取值范围是 $-\frac{\pi}{2} < \arg(z+1) < \frac{\pi}{2}$ ，这

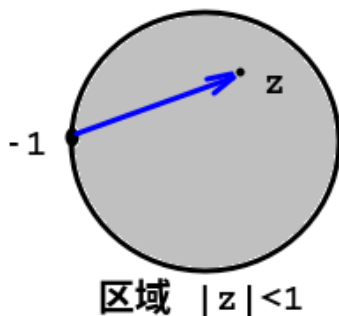


Figure 2.5: 在 $|z| < 1$ 的圆形区域里， $1+z$ （也就是 $z - (-1)$ ）的幅角可以取在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 的范围内

样的约定下 $\ln(1+z)$ 就是解析函数。所以在 $|z| < 1$ 的范围内存在 $\ln(1+z)$ 的解析的单值分支。

在给定的区域中，如何有效地判断带 \ln 的多值函数是否存在解析的单值分支呢？我们可以这样操作：

1. 找到让 \ln 的宗量取值为零的“枝点”。例如 $\ln z$ 的枝点是 $z = 0$ ； $\ln(z-1)$ 的枝点为 $z = 1$ ； $\ln(z^2+1)$ 的两个枝点是 $z = \pm i$ ； $\sqrt{z^2+1} = e^{\frac{1}{2}\ln(z^2+1)}$ 的枝点还是 $z = \pm i$ 。但是要注意不要找到假枝点，例如 $e^{2\ln z}$ 其实并没有枝点（因为它等于 z^2 ，并不是多值函数）。
2. 在给定的区域中，画出所有包围枝点或不包围枝点的简单闭合围道。例如， $\ln(z^2+1)$ 有两个枝点 $z = \pm i$ 。那么你需要检验如图 2.6 所示的四种简单闭合围道是否能在所给区域内存在：(1) 不包围 $z = i$ 也不包围 $z = -i$ ；(2) 包围 $z = i$ 但不包围 $z = -i$ ；(3) 包围 $z = -i$ 但不包围 $z = i$ ；(4) 包围 $z = i$ 也包围 $z = -i$ 。理论上讲，如果有 N 个枝点，你需要考虑的围道就有 2^N 种——虽然大多数时候你可以一眼排除掉很多种显然不可能的情况。
3. 沿着所有可能的围道走一圈，假设幅角保持连续变化的情况下，看函数值是否能保持不变。如果在任何一个围道上函数值发生变化，那么你无论怎样规定幅角取值策略，函数值在该围道上都无法保持处处连续——因此函数在所给区域内就不存在解析的单值分支。反之，如果在所有围道上函数值都能保持走一圈不变，且该函数在幅角连续变化意义下是可导的，函数就一定存在解析的单值分支（实际上你只要随便规定一个连续的幅角取值策略都能得到一个这样的单值分支）。

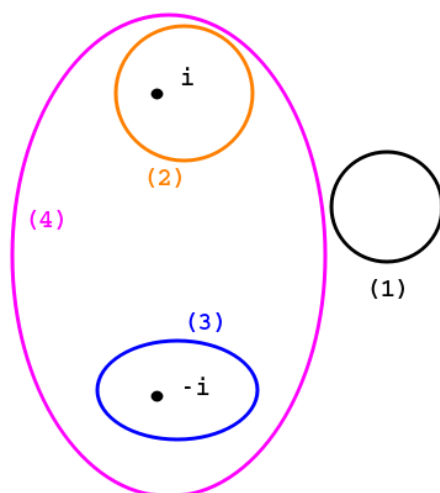


Figure 2.6: 如果枝点为 $\pm i$, 需要考虑四种围道: (1) 不包围 $z = i$ 也不包围 $z = -i$; (2) 包围 $z = i$ 但不包围 $z = -i$; (3) 包围 $z = -i$ 但不包围 $z = i$; (4) 包围 $z = i$ 也包围 $z = -i$ 。

以图 2.6 为例, 我们来研究 $\sqrt{z^2+1}$ 在 $|z| > 1$ 区域内是否存在解析的单值分支。首先, (1) 类围道 (不包围任何枝点的围道) 总是不用考虑的: 沿着它走一圈, $\ln(z^2+1)$ 不会发生任何变化, $\sqrt{z^2+1} = e^{\frac{1}{2}\ln(z^2+1)}$ 显然也是如此。然后, 在所给的环形区域 $|z| > 1$ 内, (2) 类和 (3) 类围道其实都不存在, (4) 类围道存在。所以我们只需要检验沿着 (4) 类围道 (比如逆时针方向) 走一圈, 函数 $\sqrt{z^2+1} = e^{\frac{1}{2}\ln(z^2+1)}$ 是否变化。注意 $\ln(z^2+1) = \ln(z+i) + \ln(z-i)$ 当 z 沿着 (4) 类围道逆时针走一圈后发生了变化, 增量为 $4\pi i$ 。但因为 $e^{\frac{1}{2}[\ln(z^2+1)+4\pi i]} = e^{\frac{1}{2}\ln(z^2+1)}$, 所以函数 $\sqrt{z^2+1} = e^{\frac{1}{2}\ln(z^2+1)}$ 当 z 沿着 (4) 类围道逆时针走一圈后其实没有变化。至此, 我们检验了在所给区域内的所有可能的围道种类, 发现 z 沿着任何一种围道走一圈, $\sqrt{z^2+1}$ 都不会发生变化。所以 $\sqrt{z^2+1}$ 在区域 $|z| > 1$ 内存在解析的单值分支。例如, 我们只需要规定 $0 \leq \arg(z+i) < 2\pi$ 以及 $0 \leq \arg(z-i) < 2\pi$ 就可以得到这样一个单值分支。

2.4 柯西定理和柯西积分公式

2.4.1 柯西定理

柯西定理在解析函数理论中起着奠基石的作用, 我们需要打起一点精神来学习。

虽然很多教材在描述柯西定理时, 分单连通区域和复连通区域等情况来讨论, 但这其实没有什么必要——我可以简单地用一句话来描述各种情况下的柯西定理:

柯西定理: 一个有限开区域内的解析函数, 如果在边界上连续, 那么它沿着边界积分为零。

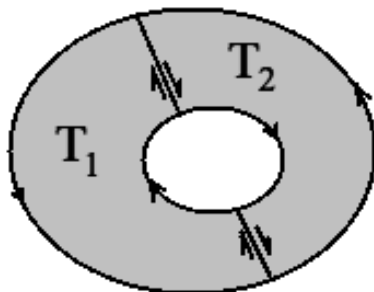


Figure 2.7: 由于公共边界上的积分互相抵消, 沿 T_1 和 T_2 边界的积分之和等于沿着总区域 (T_1+T_2) 的边界的积分

千万不要被“任意形状的区域”这种设定吓倒了! 虽然所给的区域 T 可以很复杂, 但是我们可以把区域 T 划分成很多简单 (指内部没有挖洞且各个方向的延伸尺度都差不多的) 小区域 T_1, T_2, \dots, T_N , 并在每个小区域的边界上沿正方向进行积分。相邻小区域在公共边界上 (按左内原则) 规定的边界方向相反, 积分互相抵消, 所以最后只剩下那些非公共边界 (即 T 的边界) 上的积分。也就是说, 沿 T 的边界的积分等于沿所有小区域的边界的积分之和。图 2.7 给出了一个划分为两个简单小区域的例子。

在每个小区域内, 因为区域很小 (设各个方向的延伸尺度均不超过 ε) 且被积函数可导, 我们能把被积函数 $f(z)$ 近似为一个线性函数加上高阶的误差 $f(z) \approx f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(\varepsilon)$ (z_0 为小区域内任取的一个点, 符号 $o(\varepsilon)$ 表示 ε 的高于一阶的小量)。当沿着小区域边界积分一周时, 由于线性函数存在单值的原函数, 对积分无贡献, 我们只需要估算误差项的贡献。注意到

$$\left| \int o(\varepsilon) dz \right| \lesssim |o(\varepsilon)| \int |dz| \sim |o(\varepsilon)| \varepsilon = o(\varepsilon^2)$$

用简单的语言来描述就是, 积分路径的长度是 $\sim \varepsilon$ 的量级, 所以把 $o(\varepsilon)$ 积分后是高于二阶的小量 $o(\varepsilon^2)$ ——也就是小区域面积的高阶小量。换句话说, 当我们把区域划分为越来越小的小区域时, 每个小区域的边界上的积分 (的绝对值) 和小区域面积之比会越来越小。那么最后, 所有小区域边界上的积分加起来 ——也就是沿着整个区域边界的积分 (的绝对值), 和区域总面积相比也被 (通过不断划分更小的区域) 估算得越来越小。注意到沿着整个区域边界的积分和区域总面积之比是个确定的 (不依赖于小区域划分方式) 的复数: 它的绝对值可以 (通过把整个区域划分为越来越小的区域来估算得出) 小于任意正数, 所以它只能是零。

思考题：上述对柯西定理的证明其实还存在一个细微的漏洞。你能找到这个漏洞并改进证明方法使得证明严谨吗？

2.4.2 柯西积分公式

由柯西定理可以导出一个很强的结论：

柯西积分公式：如果 f 是有限开区域 T 内的解析函数，并在 T 边界上连续，则对区域内任意一点 z 都有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial T} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (2.24)$$

其中 $\oint_{\partial T}$ 表示沿 T 的边界 ∂T 积分。

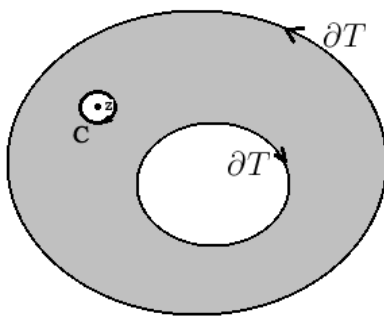


Figure 2.8: 柯西积分公式的证明的示意图

如图 2.8 所示，在 T 内以 z 为中心挖掉一个很小圆孔。 $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ (z 固定，看成 ζ 的函数) 在剩下的区域内解析，故沿 T 的边界以及 (小圆孔的边界) C 的积分之和为零。

而在 C 上积分时，可以把 $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ 近似为 $\frac{f(z)}{\zeta - z}$ ：因为误差 $\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \approx f'(z)$ 是常数量级，沿着小圆的积分 (在小圆半径趋向于零时) 可以忽略。我们已经讨论过， $\frac{f(z)}{\zeta - z}$ (对 ζ) 顺时针积分一周的结果是 $-2\pi i f(z)$ ，故得证。

柯西积分公式的右边只是一些 $\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$ 的和 (注意现在是把 z 看成了变量)，并且由于 f 是闭区间上的连续函数，权重 $f(\zeta)d\zeta$ 全都有界。这样，我们就把一个我们还不是很了解其性质的解析函数 $f(z)$ 分解成了熟悉的负一次幂函数 $\frac{1}{\zeta - z}$ 的线性组合。由于 $\frac{1}{\zeta - z}$ 可以对 z 进行任意 n 次求导，所以其线性组合同样可以求 n 次导。(2.24) 两边对 z 进行 n 次求导，就得到柯西积分公式的推广形式：

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial T} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.25)$$

这说明解析函数不仅可导，而且无限次可导。注意这个结论并不真的需要额外假设在边界 ∂T 上 f 有定义且连续，因为对固定的 z 而言，我们总是能在 T 内找到一个包含 z 的子区域，它的边界完全地落在 T 内。

此外，柯西积分公式还说明：解析函数在区域边界上的函数值可以完全地确定其在区域内的函数值以及任意次导数的值！我们对解析函数的特殊性又有了更加深刻的理解。

2.5 第2章习题

习题 11: 计算复变函数

$$f(z) = \frac{e^{\cos z} \cos(z^3)}{1 + z^2 + z^4}$$

在 $z=0$ 处的导数。

习题 12: 区域的边界正向是如何定义的？解析函数的柯西定理是什么？

习题 13: 写出一个在无穷多个点处可导，但在整个复平面上处处不解析的复变函数。

习题 14: 利用柯西-黎曼条件判断，复变函数

$$f(x+iy) = (x^2 + 2y) + i(x^2 + y^2)$$

(这里 x, y 均为任意实数) 在何处可导？

习题 15: 复变函数 $f(z) = \sin z \cos(z^*)$ 在哪些点可导？导数是什么？

习题 16: 在如图的半圆围道上计算积分

$$\int_{|z|=1, \text{Im}z>0} \ln z \, dz$$

其中积分路径为单位圆 $|z|=1$ 的上半部分，逆时针从 $z=1$ 积分到 $z=-1$ ，并规

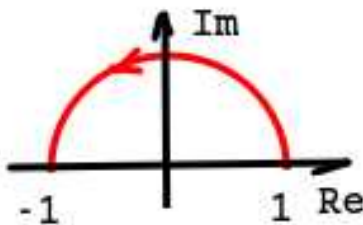


Figure 2.9: 习题 16 图

定在积分起点 ($z=1$) 处 z 的幅角为零。

习题 17: 设 f 为全平面解析函数。且对所有 z 均有 $|f(z)| < e^{\text{Im}z}$ 。又已知 $f(0) \neq 0$ ，计算 $\frac{f(\pi)}{f(0)}$ 的值。

习题 18: 设 f 为全平面解析函数。对所有实数 x, y , $f(x+yi)$ 的实部和虚部之和都是

$$\operatorname{Re}f(x+yi) + \operatorname{Im}f(x+yi) = x^2 - y^2 - 2xy.$$

计算 $|f(1) - f(2)|$ 的值。

习题 19: 已知对任意 $z \neq 0$, 复变函数 f 满足

$$|zf'(z) + f(z)| \leq 1.$$

又已知

$$f(1) = 0$$

以及

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) \sin z = 1.$$

求 $f(-1)$ 的值。

习题 20: 用 z^* 表示 z 的共轭复数, 计算按逆时针沿着曲线

$$C = \{z: |z-3| + |z+3| = 10\}$$

的围道积分

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C (z^* dz - z dz^*)$$

习题 21: 设 f 在整个复平面上解析, 且 f 不是常数。证明: 在复平面上的任给一个圆, 都有无数个 z 使 $f(z)$ 的值落在这个圆内。

习题 22: 在 $|z| < 1$ 范围内定义解析函数

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{2^k} = z + z^2 + z^4 + z^8 + \dots$$

(1) 证明 $f(z)$ 不能解析延拓到更大的区域内。

(2) 把 f 迭代 n 次的函数记作 f_n 。例如 $f_3(z)$ 表示 $f(f(f(z)))$ 。计算极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n f_n \left(\frac{i}{n} \right).$$

3. 洛朗展开和留数定理

3.1 泰勒展开和洛朗展开

3.1.1 泰勒展开

解析函数既然在其解析区域内无限次可导，那么就可以至少形式地写出泰勒展开。对特殊的圆形区域，我们有如下的泰勒展开定理：

泰勒展开定理：如果 $f(z)$ 在圆 $C_R: |z - z_0| < R$ 内解析，则 $f(z)$ 在 C_R 内无限次可导，且可以展开为下列泰勒级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in C_R. \quad (3.1)$$

其中 $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ 。

也就是说，在一个圆内解析的函数在圆心处的泰勒展开在圆内处处收敛。

对圆内任意一点 z ，如图3.1所示，取包含 z 的圆区域 $C_q = \{\zeta : |\zeta - z_0| < q\}$ (这里的常数 q 满足 $|z - z_0| < q < R$)。因为 f 在 C_q 内解析，边界上连续，所以可以对 z_0 应用推广的柯西积分公式：

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial C_q} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta. \quad (3.2)$$

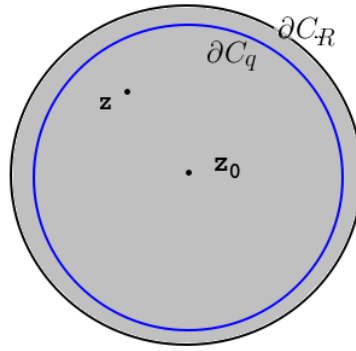


Figure 3.1: 泰勒展开定理的证明

然后，对 z 运用柯西积分公式：

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial C_q} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial C_q} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} d\zeta \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial C_q} \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{f(\zeta)}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} d\zeta \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial C_q} \frac{1}{\zeta - z_0} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n d\zeta \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

注意，证明的过程中，用到了对 $\zeta \in \partial C_q$ ，有 $|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}| < 1$ 这个条件。

3.1.2 洛朗展开

模仿上面对泰勒展开定理的证明，我们可以得到更有用的洛朗展开定理：

洛朗展开定理： 设 $f(z)$ 在环区域 $r < |z - z_0| < R$ (这里允许 $r = 0$ 和 $R = \infty$) 内解析，则在环形区域内有如下的洛朗展开：

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{3.4}$$

其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \tag{3.5}$$

积分路径 C 可以是环内任意的一条逆时针绕 z_0 一周的分段光滑曲线。

显然 $\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$ (或者任何在环内解析的函数) 沿环形区域内任意两条逆时针绕 z_0 一周的曲线上的积分是相同的 (只要对两条曲线包围的区域使用柯西定理即可证明), 所以 a_n 的定义本身并没有什么问题。

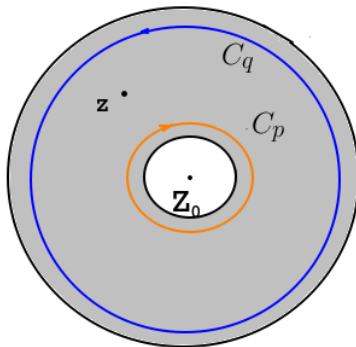


Figure 3.2: 洛朗展开定理的证明

洛朗展开定理的证明和泰勒展开定理的证明是完全类似的。我们以 z_0 为圆心分别作半径为 p 和 q 的圆 C_p 和 C_q (这里的 $r < p < |z - z_0| < q < R$), 使得 z 落在 C_p 和 C_q 之间的环形区域内。根据柯西积分公式, 有:

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_q} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_p} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_q} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_p} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} d\zeta \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_q} \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{f(\zeta)}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_p} \frac{1}{z - z_0} \frac{f(\zeta)}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} d\zeta \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_q} \frac{1}{\zeta - z_0} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_p} \frac{1}{z - z_0} f(\zeta) \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^m d\zeta \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_q} \frac{1}{\zeta - z_0} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_p} \frac{1}{z - z_0} f(\zeta) \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^{-n-1} d\zeta \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_q} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right] (z - z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{-C_p} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right] (z - z_0)^n \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

在证明过程中, 我们替换了求和指标 $m = -n - 1$; 倒数第二行的 \oint_{-C_p} 表示沿着 C_p 的反方向 (即逆时针方向) 积分。

如果你现在已经开始犯晕, 那可能说明你不太喜欢这种比较严谨的数学证明方式来说明问题。你可以尝试换一个不那么严谨的角度来看待这个问题: 假设洛

朗展开成立但展开系数 a_n 待定, 并且可以交换积分和求和的次序, 那么

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \oint_C \frac{\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m (\zeta - z_0)^m}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \oint_C (\zeta - z_0)^{m-n-1} d\zeta. \quad (3.7)$$

我们已经知道了沿着绕 z_0 逆时针方向一圈的闭合围道上 $(z - z_0)^k$ 的积分当且仅当 $k = -1$ 时为 $2\pi i$, 其他情况均为零。也就是说, 上式右边仅当 $m = n$ 时积分才有 $2\pi i$ 的贡献。所以,

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = 2\pi i a_n. \quad (3.8)$$

因此(3.5)给出的洛朗展开系数又和 $\ln(z - z_0)$ 绕 z_0 一圈改变 $2\pi i$ 有非常简单的联系, 并不需要像(3.6)那样理解为一大一小两个围道的不同形式的贡献。

3.1.3 洛朗展开的实战技巧

洛朗展开定理回答了怎样的函数在怎样的区域内可以进行洛朗展开, 并且给出了展开的系数的积分表达式。不过, 用(3.5)来计算洛朗展开的系数通常并不容易, 所以实际的计算中往往采用一些其他的方法。下面我们来介绍一些更加实用的技巧。

我们先来回顾下五个最常见的泰勒级数展开公式。

在全复平面上, 有

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots \quad (3.9)$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \dots \quad (3.10)$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \dots \quad (3.11)$$

在 $|z| < 1$ 的范围内, 还有

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots, \quad (|z| < 1) \quad (3.12)$$

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z^2 + \dots, \quad (|z| < 1) \quad (3.13)$$

上面两式左边都约定 $z = 0$ 时, $1+z$ 的幅角为零; 在(3.13)中 $\binom{\alpha}{n}$ 的定义是

$$\binom{\alpha}{n} \equiv \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$$

绝大多数洛朗展开的实际计算过程就是结合上述五个泰勒级数进行四则运算的过程。我们先来看一个简单的例子：

例题 2: 求 $\frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ (1) 在 $0 < |z-1| < 1$ 内的洛朗展开；(2) 在 $|z-1| > 1$ 内的洛朗展开。

解答: 环形区域的中心为 $z_0 = 1$ ，为了书写方便，我们可以做变量替换 $t = z - z_0 = z - 1$ 。

$$\frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{1}{t(t+1)(t-1)}$$

在 $0 < |t| < 1$ 区域内

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t(t+1)(t-1)} \\ = & -\frac{1}{t} \frac{1}{1-t^2} \\ = & -\frac{1}{t} (1+t^2+t^4+t^6+\dots) \\ = & -\frac{1}{t} - t - t^3 - t^5 - \dots \end{aligned} \tag{3.14}$$

在 $|t| > 1$ 区域内，

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t(t+1)(t-1)} \\ = & \frac{1}{t^3} \frac{1}{1-\frac{1}{t^2}} \\ = & \frac{1}{t^3} \left(1 + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^4} + \dots \right) \\ = & t^{-3} + t^{-5} + t^{-7} + \dots \end{aligned} \tag{3.15}$$

可见，同一个函数在不同的环形区域的洛朗展开可以完全不同。

在上面的例子中，其实只是运气好恰好能凑出 $\frac{1}{1-t^2}$ 等容易展开的形式。我们再来看一个需要进行分式拆分的例子：

例题 3: 求 $\frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ 在环区域 $1 < |z| < 2$ 内的洛朗展开。

解答：在环区域 $1 < |z| < 2$ 内，

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{z(z-1)(z-2)} \\
 = & \frac{1}{z} \left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} \right) \\
 = & \frac{1}{z} \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \right) \\
 = & \frac{1}{z} \left[-\frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \dots \right) - \frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots \right) \right] \\
 = & \left(-\frac{1}{2z} - \frac{z}{2^2} - \frac{z^2}{2^3} - \dots \right) + \left(-\frac{1}{2z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} - \dots \right) \tag{3.16}
 \end{aligned}$$

分式拆分未必都是拆成分母为线性函数的形式。一般来说，分母带 n 重根的分式，能拆到分母最多为 n 次幂的形式。我们来看一个更加具有代表性的例子：

例题 4: 求 $\frac{z^2-3}{(z-1)^3(z-2)}$ 在环区域 $1 < |z| < 2$ 内的洛朗展开。

解答：因为分母出现了 $(z-1)$ 的高次幂，我们期待的一般拆分结果是

$$\frac{z^2-3}{(z-1)^3(z-2)} = \frac{a_1}{z-1} + \frac{a_2}{(z-1)^2} + \frac{a_3}{(z-1)^3} + \frac{b_1}{z-2}$$

标准的解法是两边比较同次幂系数，列出方程解 a_1, a_2, a_3, b_1 。但是我出于本能还是凑了一下：

$$\begin{aligned}
 \frac{z^2-3}{(z-1)^3(z-2)} &= \frac{(z-1)^2+2(z-2)}{(z-1)^3(z-2)} \\
 &= \frac{1}{(z-1)(z-2)} + \frac{2}{(z-1)^3} \\
 &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} + \frac{2}{(z-1)^3} \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{2}{z^3} \frac{1}{(1-\frac{1}{z})^3}
 \end{aligned}$$

前两项我们已经知道怎么展开了。最后一项可以用(3.13)进行展开 (令 $\alpha = -3$):

$$\left(1 - \frac{1}{z}\right)^{-3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-3}{n} \left(-\frac{1}{z}\right)^n$$

最后合并后的结果很长就懒得写了！

现在来看一个多值函数的例子。

例题 5: 分别判断函数 $\ln \frac{z-1}{z-2}$ 在区域 $|z| < 1$, 环区域 $1 < |z| < 2$, 以及环区域 $|z| > 2$ 内是否可以取解析的单值分支, 如果可以的话, 将解析的单值分支进行洛朗展开。

解答: 用2.3.2小节介绍的方法可以判断: 在区域 $|z| < 1$ 和区域 $|z| > 2$ 内, $\ln \frac{z-1}{z-2}$ 分别存在解析的单值分支; 在环区域 $1 < |z| < 2$ 内, $\ln \frac{z-1}{z-2}$ 不存在解析的单值分支。在 $|z| < 1$ 范围内, 我们可以规定 $z=0$ 时 $\frac{z-1}{z-2}$ 幅角为零, 这样

$$\begin{aligned} \ln \frac{z-1}{z-2} &= \ln(1-z) - \ln\left(1-\frac{z}{2}\right) - \ln 2 \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2^n n} - \ln 2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}-1}{n} z^n - \ln 2 \end{aligned} \quad (3.17)$$

在 $|z| > 2$ 范围内, 我们可以规定 $z=+\infty$ 时 $\frac{z-1}{z-2}$ 幅角为零, 这样

$$\begin{aligned} \ln \frac{z-1}{z-2} &= \ln\left(1-\frac{1}{z}\right) - \ln\left(1-\frac{2}{z}\right) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nz^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{z^n n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{n} \frac{1}{z^n} \end{aligned} \quad (3.18)$$

很多时候我们只要求洛朗展开的某个或某些低次幂项的系数。这时, 还可以采取“多重展开”, “待定系数”以及“去极化后泰勒展开”等各种方法。我们来看一个很典型的例题。

例题 6: 计算 $\frac{e^z}{\sin^2 z}$ 在 $0 < |z| < \pi$ 内的洛朗展开的负一次幂的系数 a_{-1} 。

第一种解答: 最直截了当的办法就是进行多重展开。

$$\begin{aligned}
 \frac{e^z}{\sin^2 z} &= \frac{2e^z}{1 - \cos 2z} \\
 &= \frac{2 + 2z + z^2 + \dots}{2z^2 - \frac{2}{3}z^4 + \frac{4}{45}z^6 - \dots} \\
 &= \frac{1}{z^2} \left(1 + z + \frac{z^2}{2} \dots \right) \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{3}z^2 - \frac{2}{45}z^4 + \dots \right)} \\
 &= \frac{1}{z^2} \left(1 + z + \frac{z^2}{2} \dots \right) \left(1 + \left(\frac{1}{3}z^2 - \frac{2}{45}z^4 + \dots \right) + \dots \right) \\
 &= \frac{1}{z^2} (1 + z + \dots) \tag{3.19}
 \end{aligned}$$

显然, -1 次幂的系数为 1。

第二种解答: 换一种思路, 用“待定系数法”也可以获得成功。

$$\begin{aligned}
 \frac{e^z}{\sin^2 z} &= \frac{2e^z}{1 - \cos 2z} \\
 &= \frac{2 + 2z + z^2 + \dots}{2z^2 - \frac{2}{3}z^4 + \frac{4}{45}z^6 - \dots} \\
 &= \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1z + \dots \tag{3.20}
 \end{aligned}$$

注意到在最后一步我们利用了当 $z \rightarrow 0$ 时整个函数的渐近行为确定了洛朗展开没有低于 -2 次的项。然后, 就有

$$\left(\frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1z + \dots \right) \left(2z^2 - \frac{2}{3}z^4 + \frac{4}{45}z^6 - \dots \right) = 2 + 2z + z^2 + \dots$$

两边比较 0 次幂系数, 得到 $2a_{-2} = 2$, 即 $a_{-2} = 1$ 。再两边比较 1 次幂系数, 得到 $2a_{-1} = 2$, 即 $a_{-1} = 1$, 即所求答案。

第三种解答: 最后, 我们用一种看起来有点奇怪的办法。注意到 $f(z) = \frac{e^z}{\sin^2 z}$ 在 $z = 0$ 附近只能洛朗展开而无法泰勒展开的原因是它在 $z = 0$ 发散, 我们令 $g(z) = z^2 f(z) = \frac{e^z z^2}{\sin^2 z}$ (在 $z = 0$ 可以理解为该式的极限), 容易看出来这样在 $|z| < \pi$ 内 $g(z)$ 就没有发散点, 可以进行泰勒展开。计算 $g(z)$ 在 z_0 附近的 Taylor 展开的一次幂系数 (即等于 $f(z)$ 的 -1 次幂系数):

$$a_{-1} = g'(0) = \left[e^z \frac{z^2}{\sin^2 z} + e^z \left(\frac{z^2}{\sin^2 z} \right)' \right] \Big|_{z=0} = 1.$$

计算过程中我们用到了 $\frac{z^2}{\sin^2 z}$ 是偶函数所以在 $z = 0$ 的导数为零的事实。

3.2 留数定理

如果 $f(z)$ 在 z_0 的邻域 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内解析 (δ 可以是任意一个小的正数), 但在 $z = z_0$ 不解析 (没有定义或者有定义却不可导), 则称 z_0 为 $f(z)$ 的**孤立奇点**。

例如: $0, 1, 2$ 都是函数 $\frac{1}{z^2(z^2-3z+2)}$ 的孤立奇点; $\pm i$ 都是函数 $\frac{e^z}{z^2+1}$ 的孤立奇点; $\pm\pi, \pm 2\pi \dots$ 都是 $\frac{z}{\sin z}$ 的孤立奇点。需要注意的是, 可以把 $\frac{z}{\sin z}$ 在 $z=0$ 的取值定义为它在 $z \rightarrow 0$ 时的极限 (即规定 $\frac{z}{\sin z}|_{z=0} = 1$), 这样 $z=0$ 并不是 $\frac{z}{\sin z}$ 的孤立奇点。在本书中, 我将默认对函数存在有限大小的极限的情况都做了这种补充。不过, 需要注意的是, 大多数其他教材或者课程并不做这样的默认约定, 在做习题时要加以区分。(当然, 这无非是文字游戏意义上的差别, 不影响我们对知识本质的理解。)

如果 z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 则 f 可在邻域 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内洛朗展开: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ 。因为我们知道 $(z - z_0)^n$ 绕 z_0 逆时针积分一圈当且仅当 $n = -1$ 时结果不为零 (为 $2\pi i$), 所以我们特别关注 $(z - z_0)^{-1}$ 前的系数 a_{-1} , 并把它称为 f 在 z_0 处的**留数**, 记作 $\text{Res}(f, z_0)$ 。

我们已经知道了沿着孤立奇点 z_0 的小邻域的边界的积分是 $2\pi i \text{Res}(f, z_0)$ 。那么, 如果是一个比较大的区域, 并包含了多个孤立奇点呢?

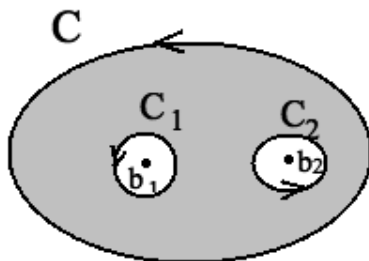


Figure 3.3: 对阴影部分的子区域应用柯西定理得到: 沿原区域边界 C 的积分等于沿各个孤立奇点的小邻域的边界 (C_1, C_2) 的积分之和

图 3.3 展示了对比较大的, 包围了两个孤立奇点 (b_1, b_2) 的区域的处理。对阴影部分的子区域 (即原区域挖掉各个孤立奇点的小邻域后的区域) 应用柯西定理, 就知道: 沿着原区域的边界, 以及反向 (即顺时针) 沿着所有孤立奇点的邻域的边界的积分之和为零。

所以, 沿着原区域边界的积分, 就等于 (逆时针) 沿着所有孤立奇点邻域的积分之和, 即等于 $2\pi i$ 乘以各个孤立奇点的留数之和。

推广到包含任意个孤立奇点的情况, 即有下面的留数定理:

留数定理: 设 f 在区域 T 内除有限个孤立奇点 b_1, b_2, \dots, b_n 之外解析, 在 T 的边界上连续, 则 f 沿 T 的边界的积分等于 $2\pi i$ 乘以 f 在所有孤立奇点处的留数之和。

$$\oint_{\partial T} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, b_k)$$

现在, 柯西定理也可以看成留数定理在区域内无孤立奇点时的特殊情形。

3.3 留数定理的应用

留数定理本身在理论物理 (例如量子场论) 中就有些应用。不过, 它最为人们知的一个强大功能是可以用来计算一些常规手段难以计算的定积分。我们来看一个非常经典的例子:

例题 7: 计算定积分

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

解答: 首先 $\frac{\sin x}{x}$ 是偶函数, 所以

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

$\sin x$ 是 e^{ix} 的虚部, 即

$$I = \frac{1}{2} \text{Im} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right)$$

想使用留数定理就必然要把积分路径补成一个闭合围道。考虑到 e^{iz} 当 z 的虚部很大时趋向于零, 我们就尽量在上半平面补。最简单当然是补一个上半圆 C_R (半径 $R \rightarrow \infty$), 如图 3.4 所示。问题是, 在这个围道上 $\frac{e^{iz}}{z}$ 在 $z=0$ 处没有定义, 我们就要

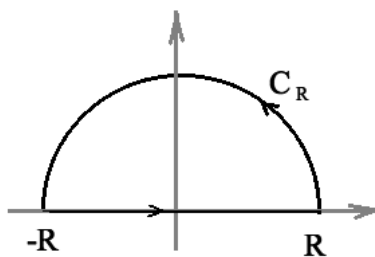
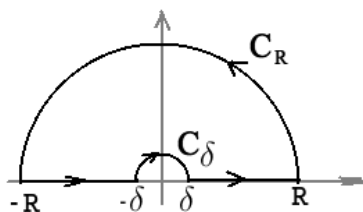


Figure 3.4: 补充上半圆围道 C_R 后形成一个半圆形闭合围道

想办法绕开这个奇点。如图 3.5 所示, 在原点附近拐个弯, 再取一个小半圆 C_δ (半径 $\delta \rightarrow 0^+$)。在这个围道内部, $\frac{e^{iz}}{z}$ 处处解析, 根据柯西定理或留数定理,

Figure 3.5: 补充上半大圆围道 C_R 和上半小圆 C_δ 后形成一个闭合围道

$$\left(\int_{-R}^{-\delta} + \int_{\delta}^R + \int_{C_R} + \int_{C_\delta} \right) \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

当 $\delta \rightarrow 0^+$ 时,

$$\int_{C_\delta} \frac{e^{iz}}{z} dz \rightarrow \int_{C_\delta} \frac{1}{z} dz = \ln z \Big|_{\delta e^{i\pi}}^{\delta} = -i\pi$$

当 $R \rightarrow \infty$ 时, 可以估算出 (我们将在下面对此进行更详细的讨论, 这里先不给出细节; 如果需要一个快速的理解, 可以参考图 3.6)

$$\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \rightarrow 0$$

所以我们最后得到 $\delta \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$ 时,

$$\left(\int_{-R}^{-\delta} + \int_{\delta}^R \right) \frac{e^{iz}}{z} dz \rightarrow i\pi$$

即

$$I = \frac{1}{2} \text{Im}(i\pi) = \frac{\pi}{2}. \quad (3.21)$$

也就是

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \quad (3.22)$$

现在, 我们回过头来证明上半大圆 C_R 上 $\frac{e^{iz}}{z}$ 的积分 (当 $R \rightarrow \infty$ 时) 趋向于零。在我所见到过的“标准解答”里, 都是用“约当引理”来完成证明。不过, 一旦告诉你要用什么没有听说过的引理才能解决问题, 你的第一感就是这个问题太难了。其实完全不用害怕, 因为第一, 约当引理是个很简单的引理; 第二, 其实可以完全不用约当引理解决问题。

我们先来看怎样用更加自然的思路 (不用约当引理) 来解决问题:

第一步容易想到的 (或者说证明积分不等式的最标准流程) 是利用积分的绝对值不大于绝对值的积分:

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \int_{C_R} \frac{|e^{iz}|}{|z|} |dz| = \int_{C_R} \frac{|e^{iz}|}{R} |dz|. \quad (3.23)$$

再回想一下, 我们选择上半平面而不是下半平面的半圆来组成闭合围道, 根本原因是上半平面 $|e^{iz}| = |e^{ix-y}| = e^{-y}$ (这里 x, y 分别是 z 的实部和虚部) 在上半大圆的绝大部分地方都非常非常小。也许在靠近 x 轴的部分, $|e^{iz}| = e^{-y}$ 并不可忽略。不过, 这部分对应的积分路径长度要远远小于 R , 所以对 $\int \frac{e^{-y}}{R} |dz| < \int \frac{1}{R} |dz|$ 的贡献还是可以忽略。

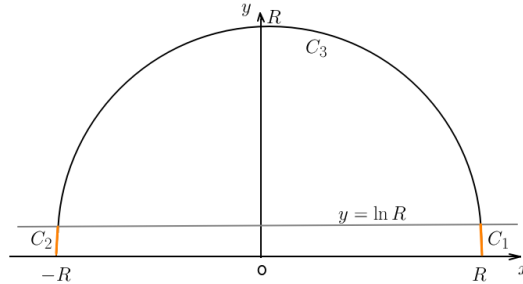


Figure 3.6: 例题 7 的上半大圆上积分趋于零的说明: 把上半大圆 C_R 划分成 $y \geq \ln R$ 部分 (C_3) 和 $y < \ln R$ 部分 (橙色的 C_1 和 C_2)。在 C_3 上, $|e^{iz}| = e^{-y} \leq \frac{1}{R}$, 因此 $\int_{C_3} \frac{|e^{iz}|}{|z|} |dz| \leq \frac{1}{R^2} \int_{C_3} |dz| < \frac{\pi R}{R^2} \rightarrow 0$ 。在 C_1 和 C_2 上, $|e^{iz}| = e^{-y} \leq 1$, 因此 $\int_{C_1+C_2} \frac{|e^{iz}|}{|z|} |dz| < \int_{C_1+C_2} \frac{1}{R} |dz| \sim \frac{2 \ln R}{R} \rightarrow 0$ 。

这种粗略的分析实际上已经足以帮助你写下一个有效的证明。如图 3.6 所示, 你只需要把积分路径划分成 $y \geq \ln R$ 和 $y < \ln R$ 的两部分, 分别对积分进行估算。

事实上, 用同样的方法你可以证明对任意实部大于零的复数 σ , $\frac{e^{iz}}{z^\sigma}$ 在上半大圆的积分趋于零。我们在下一道例题中会用到这个结论。

好了, 你现在明白了这个问题一点也不难。那么我们不妨来欣赏下别的教材中的“标准解答”是怎样的。

在 C_R 上令 $z = Re^{i\theta} = R \cos \theta + iR \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$), 则 $|e^{iz}| = |e^{-R \sin \theta} e^{iR \cos \theta}| = e^{-R \sin \theta}$, 以及 $|z| = R$, $|dz| = R d\theta$ 。于是(3.23)右边可以明确地写成一个积分:

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \int_0^\pi \frac{e^{-R \sin \theta}}{R} R d\theta = \int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta. \quad (3.24)$$

这里我们利用了 $\sin \theta$ 关于 $\frac{\pi}{2}$ 的对称性把问题转化为了 $[0, \pi/2]$ 上的积分。

在 $\theta \in [0, \pi/2]$ 时, 因为 $f(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta}$ 是单调下降函数 (利用基本不等式 $\theta \leq \tan \theta$ 可知导函数 $\frac{\cos \theta (\theta - \tan \theta)}{\theta^2} \leq 0$), 所以 $f(\theta) \geq f(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$ 。也就是说 $\sin \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta$ 。由此可以对(3.24)右边进一步进行估算:

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2}{\pi} R \theta} d\theta = \frac{\pi}{R} (1 - e^{-R}). \quad (3.25)$$

显然当 $R \rightarrow \infty$ 时, $\frac{\pi}{R} (1 - e^{-R})$ 趋向于零。所以命题得证。

更一般地, 如果在 C_R 上 $|f(z)| < \varepsilon$, 则

$$\begin{aligned} \int_{C_R} |f(z)| |e^{iz}| |dz| &< \int_0^\pi \varepsilon e^{-R \sin \theta} R d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \varepsilon e^{-R \sin \theta} R d\theta \\ &< 2\varepsilon \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2}{\pi} R \theta} R d\theta \\ &= 2\varepsilon \left[-\frac{\pi}{2} e^{-\frac{2}{\pi} R \theta} \right] \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \pi\varepsilon (1 - e^{-R}) \end{aligned} \quad (3.26)$$

于是有如下的约当引理:

约当引理: 如果

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty, \operatorname{Im} z \geq 0} f(z) = 0,$$

则

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C(R)} f(z) e^{iz} dz = 0,$$

这里点集 $C(R) \subseteq \{z: |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ 。

用自然语言来描述, 就是说如果当 z 在上半平面上趋向于无穷时, $f(z)$ 一致地趋于零, 那么 $e^{iz} f(z)$ 在以原点为圆心, 半径趋向无穷的上半大圆的任何一部分上的积分都趋于零。

通过线性的变量替换 $z \rightarrow az$ ($a \neq 0$ 为常数), 可以得到约当引理的各种变化形式。比如你可以把约当引理的 e^{iz} 换成 e^{-iz} 并同时把积分路径切换到下半大圆。这些简单的常规操作我们就不再深入讨论了。

我们来看另一个类似的例题:

例题 8: 计算定积分

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx$$

解答: 在如图 3.7 所示的围道上对 e^{iz^2} 积分。根据柯西定理或者留数定理:

$$\int_{C_1 + C_R + C_2} e^{iz^2} dz = 0. \quad (3.27)$$

显然, 当 $R \rightarrow \infty$ 时,

$$\int_{C_1} e^{iz^2} dz = \int_0^R e^{ix^2} dx \rightarrow \int_0^\infty \cos(x^2) dx + i \int_0^\infty \sin(x^2) dx. \quad (3.28)$$

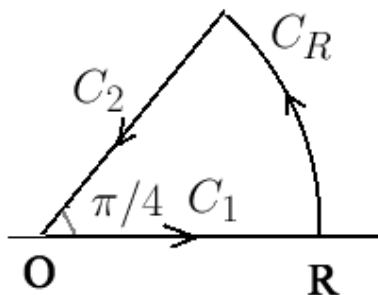


Figure 3.7: 例题 8 的积分围道

其虚部就是我们希望计算的定积分。在 C_2 上, 令 $z = re^{\frac{\pi i}{4}}$, 则 $z^2 = ir^2$ 。当 $R \rightarrow \infty$ 时有

$$\int_{C_2} e^{iz^2} dz = \int_R^0 e^{-r^2} d(re^{\frac{\pi i}{4}}) \rightarrow -e^{\frac{\pi i}{4}} \int_0^\infty e^{-r^2} dr = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} - i\sqrt{\frac{\pi}{8}}. \quad (3.29)$$

这里我们利用了高等数学中 (或者热学中) 熟知的高斯积分 $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 。最后, 在 C_R 上做变量替换 $z = \sqrt{s}$ (这里约定 s 的幅角在 $[0, \pi/2]$ 内), 则 $dz = \frac{ds}{2\sqrt{s}}$ 。对 $f(s) = \frac{1}{2\sqrt{s}}$ 应用约当引理 (或者采用图 3.6 那样的分割估算), 当 $R \rightarrow \infty$ 时,

$$\int_{C_R} e^{iz^2} dz = \int_{|s|=R^2, 0 \leq \arg s \leq \frac{\pi}{2}} \frac{e^{is}}{2\sqrt{s}} ds \rightarrow 0. \quad (3.30)$$

把 (3.28), (3.29), (3.30) 代入 (3.27), 并对比两边虚部即得所求的定积分

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

思考题: 把 (3.28), (3.29), (3.30) 代入 (3.27), 并对比两边实部, 可以得到什么结论?

上面的解答过程中用到了我们熟知的高斯积分 $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ 。把高斯积分和围道积分的方法相结合, 还能得到一些其他有趣的结果。我们来看一个物理中比较常见的问题。

例题 9: 计算积分

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \cos x dx.$$

解答: 在如图 3.8 的围道上对函数 e^{-z^2} 进行积分。容易验证当 $R \rightarrow \infty$ 时, 两条短边



Figure 3.8: 例题 9 采取的积分围道

上的积分趋向于零。根据柯西定理或者留数定理，两条长边上的积分互相抵消。这等价于：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+\frac{i}{2})^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

化简并取实部即得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos x dx = \sqrt{\pi} e^{-1/4}.$$

用这样的方法，我们实际上可以证明对任意复数 a ，都有

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+a)^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (3.31)$$

知道了这个结论，我们就能这样进行计算：

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos x dx &= \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{ix} dx \\ &= \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\frac{i}{2})^2 - \frac{1}{4}} dx \\ &= e^{-\frac{1}{4}} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\frac{i}{2})^2} dx \\ &= e^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\pi} \end{aligned} \quad (3.32)$$

下面我们来考虑另一类函数——三角有理分式的定积分。我们知道三角函数的有理分式原则上都能用变量替换 $t = \tan \frac{x}{2}$ 求出原函数。但是这类函数的不定积分的计算量通常比较大。如果只是计算积分区间为 $[0, 2\pi]$ 的定积分，我们就能用围道积分来简化计算。我们来看一个例子。

例题 10: 计算积分

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos x} dx.$$

解答：如图 3.9 所示，考虑逆时针方向的单位圆 $|z| = 1$ 记围道上 z 的幅角为 x ，即 $z = e^{ix}$ 。请先验算：

$$dx = \frac{dz}{iz}; \quad \cos x = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}; \quad \sin x = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} \quad (3.33)$$

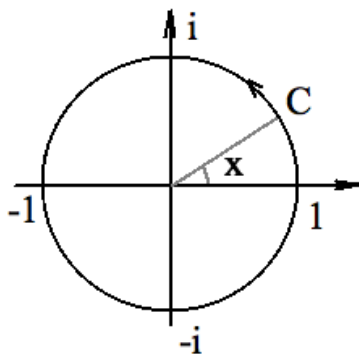


Figure 3.9: 例题 10 采取的积分围道

于是有

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos x} dx = \oint_C \frac{1}{2 + \frac{z + \frac{1}{z}}{2}} \frac{dz}{iz} = -2i \oint_C \frac{1}{z^2 + 4z + 1} dz. \quad (3.34)$$

注意到 $\frac{1}{z^2 + 4z + 1}$ 有两个孤立奇点 $\alpha, \beta = -2 \pm \sqrt{3}$ 。其中仅有 $\alpha = -2 + \sqrt{3}$ 在围道内。 $\frac{1}{z^2 + 4z + 1}$ 在该点的留数为：

$$\text{Res} \left(\frac{1}{(z - \alpha)(z - \beta)}, \alpha \right) = \frac{1}{\alpha - \beta} = \frac{1}{2\sqrt{3}}. \quad (3.35)$$

注意上面的计算中，我们实际上是把 $\frac{1}{z - \beta}$ （它在 $z = \alpha$ 附近是解析函数）泰勒展开为 $z - \alpha$ 的幂级数。其零次项系数（即 $\frac{1}{\alpha - \beta}$ ）显然就是 $\frac{1}{(z - \alpha)(z - \beta)}$ 在 $z = \alpha$ 附近的洛朗展开的负一次项的系数。于是我们最后得到

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos x} dx = -2i \left(2\pi i \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \quad (3.36)$$

在这个例子中的计算留数的方法是一个通用技巧。实际上在例题 6 的最后一个解法中，我们已经使用过这个技巧。为了加深你的印象，我们再来举一个例子。

例题 11: 设 $f(z)$ 在全复平面上处处满足微分方程

$$z^2 f''(z) - 2z f'(z) + (2 - z^2) f(z) = 0,$$

且已知

$$f'(0) = 1.$$

计算逆时针方向沿着单位圆 $|z| = 1$ 的围道积分

$$\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^4} dz.$$

解答: 设 $f(z) = c_0 + z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$, 代入微分方程并比较两边同次项系数, 可以得到:

$$c_0 = c_2 = 0, c_3 = \frac{1}{2}, \dots$$

所以

$$\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^4} dz = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{f(z)}{z^4}, 0 \right) = 2\pi i c_3 = \pi i.$$

我们最后用一个有趣的问题结束围道积分这一小节。

例题 12: 计算积分

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^\alpha},$$

这里的常数 $\alpha > 1$ 。

解答: 在如图所示的围道上对 $f(z) = \frac{1}{1+z^\alpha}$ 进行积分。在大圆弧上的积分当 $R \rightarrow \infty$

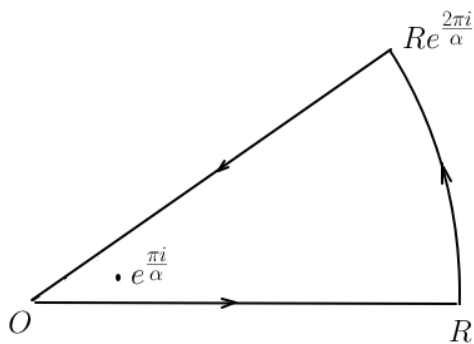


Figure 3.10: 例题 12 采取的积分围道

时趋向于零。围道内有一个孤立奇点 $e^{\frac{\pi i}{\alpha}}$ ，因此有

$$\int_0^{\infty} f(x) dx - \int_0^{\infty} f\left(re^{\frac{2\pi i}{\alpha}}\right) d\left(re^{\frac{2\pi i}{\alpha}}\right) = 2\pi i \operatorname{Res}\left(f, e^{\frac{\pi i}{\alpha}}\right). \quad (3.37)$$

即

$$I - e^{\frac{2\pi i}{\alpha}} I = 2\pi i \operatorname{Res}\left(f, e^{\frac{\pi i}{\alpha}}\right). \quad (3.38)$$

令 $g(z) = f(z)\left(z - e^{\frac{\pi i}{\alpha}}\right)$ ，则 $g(z)$ 在 $e^{\frac{\pi i}{\alpha}}$ 附近是解析函数。 $g(z)$ 围绕 $e^{\frac{\pi i}{\alpha}}$ 的泰勒展开的常数项，也就是 $\operatorname{Res}\left(f, e^{\frac{\pi i}{\alpha}}\right)$ 为

$$g\left(e^{\frac{\pi i}{\alpha}}\right) = \lim_{z \rightarrow e^{\frac{\pi i}{\alpha}}} \frac{z - e^{\frac{\pi i}{\alpha}}}{1 + z^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha z^{\alpha-1}} \Big|_{z=e^{\frac{\pi i}{\alpha}}} = -\frac{1}{\alpha} e^{\frac{\pi i}{\alpha}}. \quad (3.39)$$

上面我使用了你（可能曾经）很熟悉的罗比达法则来计算极限。

$$I = \frac{2\pi i \operatorname{Res}\left(f, e^{\frac{\pi i}{\alpha}}\right)}{1 - e^{\frac{2\pi i}{\alpha}}} = \frac{2\pi i}{\alpha \left(e^{\frac{\pi i}{\alpha}} - e^{-\frac{\pi i}{\alpha}}\right)} = \frac{\frac{\pi}{\alpha}}{\sin \frac{\pi}{\alpha}}. \quad (3.40)$$

例题 12 的结果：

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^{\alpha}} = \frac{\frac{\pi}{\alpha}}{\sin \frac{\pi}{\alpha}}. \quad (3.41)$$

可以写成一些不同的有趣形式。

例如，(3.41)中作变量替换 $x = e^{\frac{t}{\alpha}}$ ，并记 $\beta = \frac{1}{\alpha}$ ，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\beta t}}{1+e^t} dt = \frac{\pi}{\sin(\beta\pi)}, \quad (3.42)$$

上面的(3.42)本身也可以直接用围道积分计算，请思考应该取怎样的围道。

又如，(3.41)中作变量替换 $t = \frac{x^{\alpha}}{1+x^{\alpha}}$ ，并记 $\beta = \frac{1}{\alpha}$ ，可以得到

$$\int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{-\beta} dt = \frac{\pi}{\sin(\beta\pi)}. \quad (3.43)$$

限于篇幅，以及为了不偏离本书的“简明”主题，我们对围道积分的讨论就此结束。如果你学习这一小节时感到有些困难，请不用担心：围道积分和其他章节的关联不大，直接跳过，进入下一节的学习就行了。

3.3.1 一些补充说明

在你见识过围道积分的威力之后，也许你会产生“所有定积分都可以用围道积分来解决”的错觉。其实并不是所有的定积分都适合用围道积分来解决。有些问题虽然可以用围道积分解决，但用初等知识会更加容易解决。例如我们熟知的高斯积分可以简单地通过自乘转化为二重积分，然后在极坐标直接计算得到。又例如：

$$I = \int_0^1 \ln \sin(\pi x) dx$$

简单地利用 \sin 在 $(0, \pi)$ 内的对称性，可以写出

$$I = 2 \int_0^{1/2} \ln \sin(\pi x) dx = \int_0^1 \ln \sin \frac{\pi x}{2} dx. \quad (3.44)$$

再利用 \sin 和 \cos 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 的对称性，又有

$$I = \int_0^1 \ln \cos \frac{\pi x}{2} dx. \quad (3.45)$$

把(3.44)和(3.45)求平均，并利用正弦的二倍角公式

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln \left[\frac{1}{2} \sin(\pi x) \right] dx = \frac{1}{2} I - \frac{1}{2} \ln 2. \quad (3.46)$$

由此立刻解出 $I = -\ln 2$ ，即

$$\int_0^1 \ln \sin(\pi x) dx = -\ln 2. \quad (3.47)$$

我曾经有一次在课堂上试图用围道积分证明(3.47)，结果因为过于复杂而算崩了，当场有些尴尬。在下课后我还是坚持完成了这个计算（好吧我承认多多少少是为了找回面子），但显然，一开始选择围道积分这个策略就很不明智。

另外，许多教材讨论了“无穷远点 ∞ ”，“在无穷远点解析”这些概念。我的观点是这些概念的引入对本课程来说是不必要的，因为在本课程中涉及这些概念的问题都可以通过变量替换 $t = \frac{1}{z}$ （这样 $z = \infty$ 就映射为 $t = 0$ ）来解决。例如，因为 $t = 0$ 是 $\sin \frac{1}{t}$ 的奇点，所以如果你喜欢，你可以说无穷远点是函数 $\sin z$ 的奇点；因为 t^2 在 $t = 0$ 解析，所以如果你喜欢，你可以说 $\frac{1}{z^2}$ 在 $z = \infty$ 解析；等等。但是，这些说法除了引起概念混乱之外，带来了什么好处呢？

你可能会说：这样就能用“无穷远点的留数”（无穷大的顺时针围道上的积分的 $\frac{1}{2\pi i}$ 倍）来解决一些围道积分问题。对围道积分问题，要格外注意变量替换 $z = \frac{1}{t}$ 会额外在积分式中多出来 $-\frac{1}{t^2}$ 的因子（因为 $dz = -\frac{1}{t^2} dt$ ）。于是 $f(z)$ 在 $z = \infty$ 的留数，实际上是 $-\frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right)$ 在 $t = 0$ 处的留数。这就引起了更多混乱。例如，即使 $f(z)$ 在 $z = \infty$ 解析（也就是说 $f\left(\frac{1}{t}\right)$ 在 $t = 0$ 解析）， $f(z)$ 在 ∞ 的留数也可能不是零（因

为 $-\frac{1}{z}f\left(\frac{1}{z}\right)$ 在 $t=0$ 就未必解析了)。于是，我不得不发出灵魂拷问：就因为懒得做变量替换 $t = \frac{1}{z}$ 而把自己置于各种混乱之中，值得吗？

例题 13: 复变函数

$$\frac{z-1}{z^6+z+1}$$

的所有孤立奇点处的留数之和等于多少？

解答： 取一个巨大的圆 $|z|=R$ ，使得其包含所有的孤立奇点。显然当 $|z|=R$ 时，

$$\left| \frac{z-1}{z^6+z+1} \right| \sim O(R^{-5})$$

于是

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{|z|=R} \frac{z-1}{z^6+z+1} dz = 0.$$

故所有留数之和为零。

思考题： 你能通过作变量替换 $z = \frac{1}{t}$ 来解决上面的例题吗？

3.4 第3章习题

习题 23: 把 $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在环形区域 $1 < |z| < 2$ 内洛朗展开。

习题 24:

$$f(z) = \frac{1}{(1+e^z)\sin z}$$

在圆区域 $|z| < 5$ 内有多少个孤立奇点？

习题 25: 证明 $z=0$ 是 $\frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$ 的奇点，但不是孤立奇点。

习题 26: 证明复变函数 $f(z) = \frac{1}{e^z - 1 - z}$ 在以原点为中心的单位圆 $C = \{z: |z|=1\}$ 内只有一个孤立奇点。然后计算逆时针方向沿着 C 的围道积分 $\oint_C f(z) dz$ 。

习题 27: 计算

$$f(z) = \frac{1}{z^3(1-z)^3}$$

在 $z=1$ 处的留数。

习题 28: 计算

$$f(z) = \frac{\sin^2 z}{(z-\pi)^5}$$

在 $z=\pi$ 处的留数。

习题 29: 计算:

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^3} dz$$

其中积分路径是逆时针方向的圆 $|z| = 1$ 。

习题 30: 计算:

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z-1)^2} dz$$

其中积分路径是逆时针方向的圆 $|z| = 2$ 。

习题 31: 复变函数

$$\frac{z^9}{z^8 + 2z^7 + 3}$$

的所有孤立奇点 (按照本书习惯, 不包含无穷远点) 处的留数之和等于多少?

习题 32: 计算:

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{(10z^6 - 1)(z - 2)} dz$$

其中积分路径为逆时针的单位圆。

习题 33: 计算积分

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x+2)(x+1)} dx.$$

习题 34: 计算积分

$$\int_0^1 \frac{x^{1/4}(1-x)^{3/4}}{(1+x)^3} dx.$$

习题 35: 在挖去一个点的圆盘 $\{z: |z| \leq 1, z \neq 1\}$ 上, 证明:

$$\ln(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n},$$

这里约定 $z=0$ 时, $1-z$ 的幅角为零, 且在区域内 $1-z$ 的幅角连续变化。

提示: 只要证明右边的级数定义了一个连续函数。 $|z| < 1$ 时显然; $|z| = 1$ 时, 设 $z = e^{i\theta}$ ($0 < \theta < 2\pi$), 先证明级数和收敛。令 $S_n = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}$ 。则 $|S_n| \leq \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}}$ 。于是对足够大的 N ,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{z^n}{n} \right| &= \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{S_n - S_{n-1}}{n} \right| \\ &= \left| -\frac{S_{N-1}}{N} + \sum_{n=N}^{\infty} \left[S_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right] \right| \\ &\leq \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \left[\frac{1}{N} + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \right] \\ &= \frac{2}{N \sin \frac{\theta}{2}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

级数和对 z 的连续性类似可证。

习题 36: 根据上一题的结论, 证明: 对 $0 < \theta < 2\pi$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right)$$

以及

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}.$$

习题 37: 当 θ 不是 2π 的整数倍时, 我们总能写出

$$\theta = 2N\pi + \phi,$$

这里 N 为整数, $0 < \phi < 2\pi$ 。

利用上一题的结论证明

$$f(\theta) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} = -\ln\left(2 \sin \frac{\phi}{2}\right) + i \frac{\pi - \phi}{2} \quad (3.48)$$

习题 38: 如果 m 为某个给定的正整数, 对 $0 < \theta < \omega \equiv \frac{2\pi}{m}$, 我们来考虑如何计算:

$$g_k(\theta) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i(nm+k)\theta}}{nm+k}, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (3.49)$$

根据定义容易验证

$$g_k(\theta + j\omega) = e^{ikj\omega} g_k(\theta), \quad j = 0, 1, 2, \dots, m-1; k = 1, 2, \dots, m. \quad (3.50)$$

除了 $j=0$ 的情况是平凡的之外, 上式对 m^2 个量 $g_k(\theta + j\omega)$ ($j = 0, 1, 2, \dots, m-1; k = 1, 2, \dots, m$) 给出了 $m(m-1)$ 个线性的约束方程。另外, 我们还有如下 m 个约束关系:

$$\sum_{k=1}^m g_k(\theta + j\omega) = f(\theta + j\omega), \quad j = 0, 1, 2, \dots, m-1. \quad (3.51)$$

这里的 f 由上一题 (3.48) 给出, 是可以直接计算的。

这样, 联立 (3.50) (除去 $j=0$ 的平凡情况) 和 (3.51) 总计 $m(m-1) + m = m^2$ 个线性方程, 我们原则上可以计算出所有 m^2 个量 $g_k(\theta + j\omega)$ ($j = 0, 1, 2, \dots, m-1; k = 1, 2, \dots, m$)。

利用这种方法, 对 $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ 计算级数和:

$$\cos \theta - \frac{\cos(5\theta)}{5} + \frac{\cos(7\theta)}{7} - \frac{\cos(11\theta)}{11} + \frac{\cos(13\theta)}{13} - \frac{\cos(17\theta)}{17} + \dots$$

4. 解析延拓和 Gamma 函数

4.1 解析函数的邻域近似

解析函数在任意一点 z_0 的邻域内都可以进行泰勒展开,

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2}(z - z_0)^2 + \frac{f^{(3)}(z_0)}{3!}(z - z_0)^3 + \dots \quad (4.1)$$

如果 $f'(z_0) \neq 0$, 那么在 z_0 的邻域 $f(z)$ 可以近似看作是一个线性函数: $f(z) \approx f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$; 如果 $f'(z_0) = 0$ 但 $f''(z_0) \neq 0$, 那么在 z_0 的邻域 $f(z) \approx f(z_0) + \frac{1}{2}f''(z_0)(z - z_0)^2$; ...

总而言之, 如果 $f(z)$ 不是常数, 那么总存在一个最小的正整数 n , 使得 $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. 在 z_0 的足够小的邻域内

$$f(z) \approx f(z_0) + c(z - z_0)^n. \quad (4.2)$$

这里的 $c = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \neq 0$.

按照泰勒展开定理, 只要把邻域取得足够小, 更高次的误差项和 $c(z - z_0)^n$ 相比就可以忽略。为了凸显主要思想, 在本章中我会跳过对更高次的误差的讨论。如果需要一个逻辑上非常严谨的论证, 你就要用标准的 ε - δ 语言把证明补充完整。

解析函数的邻域近似(4.2)是一个很显然的结论, 但它直接导致了解析函数的一系列奇妙的性质。我们下面来稍作欣赏。

4.1.1 保角映射

在图 4.1 中我们展示了解析函数 (在导数非零处) 具有保角映射的特点。在 z_0 处的导数不为零的解析函数 f 把 z 平面上的、相交于 z_0 的曲线 C_1 和 C_2 分别映射

为 f 平面上的、相交于 $f(z_0)$ 的曲线 D_1 和 D_2 。我们来证明： C_1 和 C_2 在 z_0 处（的切线）的夹角，等于 D_1 和 D_2 在 $f(z_0)$ 处（的切线）的夹角。

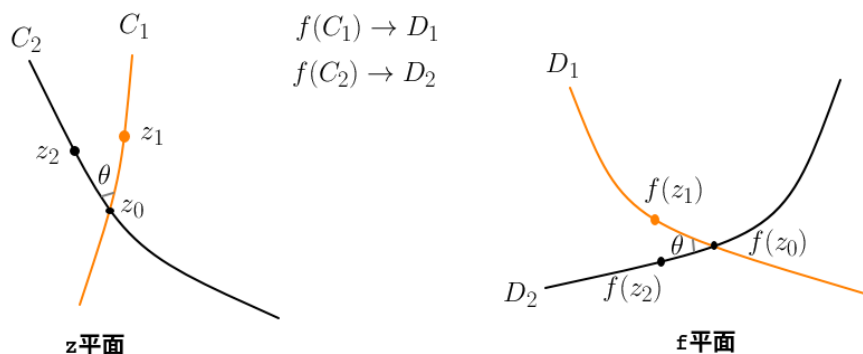


Figure 4.1: 解析函数（在导数非零处）是保角映射的图例说明

因为 $f'(z_0) \neq 0$ ，我们可以在 z_0 附近取邻域近似 $f(z) \approx f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ 。所以对足够靠近 z_0 的，分别在 C_1 和 C_2 上的 z_1 和 z_2 ，有

$$\frac{f(z_2) - f(z_0)}{f(z_1) - f(z_0)} \approx \frac{f'(z_0)(z_2 - z_0)}{f'(z_0)(z_1 - z_0)} = \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}. \quad (4.3)$$

注意当 z_1, z_2 无限逼近 z_0 时，上面的约等号会成为等号， $\frac{f(z_2) - f(z_0)}{f(z_1) - f(z_0)}$ 的辐角会趋向于曲线 D_1 和 D_2 （的切线）的夹角， $\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$ 的辐角会趋向于 C_1 和 C_2 （的切线）的夹角。所以命题得证。

4.1.2 最大模原理

回忆实函数的极大值问题：当实函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的第 $1, 2, \dots, 2n - 1$ (n 为正整数) 阶导数均为零，但第 $2n$ 阶导数小于零时，函数 f 在 x_0 处取到极大值。

这是因为，在 x_0 的足够小的邻域里， $f(x) \approx f(x_0) + \frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!}(x - x_0)^{2n} \leq f(x_0)$ ，最后的等号当且仅当 $x = x_0$ 才能取得。我们之所以能控制邻域内函数的增量 $f(x) - f(x_0)$ ，是因为我们的约定 $x - x_0$ 为实数（辐角是 π 的整数倍）导致了增量 $c(x - x_0)^{2n}$ 能够保持和 c 同号。

对非常数的解析函数而言，无论邻域近似(4.2)中的 n 等于多少，函数的增量——也就是 $f(z) - f(z_0) \approx c(z - z_0)^n$ 的辐角都是可以任意调节的：如果你希望 $c(z - z_0)^n$ 的辐角是 θ ，那么只要取 $z - z_0$ 的辐角为 $\frac{\theta - \arg c}{n}$ 。特别地，你可以取 $z - z_0$ 的辐角为 $\frac{\arg[f(z_0)] - \arg c}{n}$ ，使得 $f(z) - f(z_0)$ 和 $f(z_0)$ 的辐角相同（如果 $f(z_0) = 0$ 则让 $f(z) - f(z_0)$ 的辐角随意就行）。这样 $|f(z)| = |f(z_0)| + |f(z) - f(z_0)| > |f(z_0)|$ 。只要 z_0 在区域内部，我总是能指出一个方向，当 z 沿着这个方向移动时， $|f(z)|$ 会增大。换一句话说，非常数的解析函数 f 的模的最大值不能在区域内部任何一点取到。于是，就有了复分析中赫赫有名的最大模原理：

最大模原理: 在区域内解析, 在区域边界上连续的非常数函数的最大模只能在区域边界上取得。

你可能很快会想到, 既然能在邻域内取函数增量 $f(z) - f(z_0)$ 的辐角和 $f(z_0)$ 的辐角相同, 使得 $|f(z)| > |f(z_0)|$; 那是不是也能在邻域内取函数增量 $f(z) - f(z_0)$ 的辐角和 $f(z_0)$ 的辐角相差 π , 使得 $|f(z)| < |f(z_0)|$? 然后得出非常数的解析函数的最小模也只能在边界上取得?

你差一点就成功了。但很可惜上述论证有一个漏洞: 当 $f(z_0) = 0$ 时, 无论怎样调节 $f(z) - f(z_0)$ 的辐角, 都无法使 $|f(z)| < |f(z_0)|$ 。(显然 $f(z_0) = 0$ 这个特殊情况在证明最大模原理时也可能存在, 但它对证明最大模原理并不造成麻烦。)

于是, 你想出一个办法来拯救你的错误——把最小模原理的陈述改为:

最小模原理: 在区域内解析且没有零点, 在区域边界上连续的非常数函数的最小模只能在区域边界上取得。

现在你的定理没有任何毛病了。只不过——我实在不想伤害你的自尊但是我还是忍不住要说出来——它有点多余。因为如果解析函数 $f(z)$ 没有零点, 那么 $\frac{1}{f(z)}$ 也是解析函数: 对 $\frac{1}{f(z)}$ 运用最大模原理和对 $f(z)$ 运用最小模原理是一样的。

4.1.3 代数基本定理

你肯定知道下面的事实:

代数基本定理: n 次复系数的多项式 ($n \geq 1$) 有 n 个复数根 (重根按重数计算个数)

甚至你可能会点疑惑: 这么显然的事情也能叫做定理?

但仔细一想, 五次和五次以上的多项式不存在一般的求根公式 (这个论断的证明也很有趣, 但和本书的主题无关, 就不做介绍了), 所以 $n \geq 5$ 次的多项式有 n 个复数根这件事并不是那么显然。

我们先来证明非常数的多项式 $P(z)$ 一定有一个零点。这个其实是显然的, 因为在 $z \rightarrow \infty$ 时, $|P(z)| \rightarrow \infty$ 。也就是说如果你在复平面上画个很大的边界, 在边界上 $|P(z)|$ 是会处处很大的。如果 $P(z)$ 没有零点, 这就和最小模原理矛盾了。把这个想法整理成数学语言就是:

证明: 用反证法, 假设多项式 $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \dots + a_1z + a_0$ 在复平面上没有任何零点。我们可以取一个很大的 R 使得

$$R^n > |a_{n-1}|R^{n-1} + |a_{n-2}|R^{n-2} + \dots + |a_1|R + 2|a_0| \quad (4.4)$$

在圆 $|z| \leq R$ 内对 $P(z)$ 使用最小模原理 (其实就是对 $\frac{1}{P(z)}$ 应用最大模原理), $P(z)$ 的最小模只能在边界上取得, 但是在边界 $|z| = R$ 上, 又有

$$|P(z)| \geq |z|^n - (|a_{n-1}||z|^{n-1} + |a_{n-2}||z|^{n-2} + \dots + |a_1||z| + |a_0|) > |a_0| \quad (4.5)$$

所以在圆内处处有 $|P(z)| > |a_0|$ 。这和 $P(0) = a_0$ 矛盾。

当证明存在一个复数根之后, 剩下的就可以简单用数学归纳法完成了。如 n 次多项式 $P(z)$ 有复数根 α , 则通过多项式除法可以得到 $P(z) = (z - \alpha)Q(z)$ (没有余项是因为 $P(\alpha) = 0$), 这里 $Q(z)$ 是 $n - 1$ 次多项式。对 $Q(z)$ 使用归纳假设即可。

4.1.4 解析延拓

如果解析函数 f 在某个点 z_0 的邻域内都等于零, 那么 f 在和 z_0 连通的区域内都是零。否则的话, 如图 4.2 所示, 整个连通区域就能划分为 $f = 0$ 和 $f \neq 0$ 的两个子区域, 两个子区域的公共边界上的点就会出现任意小的邻域内都无法进行泰勒级数展开的情形。这和解析函数在区域内任何一点总能进行泰勒展开 (并且泰勒展开系数 c_n 是由该点的 n 阶导数唯一确定的) 相矛盾。

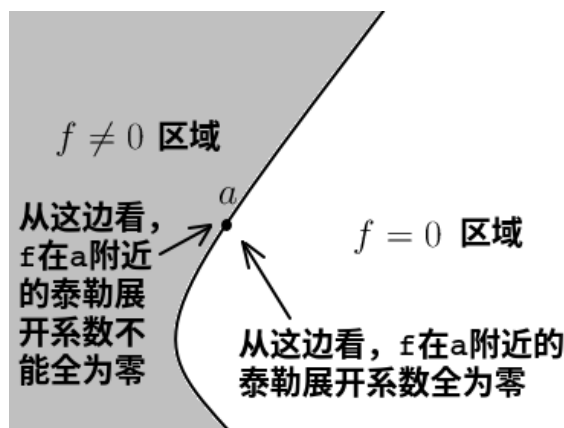


Figure 4.2: 解析函数不能存在整片的恒为零区域和非零区域连通并存的情况, 否则公共边界上无法进行泰勒展开

于是, 我们立刻有下面的解析延拓定理:

解析延拓定理: 如果 f 和 g 是连通区域 T 内的解析函数, 且在区域 T 内某点 z_0 , f 和 g 的泰勒展开级数相同, 那么在整片连通区域 T 内, f 和 g 都相等。

证明: 考虑解析函数 $f - g$, 它在 z_0 的 (泰勒级数收敛的) 邻域内处处为零, 所以 $f - g$ 在整片连通区域内为零。

解析延拓定理也可以表述为：在一小片邻域内相等的两个解析函数，在整片连通区域内都相等。

如果在某个区域内我们用某种方式定义了解析函数 f ，发现它在该区域内和另外一个解析函数 g 相同，并且 g 在连通的更大区域内有定义。那么，我们就可以把解析函数 f 的定义“延拓”到这个更大的区域内（即在更大区域内令 $f = g$ ）。这就是“解析延拓”这个名词的由来。

例如，在单位圆区域 $|z| < 1$ 内我们可以通过幂级数定义解析函数

$$f(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \quad (4.6)$$

然后我们发现它和 $g(z) = \frac{1}{1-z}$ 在单位圆内恒等。于是我们可以把 f 的定义延拓到任意 $z \neq 1$ 处（在 $z \geq 1$ 处只要让 $f = g$ 就行了）。

不得不说，上面的经典例子是个糟糕透顶的例子。你一定感到我说得很对但又等于什么都没有说：痛快点，直接定义 $f = \frac{1}{1-z}$ 不就好了吗？绕这个圈子是想干什么呢？

为了解答你的困惑，下面我们来介绍一个通过“套娃”的方式来进行解析延拓的例子——它将给出本书的第一个特殊函数 Γ 函数的完整定义。

4.2 Gamma 函数

Γ 函数在 $\operatorname{Re}(z) > 0$ 范围内的定义为：

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (4.7)$$

因为 t 在整个积分区间内恒正，按我们对 \ln 符号含义的默认约定，被积函数中的 $t^z = e^{z \ln t}$ 是个单值函数。

对正整数 n ，容易验证

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.8)$$

因此我们有时也把 $\Gamma(z)$ 写成 $(z-1)!$ 。

我们下面用解析延拓的方法把 Γ 函数的定义域扩充到除了一些离散的点之外的整个复平面。

对 $\operatorname{Re}(z) > 0$ ，在积分号下求导：

$$\frac{d\Gamma(z)}{dz} = \int_0^{\infty} t^{z-1} (\ln t) e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (4.9)$$

容易验证这个积分在 $\operatorname{Re}(z) > 0$ 的情况下仍是收敛的并确实是 $\Gamma(z)$ 的导函数，因此 $\Gamma(z)$ 在右半平面内是解析函数。

利用 Γ 函数的定义, 分部积分一次后可以得到递推公式

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (4.10)$$

(也许你更喜欢把它写成 $z! = z \cdot (z-1)!$)

考虑函数

$$\frac{\Gamma(z+1)}{z}$$

它在右半平面和 $\Gamma(z)$ 恒等, 但是又在更大的区域 $\{z: \operatorname{Re}(z) > -1, z \neq 0\}$ 里解析。因此它可以看成 Γ 函数在区域 $\{z: \operatorname{Re}(z) > -1, z \neq 0\}$ 里的解析延拓。

Γ 函数在区域 $\{z: \operatorname{Re}(z) > -1, z \neq 0\}$ 里都有了定义之后, 再考虑函数

$$\frac{\Gamma(z+1)}{z}$$

它在右半平面和 $\Gamma(z)$ 恒等, 但是又在更大的区域 $\{z: \operatorname{Re}(z) > -2, z \neq 0, -1\}$ 里解析。因此它可以看成 Γ 函数在区域 $\{z: \operatorname{Re}(z) > -2, z \neq 0, -1\}$ 里的解析延拓。

Γ 函数在区域 $\{z: \operatorname{Re}(z) > -2, z \neq 0, -1\}$ 里都有了定义之后, 再考虑函数

$$\frac{\Gamma(z+1)}{z}$$

它在右半平面和 $\Gamma(z)$ 恒等, 但是又在更大的区域 $\{z: \operatorname{Re}(z) > -3, z \neq 0, -1, -2\}$ 里解析。因此它可以看成 Γ 函数在 $\{z: \operatorname{Re}(z) > -3, z \neq 0, -1, -2\}$ 里的解析延拓。

这样一直进行下去, 我们得到一个在全复平面上除了 $z=0, -1, -2, -3, \dots$ 之外处处解析的 Γ 函数。在 $z=0, -1, -2, \dots$, Γ 函数是发散的 (可以理解为取值为 ∞)。如果我们定义一个 Γ 倒数函数, $\frac{1}{\Gamma(z)}$, 它就在全复平面解析, 而且 $z=0, -1, -2, \dots$ 都是它的零点。在本章末的习题里, 我们会给出 $\frac{1}{\Gamma(z)}$ 的无穷乘积表达式。

如图 4.3 所示, 我们先来讨论当 Γ 函数的宗量为实数时的情况。需要特别关注的是在 $(0, \infty)$ 内的 Γ 函数的形状。在 $x < 0$ 的区间内, 你只要用递推公式(4.10)进行计算就行了。

我们先来证明一个常用的结论:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (4.11)$$

证明: 按照定义(4.7), 有

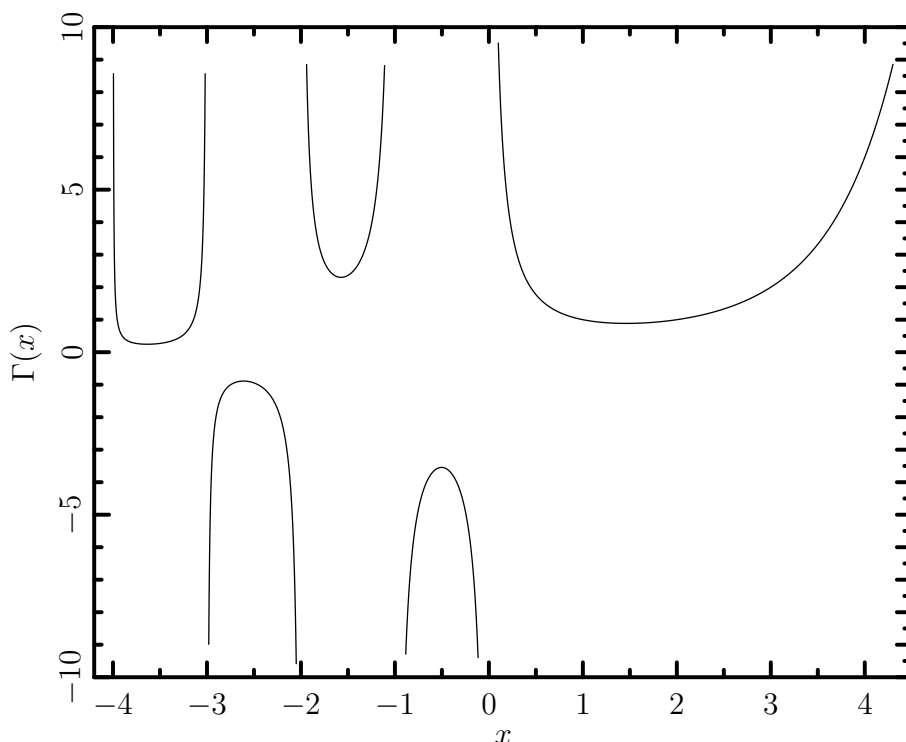
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt \quad (4.12)$$

作变量替换 $t = r^2$, 有

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-r^2} dr = \sqrt{\pi}. \quad (4.13)$$

在最后一步我们利用了熟知的高斯积分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2} dr = \sqrt{\pi}$ 。

再利用递推公式(4.10), 我们还可以计算出 $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$ 等。

Figure 4.3: Γ 函数当宗量为实数时的图像

4.2.1 Stirling 公式

我们再来研究下 $x \rightarrow \infty$ 时 $\Gamma(x)$ 的渐近行为。

Stirling 公式: 当 $x \gg 1$ 时, 有如下的近似表达式

$$\Gamma(x+1) = x! \approx \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x. \quad (4.14)$$

证明: 利用 Γ 函数的定义:

$$x! = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t+x\ln t} dt$$

被积函数在极大值点 $t = x$ 附近贡献较大, 所以把 $-t+x\ln t$ 在 $t = x$ 附近泰勒展开:

$$-t+x\ln t \approx -x+x\ln x - \frac{(t-x)^2}{2x}$$

$$\begin{aligned} x! &\approx \int_0^{\infty} e^{-x+x\ln x} e^{-\frac{(t-x)^2}{2x}} dt \\ &\approx \left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-x)^2}{2x}} dt \\ &= \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x \end{aligned}$$

注意由于当 x 趋向于无穷大时, $t < 0$ 部分积分的贡献趋向于零, 所以我们将积分范围从 $(0, \infty)$ 变为了 $(-\infty, \infty)$ 。

在上面的证明中, 我们略去了对误差的讨论, 所以称不上是一个严谨的证明。不过, 如果你仅仅是因为对计算精度的不满而希望改进 Stirling 公式, 你可以假设

$$\ln(x!) = \ln \left[\sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e} \right)^x \right] + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots$$

然后利用 $(x+1)! = (x+1) \cdot x!$ 来确定待定的系数 c_1, c_2, \dots 最后得到的 Stirling 公式的终级版本为:

$$x! = \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e} \right)^x e^{\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5} - \frac{1}{1680x^7} \dots}, \quad (x > 1). \quad (4.15)$$

实际上, 上述讨论中并不需要限定 x 为实变量, 只要限制辐角 $|\arg z| < \pi$ 就可以了。所以最一般的 Stirling 公式为

$$\ln(z!) = z \ln z - z + \frac{1}{2} \ln(2\pi z) + \frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3} + \dots, \quad (|\arg z| < \pi, |z| > 1). \quad (4.16)$$

或者等价的

$$\ln \Gamma(z) = z \ln z - z + \frac{1}{2} \ln \frac{2\pi}{z} + \frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3} + \dots, \quad (|\arg z| < \pi, |z| > 1). \quad (4.17)$$

像这样的等式被称作是无穷远处的渐近展开。

我们对(4.16)和(4.17)两边求导, 还能得到:

$$\frac{d}{dz} \ln(z!) = \ln z + \frac{1}{2z} - \frac{1}{12z^2} + \frac{1}{120z^4} + \dots, \quad (|\arg z| < \pi, |z| > 1). \quad (4.18)$$

或者等价地

$$\frac{d}{dz} \ln \Gamma(z) = \ln z - \frac{1}{2z} - \frac{1}{12z^2} + \frac{1}{120z^4} + \dots, \quad (|\arg z| < \pi, |z| > 1). \quad (4.19)$$

利用 Stirling 公式, 可以导出一个很有趣的

Γ 函数的 Weierstrass 无穷乘积表示 (Weierstrass's product representation):

对任意复数 z , 有

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n} \right) e^{-\frac{z}{n}} \right]. \quad (4.20)$$

这里

$$\gamma \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln n \right] = 0.57721566490153286060651209\dots \quad (4.21)$$

是欧拉常数 (Euler-Mascheroni constant)。

证明:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(z)} &= \frac{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}{(z+n)!} \\ &= \frac{n!z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{z}{3}\right)\dots\left(1+\frac{z}{n}\right)}{(z+n)!}\end{aligned}\quad (4.22)$$

令 $n \rightarrow \infty$, 并利用 Stirling 公式

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(z)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n}{(z+n)^{n+z}} z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{z}{3}\right)\dots\left(1+\frac{z}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\frac{z}{n}\right)^{-n} e^z n^{-z} z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{z}{3}\right)\dots\left(1+\frac{z}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-z} z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{z}{3}\right)\dots\left(1+\frac{z}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-z \ln n} z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{z}{3}\right)\dots\left(1+\frac{z}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\gamma z - (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n})z} z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{z}{3}\right)\dots\left(1+\frac{z}{n}\right)\end{aligned}\quad (4.23)$$

在证明的过程中, 中间结论 (4.23) 给出了

Γ 函数的欧拉极限:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \lim_{N \rightarrow \infty} \left[N^{-z} \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{z}{n}\right) \right]. \quad (4.24)$$

上面的式子又等价于

Γ 函数的欧拉无穷乘积表示 (Euler's product representation):

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-z} \right]. \quad (4.25)$$

从 (4.20) 可以看出: $\frac{1}{\Gamma(z)}$ 是在全复平面解析的函数, 它的所有一阶零点是: $0, -1, -2, -3, \dots$.

你可能已经感觉到这些内容有些偏离本书的“简明”主题。确实, 当谈到优美的结论时我确实总是有刹不住车的毛病。例如我忍不住又要介绍下面的

Γ 函数乘积公式: 对任意正整数 m 及复数 z , 有

$$\Gamma(mz) = \frac{m^{mz-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}} \prod_{k=0}^{m-1} \Gamma\left(z + \frac{k}{m}\right). \quad (4.26)$$

特别地, 当 $m=2$ 时, 有下面的倍乘公式:

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right). \quad (4.27)$$

证明: 根据 (4.24), 有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\prod_{k=0}^{m-1} \Gamma\left(z + \frac{k}{m}\right)} \\ &= \prod_{k=0}^{m-1} \left[\left(z + \frac{k}{m}\right) \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-z-\frac{k}{m}} \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{z + \frac{k}{m}}{n}\right) \right] \\ &= \prod_{j=0}^{m-1} \left(z + \frac{j}{m}\right) \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-mz-\frac{m-1}{2}} \prod_{n=1}^N \left[\prod_{k=0}^{m-1} \left(1 + \frac{z + \frac{k}{m}}{n}\right) \right] \\ &= \prod_{j=0}^{m-1} \left(z + \frac{j}{m}\right) \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-mz-\frac{m-1}{2}} \prod_{n=1}^N \left\{ \prod_{k=0}^{m-1} \left[\left(1 + \frac{mz}{nm+k}\right) \left(1 + \frac{k}{nm}\right) \right] \right\} \\ &= \prod_{j=0}^{m-1} \left(z + \frac{j}{m}\right) \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-mz-\frac{m-1}{2}} \prod_{n=1}^N \left[\frac{[(n+1)m-1]!}{(nm-1)! n^m m^m} \prod_{k=0}^{m-1} \left(1 + \frac{mz}{nm+k}\right) \right] \\ &= z \frac{(m-1)!}{m^{m-1}} \prod_{j=1}^{m-1} \left(1 + \frac{mz}{j}\right) \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-mz-\frac{m-1}{2}} \prod_{n=1}^N \left[\frac{[(n+1)m-1]!}{(nm-1)! n^m m^m} \prod_{k=0}^{m-1} \left(1 + \frac{mz}{nm+k}\right) \right] \\ &= z \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{[m(N+1)-1]!}{m^{(N+1)m-1} (N!)^m} N^{-mz-\frac{m-1}{2}} \prod_{j=1}^{(N+1)m-1} \left(1 + \frac{mz}{j}\right) \\ &= z \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(mN)!(mN)^{m-1}}{m^{(N+1)m-1} (N!)^m} N^{-mz-\frac{m-1}{2}} \prod_{j=1}^{Nm} \left(1 + \frac{mz}{j}\right) \\ &= z \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(mN)!}{m^{mN} (N!)^m} N^{-mz+\frac{m-1}{2}} \prod_{j=1}^{Nm} \left(1 + \frac{mz}{j}\right) \\ &= z \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi mN} \left(\frac{mN}{e}\right)^{mN}}{m^{mN} (2\pi N)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{N}{e}\right)^{Nm}} N^{-mz+\frac{m-1}{2}} \prod_{j=1}^{Nm} \left(1 + \frac{mz}{j}\right) \\ &= \frac{m^{mz-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}} (mz) \lim_{N \rightarrow \infty} (mN)^{-mz} \prod_{j=1}^{Nm} \left(1 + \frac{mz}{j}\right) \\ &= \frac{m^{mz-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}} \frac{1}{\Gamma(mz)} \end{aligned}$$

最后一步, 我们逆用了公式(4.24)。证明过程中我们还使用了 Stirling 公式。这个证

明方法谈不上优美。不过，思路很直截了当。

4.2.2 Beta 函数和互余宗量关系

对 $\alpha, \beta > 0$, B 函数定义为:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx. \quad (4.28)$$

它和 Γ 函数有如下关系:

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \quad (4.29)$$

证明: 根据 Γ 函数定义:

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du \int_0^\infty v^{\beta-1} e^{-v} dv$$

做替换 $u = s^2, v = t^2$;

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = 4 \int_0^\infty s^{2\alpha-1} e^{-s^2} ds \int_0^\infty t^{2\beta-1} e^{-t^2} dt$$

然后转换到极坐标 $s = r \cos \theta, t = r \sin \theta$;

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = 4 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2\alpha+2\beta-2} r dr \int_0^{\pi/2} \cos^{2\alpha-1} \theta \sin^{2\beta-1} \theta d\theta$$

最后做变量替换 $w = r^2, x = \cos^2 \theta$, 即得证。

思考题: 用两种不同的变量替换, 把 $\int_{-1}^1 (1-x^2)^{z-1} dx$ 转化为 B 函数, 给出倍乘公式 (4.27) 的另一种证明。

回忆 (好吧你可能很难回忆得起来) 用围道积分得到的结果 (3.43), 可以得到 $B(z, 1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ ($0 < z < 1$), 再根据 (4.29), 就有

Γ 函数的互余宗量关系:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad (4.30)$$

互余宗量关系 (4.30) 虽然是在 $0 < z < 1$ 的情况下证明的, 但因为等式两边在 $z = \frac{1}{2}$ 附近的泰勒展开系数全部相同, 所以可以把该恒等式解析延拓到除去 z 为整数外的全复平面。

B 函数还能推广为下面的

n 维限和积分公式:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_n} x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2-1} \dots x_n^{\alpha_n-1} f(x_1+x_2+\dots+x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\dots\Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n)} \int_0^1 f(u) u^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n-1} du. \end{aligned} \quad (4.31)$$

其中等式左边的积分区域 $\Omega_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0; x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1\}$.

我所能想出来的一个最简单的证明要用到狄拉克 δ 函数, 因此请原谅我把证明推迟到 5.2 节。

4.2.3 Gamma 函数相关问题举例

下面我们通过几个例题来熟悉 $\Gamma(x)$ 的性质。

例题 14: 证明: 当 $x > 0$ 时, $\Gamma''(x) > 0$ 。

解答: 直接对(4.7)求导两次, 有

$$\Gamma''(x) = \int_0^\infty t^{x-1} (\ln t)^2 e^{-t} dt > 0. \quad (4.32)$$

例题 15: 当在 $x \in (0, \infty)$ 内考虑 Γ 函数, 证明存在 $1 < \mu < 2$, 使得 $\Gamma(x)$ 在 $x = \mu$ 处取得最小值。

解答: 由于 $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, 根据罗尔定理, 存在 $1 < \mu < 2$ 使得 $\Gamma'(\mu) = 0$ 。又由于 $\Gamma''(x) > 0$ (见上个例题), $\Gamma'(x)$ 是个单调上升函数。所以 μ 是唯一的最小值点。

例题 16: 证明: 当 $x > 0$ 时, $\Gamma(x) > \frac{1}{e}$ 。

解答: 当 $x > 1$, 根据(4.7), 有:

$$\Gamma(x) > \int_1^\infty t^{x-1} e^{-t} dt > \int_1^\infty e^{-t} dt = \frac{1}{e}. \quad (4.33)$$

当 $0 < x \leq 1$, 根据递推公式(4.10)有

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1) \geq \Gamma(x+1) > \frac{1}{e}. \quad (4.34)$$

在最后一步我们利用了 $x+1 > 1$ 以及上面已经证明了的结论(4.33)。

例题 17: 把 $\Gamma(\frac{1}{3})$, $\Gamma(\frac{4}{3})$, $\Gamma(\frac{7}{3})$, $\Gamma(\frac{10}{3})$ 这四个数按从小到大排序。

解答: 根据 (4.7), 显然当 $x > 0$ 时, $\Gamma(x) > 0$ 。所以待排序的四个数均为正数。此外, 根据递推公式(4.10), 有

$$\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \quad (4.35)$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{4}{3}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{9}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \quad (4.36)$$

$$\Gamma\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{7}{3}\Gamma\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{28}{27}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \quad (4.37)$$

$$(4.38)$$

所以排序的结果是 $\Gamma(\frac{4}{3}) < \Gamma(\frac{7}{3}) < \Gamma(\frac{1}{3}) < \Gamma(\frac{10}{3})$ 。

例题 18: 证明

$$\Gamma'(1) = -\gamma. \quad (4.39)$$

解答: 在递推公式(4.10)两边求导, 有

$$\Gamma'(z+1) = z\Gamma'(z) + \Gamma(z). \quad (4.40)$$

两边除以 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, 就有

$$\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} + \frac{1}{z}. \quad (4.41)$$

反复利用这个递推公式, 可以得到

$$\Gamma'(1) = \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right). \quad (4.42)$$

再利用 Stirling 公式(4.18)估算

$$\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} = \ln n + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (4.43)$$

于是令 $n \rightarrow \infty$ 即得证。

例题 19: 计算 $\Gamma''(1)$

解答: 令 $f(x) = \ln \Gamma(x)$, 则利用互余宗量关系, 可以计算出

$$\begin{aligned}
 f''(1) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(1+\varepsilon) + f(1-\varepsilon) - 2f(1)}{\varepsilon^2} & (4.44) \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln[\Gamma(1+\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)]}{\varepsilon^2} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln[\varepsilon\Gamma(\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)]}{\varepsilon^2} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln\left[\frac{\pi\varepsilon}{\sin(\pi\varepsilon)}\right]}{\varepsilon^2} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-\ln\left[\frac{\sin(\pi\varepsilon)}{\pi\varepsilon}\right]}{\varepsilon^2} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-\ln\left[1 - \frac{\pi^2}{6}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)\right]}{\varepsilon^2} \\
 &= \frac{\pi^2}{6} & (4.45)
 \end{aligned}$$

又根据上个例题的结论

$$f''(1) = \frac{\Gamma''(1)}{\Gamma(1)} - \left[\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}\right]^2 = \Gamma''(1) - \gamma^2 \quad (4.46)$$

这里 $\gamma = 0.5772156649\dots$ 是欧拉常数。于是

$$\Gamma''(1) = \frac{\pi^2}{6} + \gamma^2. \quad (4.47)$$

等式(4.44)很容易用泰勒展开证明, 它是数值计算二阶导数常用的方法。

在上面的例题中我们看到计算 $\ln \Gamma(z)$ 的各阶导数比直接计算 $\Gamma(z)$ 的各阶导数要容易。因为 Γ 函数的增长速度非常快, 所以当涉及具体数值计算时研究增长速度缓慢得多的函数 $\ln \Gamma(z)$ 是比较明智的选择。

在文献 [1] 中还着重介绍了 $\ln \Gamma(z)$ 的导函数 (文献中一般称为 digamma 函数)

$$\psi(z) \equiv \frac{d}{dz} [\ln \Gamma(z)] = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}. \quad (4.48)$$

在递推公式以及互余宗量关系两边取对数并求导, 我们知道

$$\psi(z+1) - \psi(z) = \frac{1}{z}. \quad (4.49)$$

以及

$$\psi(1-z) - \psi(z) = \pi \cot(\pi z). \quad (4.50)$$

结合上面两式可以得到

$$\psi(-z) - \psi(z) = \frac{1}{z} + \pi \cot(\pi z). \quad (4.51)$$

另外, 渐近公式(4.19) 给出了

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\psi(n+z) - \ln n] = 0. \quad (4.52)$$

思考题: 利用上面几条性质证明:

对 $a \neq 0$, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{1}{2a^2} [1 + \pi a \coth(\pi a)]. \quad (4.53)$$

对非整数 a , 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 - a^2} = -\frac{1}{2a^2} [1 + \pi a \cot(\pi a)]. \quad (4.54)$$

提示: 把 $\frac{1}{n+z}$ 写成 $\psi(z+n+1) - \psi(z+n)$, 然后利用性质(4.52)。具体过程可以参考文献 [1]。

如果你能独立解决上述思考题。那么你肯定意识到了 ψ 函数可以用来求两组符号交错的无穷等差数列的倒数和。事实上, 在 (4.20) 两边取对数并求导, 可以得到

$$\psi(z) = -\frac{1}{z} - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+z} \right). \quad (4.55)$$

从上式你一眼就能看出前面例题的结论 $\psi(1) = -\gamma$ 。

在 (4.49) 两边连续求导, 还可以得到

$$\psi'(z+1) - \psi'(z) = -\frac{1}{z^2}. \quad (4.56)$$

$$\psi''(z+1) - \psi''(z) = \frac{2}{z^3}. \quad (4.57)$$

这些结果，结合同样由渐近公式(4.19)给出的

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi'(n+z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi''(n+z) = \dots = 0. \quad (4.58)$$

有时可以用来求无穷等差数列的平方、立方……倒数和。当然，这些无穷级数和与 ψ 函数的关系也可以通过把 (4.55) 两边求导若干次得到。

在乘积公式 (4.26) 两边取对数并求导，可以得到：

$$\psi(mz) = \frac{\sum_{k=0}^{m-1} \psi\left(z + \frac{k}{m}\right)}{m} + \ln m, \quad (m \in \mathbb{Z}^+). \quad (4.59)$$

特别地，当 $m = 2$ 时，

$$\psi(2z) = \frac{\psi(z) + \psi\left(z + \frac{1}{2}\right)}{2} + \ln 2. \quad (4.60)$$

不管怎么说，所有这些计算的前提是你能求出 ψ 函数以及它的各阶导函数，或者像前面的思考题中那样利用 ψ 函数的性质把两个 ψ 函数消去。但是，有时候情况是反过来的， ψ 函数或者它的导函数需要用级数和来计算。例如，利用上一章末尾的几道习题，你可以计算很多整数等差数列的（交错符号）倒数和（先对一般 θ 计算然后令 $\theta \rightarrow 0^+$ ）。这个方法虽然计算量很大，但是可以计算出几乎所有有理数的 ψ 函数值。下面列举了一些相对简单的结果。对于我这样不擅长计算的人来说，更复杂的质数分母的情况（例如 $\psi\left(\frac{1}{7}\right)$ ）的计算量过于庞大，只能暂时放弃。此外， ψ 在整数和半整数的导数可以用例题 19 的方法来计算，我也列了几个结果。

$$\psi(1) = -\gamma \quad (4.61)$$

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\ln 2 \quad (4.62)$$

$$\psi\left(\frac{1}{3}\right) = -\gamma - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{2}\ln 3 \quad (4.63)$$

$$\psi\left(\frac{1}{5}\right) = -\gamma - \frac{5}{4}\ln 5 - \frac{\sqrt{5}}{2}\ln \frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{\pi\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{10} \quad (4.64)$$

$$\psi\left(\frac{2}{5}\right) = -\gamma - \frac{5}{4}\ln 5 - \frac{\sqrt{5}}{2}\ln \frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{\pi\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{10} \quad (4.65)$$

$$\psi'(1) = \frac{\pi^2}{6} \quad (4.66)$$

$$\psi'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2} \quad (4.67)$$

由这些结果, 结合(4.49)至(4.60)这些性质, 很容易导出

$$\psi\left(\frac{2}{3}\right) = -\gamma + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{2}\ln 3 \quad (4.68)$$

$$\psi\left(\frac{1}{4}\right) = -\gamma - \frac{\pi}{2} - 3\ln 2 \quad (4.69)$$

$$\psi\left(\frac{3}{4}\right) = -\gamma + \frac{\pi}{2} - 3\ln 2 \quad (4.70)$$

$$\psi\left(\frac{3}{5}\right) = -\gamma - \frac{5}{4}\ln 5 - \frac{\sqrt{5}}{2}\ln \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{\pi\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{10} \quad (4.71)$$

$$\psi\left(\frac{4}{5}\right) = -\gamma - \frac{5}{4}\ln 5 - \frac{\sqrt{5}}{2}\ln \frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{\pi\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{10} \quad (4.72)$$

$$\psi\left(\frac{1}{6}\right) = -\gamma - \frac{\sqrt{3}}{2}\pi - 2\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3 \quad (4.73)$$

$$\psi\left(\frac{5}{6}\right) = -\gamma + \frac{\sqrt{3}}{2}\pi - 2\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3 \quad (4.74)$$

以及一些宗量相差为整数的平凡结果 (例如 $\psi'(-\frac{1}{2}) = 4 + \psi(\frac{1}{2}) = 4 + \frac{\pi^2}{2}$), 等等。

下面我举些例子来说明我是如何如何得到这些结果的。

例题 20: 计算 $\psi(\frac{1}{2})$ 。

解答: 在(4.60)中令 $z = \frac{1}{2}$, 有

$$\psi(1) = \frac{\psi(\frac{1}{2}) + \psi(1)}{2} + \ln 2.$$

再利用前面已经用多种方法证明过的 $\psi(1) = -\gamma$, 就可以解出

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\ln 2.$$

例题 21: 计算 $\psi(\frac{1}{4})$ 。

解答: 在(4.60)中令 $z = \frac{1}{4}$, 有

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\psi(\frac{1}{4}) + \psi(\frac{3}{4})}{2} + \ln 2$$

再在 (4.50) 中令 $z = \frac{1}{4}$, 有

$$\psi\left(\frac{1}{4}\right) - \psi\left(\frac{3}{4}\right) = -\pi$$

再利用已知的 $\psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\ln 2$, 即可解出

$$\psi\left(\frac{1}{4}\right) = -\gamma - \frac{\pi}{2} - 3\ln 2.$$

上面这些没有任何难度的计算想必有点让你觉得无趣, 是时候来点真材实料了。我假定你已经根据提示解答了上一章末尾的几道习题, 因为这是我计算的出发点。

例题 22: 计算 $\psi\left(\frac{1}{5}\right)$ 。

解答: 对 $0 < \theta < 2\pi$ 定义

$$f(\theta) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}, \quad (4.75)$$

以及

$$g_k(\theta) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i(5n+k)\theta}}{5n+k}. \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5). \quad (4.76)$$

下面我们将省略宗量, 简记

$$f_j \equiv f\left(\theta + \frac{2\pi j}{5}\right), \quad (j = 1, 2, 3, 4). \quad (4.77)$$

显然有

$$f_j = \sum_{k=1}^5 g_k\left(\theta + \frac{2j\pi}{5}\right) = \sum_{k=1}^5 \omega^{jk} g_k(\theta). \quad (4.78)$$

这里我们定义了 $\omega = e^{\frac{2\pi i}{5}}$, 容易得到

$$\omega^5 = 1, \quad (4.79)$$

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0, \quad (4.80)$$

$$\omega + \omega^4 = 2\cos\frac{2\pi}{5}, \quad (4.81)$$

$$\omega - \omega^4 = 2i\sin\frac{2\pi}{5}, \quad (4.82)$$

$$\omega^2 + \omega^3 = -2\cos\frac{\pi}{5}, \quad (4.83)$$

$$\omega^2 - \omega^3 = 2i\sin\frac{\pi}{5} \quad (4.84)$$

等性质。此外，注意 (4.80)，(4.81)，和 (4.83) 联合可以给出（也许你并不那么熟悉的）一个等式：

$$\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}. \quad (4.85)$$

注意从上式，以及三角函数的倍角公式等，你可以解出 $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}$ ， $\cos \frac{2\pi}{5} = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}$ ，以及 $\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ ， $\sin \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ 等。我们将在最后一步用到这些数值。

下面我将简略地记 $x_k = g_k(\theta) - g_5(\theta)$ 。于是 (4.78) 可以写成

$$\omega x_1 + \omega^2 x_2 + \omega^3 x_3 + \omega^4 x_4 = f_1, \quad (4.86)$$

$$\omega^2 x_1 + \omega^4 x_2 + \omega x_3 + \omega^3 x_4 = f_2, \quad (4.87)$$

$$\omega^3 x_1 + \omega x_2 + \omega^4 x_3 + \omega^2 x_4 = f_3, \quad (4.88)$$

$$\omega^4 x_1 + \omega^3 x_2 + \omega^2 x_3 + \omega x_4 = f_4. \quad (4.89)$$

注意我们利用 (4.80) 把 $g_5(\theta)$ 的系数都分配到前面的各个 x_k 里了。

利用 (4.55) 容易看出当 $\theta \rightarrow 0$ 时，

$$\psi\left(\frac{1}{5}\right) = -\gamma - 5x_1. \quad (4.90)$$

根据 (3.48)，当 $\theta \rightarrow 0$ 时，

$$f_j \rightarrow -\ln\left(2 \sin \frac{k\pi}{5}\right) + \frac{(5-2k)\pi}{10}, \quad (j=1,2,3,4). \quad (4.91)$$

所以，计划很明确了：在上式给出了 f_1, f_2, f_3, f_4 的情况下，求解(4.86)至(4.89)的四元一次方程组中的 x_1 ，然后代入 (4.90) 解决问题。另外，我们知道当 $\theta \rightarrow 0$ 时，每个 x_k 都是实数，所以计算过程中保留实部就可以了。这可以简化一部分计算。

把 (4.86) 加上 (4.89)，(4.87) 加上 (4.88)，可以得到：

$$2 \cos \frac{2\pi}{5} (x_1 + x_4) - 2 \cos \frac{\pi}{5} (x_2 + x_3) = f_1 + f_4, \quad (4.92)$$

$$-2 \cos \frac{\pi}{5} (x_1 + x_4) + 2 \cos \frac{2\pi}{5} (x_2 + x_3) = f_2 + f_3, \quad (4.93)$$

联立即可算出

$$x_1 + x_4 = -\frac{(f_1 + f_4) \cos \frac{2\pi}{5} + (f_2 + f_3) \cos \frac{\pi}{5}}{\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5}} \quad (4.94)$$

这里我们用到了恒等式 $\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$ 。

因为只需要保留实部，而且 f_1 和 f_4 实部相等， f_2 和 f_3 实部相等，所以

$$x_1 + x_4 = \frac{2 \cos \frac{2\pi}{5} \ln\left(2 \sin \frac{\pi}{5}\right) + 2 \cos \frac{\pi}{5} \ln\left(2 \sin \frac{2\pi}{5}\right)}{\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5}}. \quad (4.95)$$

用同样的方法 ((4.86) 减去 (4.89), (4.87) 减去 (4.88)) 可以算出

$$x_1 - x_4 = \frac{\pi (3 \sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5})}{10 (\sin^2 \frac{\pi}{5} + \sin^2 \frac{2\pi}{5})}. \quad (4.96)$$

于是 (4.95) 和 (4.96) 求平均得到

$$x_1 = \frac{\cos \frac{2\pi}{5} \ln (2 \sin \frac{\pi}{5}) + \cos \frac{\pi}{5} \ln (2 \sin \frac{2\pi}{5})}{\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5}} + \frac{\pi (3 \sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5})}{20 (\sin^2 \frac{\pi}{5} + \sin^2 \frac{2\pi}{5})}. \quad (4.97)$$

把各个三角函数值代入并化简, 得到:

$$x_1 = \frac{1}{4} \ln 5 + \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{\pi\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{50}. \quad (4.98)$$

代入 (4.90), 最终得到:

$$\psi\left(\frac{1}{5}\right) = -\gamma - \frac{5}{4} \ln 5 - \frac{\sqrt{5}}{2} \ln \frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{\pi\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{10}. \quad (4.99)$$

最后我们来看一些 Stirling 公式和 n 维限和积分公式的一些应用。

例题 23: 随机抛 100 次硬币, 估算恰好有 50 次正面向上的概率。

解答: 假设每次有正反两面等概率, 结果整个过程一共有 2^{100} 种可能性。其中 50 次正面向上的过程有 (100 次里选 50 次的组合数) $\frac{100!}{(50!)^2}$ 种。所以概率

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2^{100}} \times \frac{100!}{(50!)^2} \\ &\approx \frac{1}{2^{100}} \times \frac{\sqrt{200\pi} \left(\frac{100}{e}\right)^{100}}{100\pi \left(\frac{50}{e}\right)^{100}} \\ &= \frac{1}{10} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \\ &\approx 0.080 \end{aligned} \quad (4.100)$$

你可以尝试用 Stirling 公式的加强版来计算更加精确的结果。

例题 24: 计算 n -维空间的半径为 1 的球的体积 V_n (n 为任意正整数)。

解答:

$$V_n = \int_{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2 \leq 1} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

利用对称性可以写成

$$V_n = 2^n \int_{x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0; x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2 \leq 1} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

作变量替换 $x_i = \sqrt{y_i}$,

$$V_n = \int_{\Omega_n} y_1^{-\frac{1}{2}} y_2^{-\frac{1}{2}} \dots y_n^{-\frac{1}{2}} dy_1 dy_2 \dots dy_n$$

再利用 n 维限和积分公式:

$$V_n = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^n}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^1 u^{\frac{n}{2}-1} du = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{2}{n} = \frac{\pi^{n/2}}{(\frac{n}{2})!}$$

例题 25: 满足标准正态分布

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

的随机变量 x 的 100 次独立采样值为 x_1, x_2, \dots, x_{100} ; 请估算 $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{100}^2 > 200$ 的概率。

解答: 我们先考虑 n 个独立地满足标准正态分布的变量 x_1, x_2, \dots, x_n 的平方和不大 于 s ($s \geq 0$) 的概率:

$$P_n(s) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2 < s} e^{-\frac{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}{2}} dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

由正态分布的对称性, 可以把积分限定在 $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ 的范围内:

$$P_n(s) = \frac{2^n}{(2\pi)^{n/2}} \int_{x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0; x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2 < s} e^{-\frac{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}{2}} dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

做变量替换 $x_i = \sqrt{sy_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 并利用 n 维限和积分公式:

$$\begin{aligned} P_n(s) &= \frac{s^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\Omega_n} y_1^{-\frac{1}{2}} y_2^{-\frac{1}{2}} \dots y_n^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{s(y_1+y_2+\dots+y_n)}{2}} dy_1 dy_2 \dots dy_n \\ &= \frac{s^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{n/2}} \frac{[\Gamma(\frac{1}{2})]^n}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^1 e^{-\frac{su}{2}} u^{\frac{n}{2}-1} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{\frac{s}{2}} e^{-t} t^{\frac{n}{2}-1} dt. \end{aligned} \tag{4.101}$$

我们需要计算的是：

$$p = 1 - P_{100}(200) = \frac{1}{\Gamma(50)} \int_{100}^{\infty} t^{49} e^{-t} dt = \frac{1}{\Gamma(50)} \int_{100}^{\infty} e^{-t+49 \ln t} dt$$

被积函数随着 t 增大而迅速减少。因此我们在 $t = 100$ 附近做泰勒展开

$$-t + 49 \ln t \approx -100 + 49 \ln 100 - 0.51(t - 100)$$

积分得到

$$\int_{100}^{\infty} t^{49} e^{-t} dt \approx e^{-100+49 \ln 100} \int_{100}^{\infty} e^{-0.51(t-100)} dt \approx \frac{e^{-100+49 \ln 100}}{0.51}$$

再利用 Stirling 公式，

$$p \approx \frac{e^{-100+49 \ln 100 - (-49+49 \ln 49)}}{0.51 \times \sqrt{98\pi}} \approx 1.2 \times 10^{-8}.$$

在学习本章的内容时，如果觉得 Γ 函数的各种性质过于复杂而一时无法掌握，也不要着急。在第一遍学习时先熟悉最简单的积分定义和递推公式，粗粗扫视一遍其他的内容，在今后用到时再来回顾就可以了。

4.3 第4章习题

习题 39: 计算积分 $\int_0^1 \sqrt[3]{x(1-x)} dx$.

习题 40: 如图，复平面上的曲线 C_1 和 C_2 相交于原点 ($z = 0$)，过原点分别作 C_1 和 C_2 的切线，得到两切线间的夹角为 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 。现在用函数 $e^{\sin^2 z}$ 把曲线 C_1 映射为

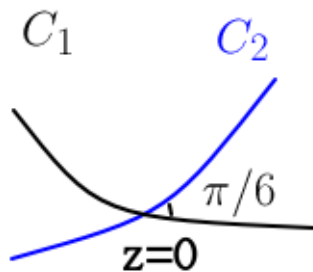


Figure 4.4: 40 题图

$$D_1 = \{e^{\sin^2 z} : z \in C_1\},$$

把曲线 C_2 映射为

$$D_2 = \{e^{\sin^2 z} : z \in C_2\}.$$

那么 D_1 和 D_2 显然会在复平面上相交于 $z = 1$ 。过 $z = 1$ 分别作 D_1 和 D_2 的切线，这两条切线之间的夹角等于多少？

习题 41: 在圆 $|z| = 1$ 上定义复变函数：

$$f(z) = f(x + iy) = \frac{x^2 - y^2 + 2x - 2(x+1)yi}{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 4x + 4)}$$

其中 x, y 分别是 z 的实部和虚部。计算逆时针方向沿着围道的积分

$$\oint_{|z|=1} f(z) dz$$

习题 42: 已知 $f(z)$ 除去有限个孤立奇点之外，在全复平面上是解析函数。如果对任意 $0 < \theta < 2\pi$ ，都有

$$f(e^{i\theta}) + \frac{e^{-i\theta}}{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = 0.$$

计算 $f(\frac{1}{2})$ 的值。

习题 43: 方程 $\Gamma(x) = 0.9$ 有多少个正实数解？

习题 44: 计算

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{10} x dx.$$

习题 45: 计算积分

$$\int_0^{\infty} x^8 \sin(x^{10}) dx$$

习题 46: 已知全平面上解析的函数 f 满足

$$f(0) = 1,$$

以及对任意 z ,

$$|f(z)| > 2|z| - 1.$$

根据这两个条件可以推理出某个区域内一定包含 $f(z)$ 的零点，并且这个区域不能再缩小（即如果去掉任意一点，都将无法保证区域内有零点）。这个区域的面积是多少？

习题 47: 对非负整数 n ，证明 $\Gamma(z)$ 在孤立奇点 $z = -n$ 处的留数为 $\frac{(-1)^n}{n!}$ 。

习题 48: 对 $x > 1$ 以及任意实数 y 证明：

$$|\Gamma(x + iy)| \leq \Gamma(x). \quad (4.102)$$

习题 49: 定义 $\psi(z) \equiv \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z)$ ，仿照本章例题的方法，证明 $\psi'(\frac{1}{2}) = \frac{\pi^2}{2}$ 。

习题 50: 定义 $\psi(z) \equiv \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z)$, 证明:

$$\psi\left(\frac{1}{10}\right) = -\gamma - 2\ln 2 - \frac{5}{4}\ln 5 + \frac{3\sqrt{5}}{2}\ln \frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{\pi}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

. 并由此计算级数和

$$1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{20} + \frac{1}{21} - \frac{1}{30} + \dots$$

习题 51: Stirling 公式的另一种推导方法:

对 $p \geq 0$, 定义

$$F(p) \equiv \int_p^{p+1} \ln \Gamma(x) dx.$$

很容易证明

$$\frac{dF}{dp} = \ln p.$$

利用互余宗量关系, 以及(3.47)的结论, 你还能证明

$$F(0) = \frac{1}{2} \ln(2\pi)$$

对 p 积分可以得到

$$F(p) = \frac{1}{2} \ln(2\pi) + p \ln p - p.$$

然后根据定积分的几何意义, 可以近似取

$$\ln(x!) \approx F\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

再做适当近似后, 导出 Stirling 公式。

习题 52: 证明: 对除了 $0, -1, -2, \dots$ 外的所有复数 z , 有

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} + \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (4.103)$$

习题 53: 证明: 对所有复数 z ,

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^t t^{-z} dt. \quad (4.104)$$

其中积分围道 C 如下图所示, 从负实轴下方 $\infty \times e^{-i\pi}$ 出发, 逆时针绕原点一周, 再从负实轴上方回到 $\infty \times e^{i\pi}$ 。

习题 54: 证明:

$$|\Gamma(iy)| = \sqrt{\frac{\pi}{y \sinh(\pi y)}}, \quad (y \neq 0, y \in \mathcal{R}). \quad (4.105)$$

以及

$$\left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right) \right| = \sqrt{\frac{\pi}{\cosh(\pi y)}}, \quad (y \in \mathcal{R}) \quad (4.106)$$

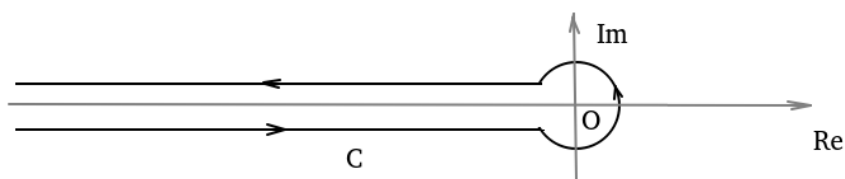


Figure 4.5: 题 53 图

习题 55: 估算

$$\prod_{k=0}^{10^{16}} \left(1 + \frac{3}{4k+1} \right).$$

保留 2 位有效数。

习题 56: 抛 6000 次质地均匀的骰子, 每个面 (1, 2, 3, 4, 5, 6) 恰好各出现 1000 次的概率大约为多少?

习题 57: 理想气体中任取 100 个分子, 这 100 个分子的方均根速率超过所有分子的方均根速率的 2 倍的概率大概是多大?

习题 58: 定义 $\psi(z) \equiv \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z)$, 请计算级数和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\psi(n) - \ln n + \frac{1}{2n} \right].$$

习题 59: 黎曼 ζ 函数在 $\operatorname{Re} z > 1$ 处定义为:

$$\zeta(z) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}, \quad \operatorname{Re} z > 1. \quad (4.107)$$

证明在 $|z-1| < 1$ 内有展开式

$$\ln \Gamma(z) = -\gamma(z-1) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n} (z-1)^n. \quad (4.108)$$

习题 60: 黎曼 ζ 函数在 $\operatorname{Re} z > 1$ 处由 (4.107) 定义。证明, 它可以解析延拓到除了 $z=1$ 以外的全复平面。且满足:

$$\zeta(z) = 2^z \pi^{z-1} \sin \frac{\pi z}{2} \Gamma(1-z) \zeta(1-z). \quad (4.109)$$

提示: 对 $\operatorname{Re} z > 1$ 证明

$$\pi^{-z/2} \zeta(z) \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) = -\frac{1}{z(1-z)} + \int_1^{\infty} \left(t^{-\frac{z+1}{2}} + t^{\frac{z-2}{2}} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi t} \right) dt.$$

然后解析延拓上式。另外, 上式右边显然满足 $z \leftrightarrow 1-z$ 的对称性。

题外故事: 从(4.109)可以算出 $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$ 。在有些科普读物中, 会把这个结果

(按照(4.107)) 解读为: 所有自然数的和为 $-\frac{1}{12}$ 。这种解读虽然不正确, 但确实很有趣。

习题 61: 黎曼 ζ 函数在 $\operatorname{Re} z > 1$ 处由 (4.107) 定义, 它可以解析延拓到除了 $z = 1$ 以外的全复平面。

(1) 计算 $\zeta(z)$ 在 $z = 1$ 处的留数。

(2) 证明: $-2, -4, -6, -8, \dots$ 都是 $\zeta(z)$ 的零点, 且除了这些零点之外, $\zeta(z)$ 的其他零点的实部一定在区间 $[0, 1]$ 内。

题外故事: 黎曼猜想 $\zeta(z)$ 的其他零点的实部一定是 $\frac{1}{2}$, 但他没能给出证明。这就是数学中最为著名的, 两百年来无人能解的难题——黎曼假设。

积分变换

5	狄拉克 delta 函数	89
5.1	狄拉克 delta 函数	
5.2	delta 函数的积分性质	
5.3	高维空间的 delta 函数	
5.4	δ 复合函数	
5.5	第 5 章习题	
6	傅里叶变换	95
6.1	复矩阵简介	
6.2	函数的离散表示	
6.3	傅里叶变换和它的反演公式	
6.4	高维空间的傅里叶变换	
6.5	傅里叶空间的物理公式	
6.6	卷积定理	
6.7	第 6 章习题	
7	拉普拉斯变换	107
7.1	拉普拉斯变换和它的反演公式	
7.2	常见的拉普拉斯变换	
7.3	拉普拉斯变换的应用	
7.4	第 7 章习题	

内容概要

物理中常用的 δ 函数是无限短时间内的单位脉冲的意思。

用离散的观点来看待函数，可以把变分法、积分变换这些比较抽象的概念和我们熟悉的多元微积分和线性代数对应起来。

傅立叶变换是一个酉变换（复矢量的旋转），因此具有保内积的特点。利用酉变换的逆变换可以直接写出傅立叶变换的逆变换公式。 δ 函数的傅立叶变换是常数函数，把它再逆变换就可以得到物理中常用的 δ 函数积分表示。

拉普拉斯变换可以把初条件自然地融入到求解微分方程的中间步骤中，所以一般会比求（复杂的）通解再用初始条件确定（可能简单的多的）特解的过程简便很多。

5. 狄拉克 delta 函数

5.1 狄拉克 delta 函数

物理里有很多“无穷大 \times 无穷小 = 有限”的模型。例如

- 瞬时冲量：力无限大，作用时间无穷短，但两者的乘积（冲量）是有限的。
- 质点：质量密度无穷大，体积无穷小，但两者的乘积（总质量）是有限的。
- 点电荷：电荷密度无穷大，体积无穷小，但两者的乘积（总电荷）是有限的。

在我们掌握的数学知识里，这些表述都是不合法的。物理学家狄拉克（Dirac）就发明了 δ 函数来处理这些情况。有些文献把狄拉克 δ 函数写作 $\delta_D(x)$ ，我们则想省些力气，就把狄拉克 δ 函数简称为 δ 函数，并写作 $\delta(x)$ 。

如图5.1所示，可以通过下面的单位脉冲函数取脉冲时间为零的极限得到 δ 函数：

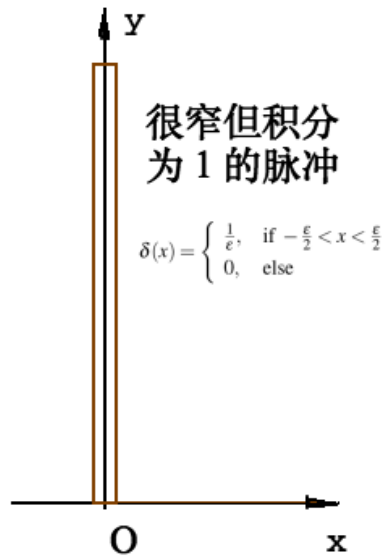
$$\delta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, & \text{if } -\frac{\varepsilon}{2} < x < \frac{\varepsilon}{2} \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (5.1)$$

其中 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 。

如果单位脉冲函数的不连续性让你有点不舒服，那么也可以考虑用高斯函数来逼近 δ 函数：

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon}}, \quad (5.2)$$

其中 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 。

Figure 5.1: 用单位脉冲函数来逼近 δ 函数

借助上述两种逼近方式的辅助，我们归纳出 δ 函数的下述抽象定义：

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \neq 0; \\ +\infty, & \text{if } x = 0; \end{cases} \quad (5.3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (5.4)$$

当然，(5.4) 中的积分的范围可以限定在 0 的任意小邻域。

$$\int_{0^-}^{0^+} \delta(x) dx = 1. \quad (5.5)$$

有时候我们还会假定 δ 函数是偶函数。

$$\delta(-x) = \delta(x). \quad (5.6)$$

严格来说，(5.3) 和 (5.4) 两式已经是 δ 函数的完整描述， δ 函数并不需要一定满足是偶函数这个性质。额外附加它是偶函数这个条件在很多时候只是为了避免繁琐的讨论采取的一种策略。在实际应用中，很少会出现物理问题的求解（或证明）必须依赖于 δ 函数是偶函数这个假设的情况。例如，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\delta(x)}{dx} dx = 0. \quad (5.7)$$

你可以使用，也可以不使用 $\delta(x)$ 是偶函数这个假设，完成(5.7)的证明。所以等式(5.7)可能有明确的物理意义。但下面的等式

$$\int_0^{\infty} \delta(x) dx = \frac{1}{2} \quad (5.8)$$

必须依赖于 δ 函数是偶函数这个性质，所以它的物理意义是不明确的。

5.2 delta 函数的积分性质

设 $f(x)$ 是一个在 x_0 处连续的函数, 我们来考虑这样的一个积分:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx \quad (5.9)$$

因为 $\delta(x-x_0)$ 是 $x-x_0=0$ 处, 也就是 $x=x_0$ 处的一个单位脉冲, 所以 $f(x)\delta(x-x_0)$ 等价于把 $x=x_0$ 处的单位脉冲放大了 $f(x_0)$ 倍: 积分的结果应该是 $f(x_0)$ 。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0). \quad (5.10)$$

你应该不会为 $f(x)$ 在其他地方的取值毫无贡献而感到惊讶, 因为 $\delta(x-x_0)$ 在 $x \neq x_0$ 处恒为零。

在有些情况下, 你还可以在积分中使用 δ 函数的导函数。诀窍就是用分部积分转化为仅含 δ 函数的积分。例如, 设 $f(x)$ 是在 x_0 处可导且导函数连续的函数。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x-x_0)dx = f(x)\delta(x-x_0)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)f'(x)dx = -f'(x_0). \quad (5.11)$$

迄今为止一切看起来索然无味。不过, 需要警告的是, δ 函数的导函数是一个比较危险的符号, 使用时需要谨慎。为了说明问题, 我们来玩一个小小的把戏——证明一个错误的命题: $\delta(x) \equiv 0$ 。

第一种(错误)证明: 因为 $\delta(x)$ 是偶函数, 所以 $\delta'(0) = 0$ 。又因为在 $x \neq 0$ 处 $\delta(x)$ 恒为零, 所以 $\delta'(x) = 0$ 对所有实数 x 成立。因此, 对任意实数 x , 都有 $\delta(x) = \delta(1) + \int_1^x \delta'(x)dx = 0 + 0 = 0$ 。

第二种(错误)证明: 令公式(5.11)中的 $f(x) = \delta(x)$, $x_0 = 0$, 就有 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\delta'(x)dx = -\delta'(0)$ 。另外, 通过直接求原函数 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\delta'(x)dx = \frac{1}{2}[\delta(x)]^2|_{-\infty}^{\infty} = 0$ 。所以我们证明了 $\delta'(0) = 0$ 。又因为在 $x \neq 0$ 处 $\delta(x)$ 恒为零, 所以 $\delta'(x) = 0$ 对所有实数 x 成立。因此, 对任意实数 x , 都有 $\delta(x) = \delta(1) + \int_1^x \delta'(x)dx = 0 + 0 = 0$ 。

借助(5.2)的帮助, 你也许可以搞清上述“证明”的问题在哪里。不过, 我不准备在这个问题上纠结多久, 因为我还没有遇到过一个物理问题一定需要 δ 函数的导函数才能解决——我决定尽量不主动去招惹这个家伙。

例题 26: 证明 4.2.2 节介绍的 n 维限和积分公式 (4.31)。

证明: 用归纳法, $n=1$ 时命题显然成立。假设命题对 $n-1$ 成立, 考虑积分

$$J = \int_{\Omega_n} x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2-1} \dots x_n^{\alpha_n-1} \delta(x_1+x_2+\dots+x_n-1) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (5.12)$$

先对 x_n 积分, 得到

$$J = \int_{\Omega_{n-1}} x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2-1} \dots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}-1} (1-x_1-x_2-\dots-x_{n-1})^{\alpha_n-1} dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1}. \quad (5.13)$$

利用对 $n-1$ 的归纳假设, 以及 B 函数和 Γ 函数的关系, 得到

$$\begin{aligned} J &= \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\dots\Gamma(\alpha_{n-1})}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{n-1})} \int_0^1 (1-t)^{\alpha_n-1} t^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{n-1}-1} dt \\ &= \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\dots\Gamma(\alpha_{n-1})}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{n-1})} \frac{\Gamma(\alpha_n)\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{n-1})}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{n-1}+\alpha_n)} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\dots\Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n)} \end{aligned} \quad (5.14)$$

然后对任意 $0 < u < 1$, 考虑积分

$$I(u) = \int_{\Omega_n} x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2-1} \dots x_n^{\alpha_n-1} \delta(x_1+x_2+\dots+x_n-u) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (5.15)$$

做变量替换 $x_i = uy_i$, 并利用前面得到 J 的积分结果(5.14), 就得到

$$\begin{aligned} I(u) &= u^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n-1} \int_{\Omega_n} y_1^{\alpha_1-1} y_2^{\alpha_2-1} \dots y_n^{\alpha_n-1} \delta(y_1+y_2+\dots+y_n-1) dy_1 dy_2 \dots dy_n \\ &= u^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n-1} \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\dots\Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n)} \end{aligned} \quad (5.16)$$

最后, 分别利用(5.15)和(5.16)可以看出所要求证的等式左右两边都等于

$$\int_0^1 I(u) f(u) du \quad (5.17)$$

于是证毕。

5.3 高维空间的 delta 函数

在 n 维欧氏空间中, 可以定义 $\delta^{(n)}(\mathbf{x})$, 它既可以理解为

$$\delta^{(n)}(\mathbf{x}) = \delta(x_1)\delta(x_2)\dots\delta(x_n) \quad (5.18)$$

其中 (x_1, x_2, \dots, x_n) 是 \mathbf{x} 的直角坐标分量, 也可以直接抽象地理解为在原点附近体积为 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 的邻域内, 函数值为 $\frac{1}{\varepsilon} \rightarrow \infty$, 而在其余位置函数值均为零的函数。

和一维空间类似, 如果 $f(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_0 附近连续, 则有下列积分公式:

$$\int \delta^{(n)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) f(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} = f(\mathbf{x}_0), \quad (5.19)$$

这里的 $\int d^n \mathbf{x}$ 是 n 重积分 $\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n$, 也就是 n 维空间的全空间体积分的简写, 物理文献中经常碰到这种写法。

例如, 三维空间某点 \mathbf{x}_0 处的点电荷的电荷密度可以写成

$$\rho(\mathbf{x}) = Q \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0). \quad (5.20)$$

根据(5.19), 对全空间电荷密度积分, 显然会得到点电荷的电量 Q 。

5.4 δ 复合函数

在物理课程中，我们还会接触到很多形如 $\delta(f(x))$ 的函数（例如 $\delta(x^2 - a^2)$ ）。这些函数其实和我们熟悉的 δ 函数并无本质差别。

δ 函数在其宗量 $f(x)$ 为零时产生一个脉冲。所以 $\delta(f(x))$ 是在 f 的零点处的脉冲的组合。下面的定理给出了这些脉冲的大小。

δ 复合函数的等价表示: 对可导函数 $f(x)$ ，有：

$$\delta(f(x)) = \sum_{\mu: f(\mu)=0} \frac{\delta(x-\mu)}{|f'(\mu)|}. \quad (5.21)$$

也就是说，可以把 $\delta(f(x))$ 看成在 f 的所有**实数零点**处的脉冲，每个脉冲的大小（即函数曲线下面包含的面积）是在该点的 f 的导数的**绝对值**的倒数。如果出现重根的情况，也就是出现 $f(\mu) = f'(\mu) = 0$ 的情况，那么 $f(\delta(x))$ 在 $x = \mu$ 出现无穷大脉冲，通常就没有对应的物理意义。

为什么脉冲的大小在每个零点 μ 处被缩小了 $|f'(\mu)|$ 倍呢？这是因为在 μ 附近，按照 δ 函数的定义，如果以 f 为横轴， $\delta(f)$ 为纵轴画函数图像，则图像下面包围面积为 1。但是现在我们其实是以 x 为横轴， $\delta(f)$ 为纵轴在画图，图像下面的面积就是 $\left| \frac{dx}{df} \right|_{x=\mu} = \frac{1}{|f'(\mu)|}$ 。

例题 27: 设 $a > 0$ ， k 为实数，计算

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2 - a^2) e^{ikx} dx.$$

解答: 根据(5.21)，

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{\delta(x+a)}{2a} + \frac{\delta(x-a)}{2a}. \quad (5.22)$$

所以

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2 - a^2) e^{ikx} dx = \frac{e^{ika} + e^{-ika}}{2a} = \frac{\cos(ak)}{a}. \quad (5.23)$$

5.5 第5章习题

习题 62: 计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \delta(x-1) dx.$$

习题 63: 计算 x - y 平面上的全平面积分

$$\iint \cos(2x+y) \delta^{(2)}(x,y) dx dy.$$

习题 64: 计算积分

$$\int_{-1}^1 \delta'(x) \sin x dx.$$

习题 65: 计算积分

$$\int_0^{\infty} \delta(x^2-1) e^x dx.$$

习题 66: 计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\sin x) e^{-|x|} dx.$$

习题 67: 计算积分

$$\int_1^{\infty} \delta(x^2 \sin x) dx.$$

习题 68: 计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{1}{\Gamma(x)}\right) dx.$$

习题 69: 计算二维直角坐标系的全平面积分:

$$\iint \frac{x^2 \delta(x^2 + y^2 - 1)}{x^2 + y^2 + 2} dx dy.$$

习题 70: 计算二维直角坐标系的全平面积分:

$$\iint \frac{\delta(x^2 - y)}{y^3 + 1} dx dy.$$

习题 71: 计算二维直角坐标系的全平面积分:

$$\iint \delta(y^3 - \cosh^3 x) dx dy.$$

6. 傅里叶变换

6.1 复矩阵简介

我们先来学习一下复矩阵，也就是以复数为元素的矩阵的一些简单知识。如果你已经熟悉相关的知识，可以直接跳过本节。

把一个复矩阵 A 每个元素都取共轭，然后再把整个矩阵取转置，就得到 A 的共轭转置矩阵，简单记作 A^\dagger 。当然，你也可以先转置，再取共轭。

$$A^\dagger \equiv (A^*)^T = (A^T)^* \quad (6.1)$$

例如

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 2+i & i \\ 3-i & -4-2i & 0 \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

取共轭转置后为

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} 1-i & 3+i \\ 2-i & -4+2i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

容易证明，乘积的共轭转置等于共轭转置的倒序乘积

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger, \quad (6.4)$$

$$(ABC)^\dagger = C^\dagger B^\dagger A^\dagger, \quad (6.5)$$

$$\dots \quad (6.6)$$

另外，共轭转置矩阵的行列式是原矩阵的行列式的共轭

$$\det(A^\dagger) = (\det A)^*. \quad (6.7)$$

复向量（看成 $n \times 1$ 复元素矩阵） \mathbf{u}, \mathbf{v} 的内积定义为 $\mathbf{u}^\dagger \mathbf{v}$ 。它一般不等于 $\mathbf{v}^\dagger \mathbf{u}$ 。所以，复向量内积只有当内积为实数时才满足交换律。

复向量的模定义为它和自己的内积的平方根 $\|\mathbf{u}\| \equiv \sqrt{\mathbf{u}^\dagger \mathbf{u}}$ （即它的每个分量的模的平方和再开平方根）。如果一个向量的所有元素为零，则称它为零向量。容易证明：非零向量的模一定大于零。另外，如果两个向量内积为零，则说它们正交。

如果一个方阵和自己的共轭转置互逆 ($AA^\dagger = A^\dagger A = I$)，就称它为酉 (Unitary) 矩阵。 $n \times n$ 的酉矩阵的所有列（或行）构成 n 维复空间的一组完备的正交归一化的基。反过来，如果有 n 维复空间的一组完备的正交归一化的基，以它们为列（或行）可以得到一个酉矩阵。

对酉矩阵 U ,

$$|\det U|^2 = \det(U^\dagger) \det(U) = \det(U^\dagger U) = 1. \quad (6.8)$$

所以 $\det U$ 是模为 1 的复数。

酉矩阵可以看成复向量空间的旋转操作，具有保内积不变的特点：

$$(U\mathbf{x})^\dagger (U\mathbf{y}) = \mathbf{x}^\dagger U^\dagger U \mathbf{y} = \mathbf{x}^\dagger \mathbf{y}. \quad (6.9)$$

特别地，当酉矩阵 U 作用到一个复向量上 \mathbf{x} 时，复向量的模不变。这符合我们对“旋转”的直观理解。

如果一个方阵的共轭转置等于自身 ($A^\dagger = A$)，就称它为厄米 (Hermitian) 矩阵。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & -4 \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

就是厄米矩阵。

设 A 是 $n \times n$ 厄米矩阵，通过求解方程

$$\det(\lambda I - A) = 0, \quad (6.11)$$

可以得到 n 个本征值 (m 重根视为 m 个)，这些本征值一定是实数。这是因为如果存在非零向量 x 使得 $Ax = \lambda x$ ，则 $\lambda x^\dagger x = x^\dagger Ax = (Ax)^\dagger x = \lambda^* x^\dagger x$ 。

只出现 $m = 1$ 次的本征值对应的本征矢方向确定（但允许乘 -1 ），且和其他本征值的本征矢都正交。这是因为对两个本征值 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ （按前面讨论结果，它们都是实数），存在非零向量 x_1, x_2 使得 $Ax_1 = \lambda_1 x_1$ ， $Ax_2 = \lambda_2 x_2$ ，于是有 $\lambda_1 x_1^\dagger x_2 = (Ax_1)^\dagger x_2 = x_1^\dagger Ax_2 = \lambda_2 x_1^\dagger x_2$ ，即 $x_1^\dagger x_2 = 0$ 。

重复 $m > 1$ 次的本征值的所有本征矢构成（和其他本征值的本征矢都正交的） m 维线性子空间。可以取一组正交基，人为地使这些本征矢也两两正交；这样的取法当然有无穷多种。

根据前述讨论，对厄米矩阵 A 总是可以取一组正交归一化的本征矢，令它们为列向量就得到一个酉矩阵 U 。容易根据本征矢的定义直接验证 $U^\dagger A U$ 是一个以 A 的所有本征值为对角元的对角矩阵。

一般地，对一个方阵 S ，如果存在一个酉矩阵 U 使得 $U^\dagger S U$ 是对角矩阵，则称 S 可以酉对角化。在矩阵论中有一个深奥的定理：一个矩阵 S 可以酉对角化的充分必要条件是它和自己的共轭矩阵对易（也就是 $S S^\dagger = S^\dagger S$ ）——这样的矩阵叫正规矩阵 (Normal Matrix)。显然，酉矩阵和厄米矩阵都是正规矩阵，所以都能酉对角化。

好了，我们纸上谈兵了这么多，却连一个具体的酉矩阵都没给出过。别急，我马上就给出一个看上去不那么平凡的例子。

设 a, b 为给定的实常数，定义一个 $N \times N$ 的方阵 E ：它的第 m 行第 n 列元素为

$$E_{mn} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-\frac{2\pi(m-a)(n-b)i}{N}}. \quad (6.12)$$

容易直接验证

$$\begin{aligned} (E^\dagger E)_{mn} &= \sum_{l=1}^N E_{lm}^* E_{ln} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N e^{\frac{2\pi(l-a)(m-b)i}{N} - \frac{2\pi(l-a)(n-b)i}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N e^{\frac{2\pi(l-a)(m-n)i}{N}} \\ &= \frac{q^{-a}}{N} \sum_{l=1}^N q^l. \end{aligned} \quad (6.13)$$

这里的 $q \equiv e^{\frac{2\pi(m-n)i}{N}}$ 。如果 $m = n$ ，也就是 $q = 1$ ，显然上式结果为 1。否则，若 $m \neq n$ ，也就是 $q \neq 1$ ，则根据等比数列求和公式，以及 $q^N = e^{2\pi(m-n)i} = 1$ ，即有

$$\sum_{l=1}^N q^l = \frac{q}{1-q} (1 - q^N) = 0. \quad (6.14)$$

也就是说 $(E^\dagger E)_{mn} = \delta_{mn}$ ，即 $E^\dagger E = I$ 。这说明 E 是一个酉矩阵。

6.2 函数的离散表示

假设一个限定自变量为实数（但函数值可以有虚部）的函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow \pm\infty$ 时趋向于零，那么我们可以忽略 $f(x)$ 在很远处的值，只在一段长度为 L （ L 巨大）

的区间上考虑 $f(x)$ 的值。此外，我们还假设 $f(x)$ 只含有限个间断点，因此可以用有限的取样来近似描述 $f(x)$ 。我们记每一小段长度 $dx = \frac{L}{N}$ ，这里 N 是把区间划分的段数。注意这里的 dx 是个物理概念，和微积分里的微分概念有所不同。

把 f 在每小段内取值为：

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_N). \quad (6.15)$$

这里的 $x_j = (j-a)dx$ ($j = 1, 2, \dots, N$; a 是固定的实数， $-adx$ 是区间起点)，如图 6.1 所示。

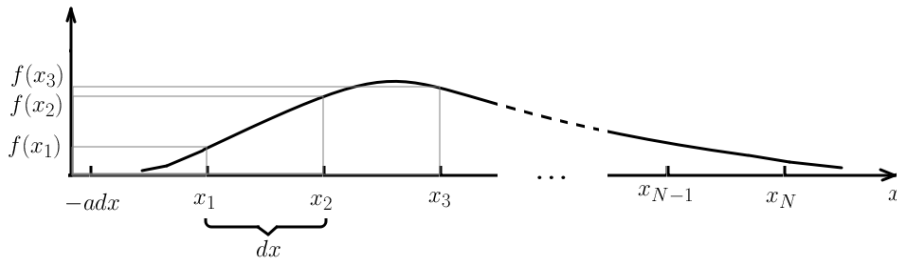


Figure 6.1: $f(x)$ 的离散化 (近似) 表示

假设你不太关心 $f(x)$ 在每一小段里面的细节， $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_N)$ 这 N 个数就完整地描述了 $f(x)$ 。也就是说：我们可以把一个函数 $f(x)$ 看成以 x 为下标

的矢量。不过，如果直接拿 $\begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \dots \\ f(x_N) \end{pmatrix}$ 来作为函数 $f(x)$ 对应的矢量，会有些问题：当

我们把区间划分得越来越细 ($N \rightarrow \infty, dx \rightarrow 0^+$) 时，这个矢量的长度 $\sqrt{\sum_{m=1}^N |f(x_m)|^2}$ 是发散的。因此，我们使用

$$\begin{pmatrix} f(x_1)\sqrt{dx} \\ f(x_2)\sqrt{dx} \\ \dots \\ f(x_N)\sqrt{dx} \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

来作为函数 $f(x)$ 对应的矢量。这样， $f(x)$ 对应的矢量的长度 (记作 $\|f\|$) 满足：

$$\|f\|^2 = \sum_{m=1}^N |f(x_m)|^2 dx \rightarrow \int |f(x)|^2 dx. \quad (6.17)$$

这里的箭头表示当 $N \rightarrow \infty$ ，即坐标轴划分无限精细时，表达式趋向的极限。

复矢量的内积的概念也可以应用到这里来，两个函数 $f_1(x), f_2(x)$ 的内积为：

$$\sum_{m=1}^N f_1^*(x_m) f_2(x_m) dx \rightarrow \int f_1^*(x) f_2(x) dx. \quad (6.18)$$

我们还可以引入一个“对偶坐标” k ，并把 k 的函数 $g(k)$ 都看成矢量

$$\begin{pmatrix} g(k_1)\sqrt{dk}, \\ g(k_2)\sqrt{dk}, \\ \dots, \\ g(k_N)\sqrt{dk} \end{pmatrix}, \quad (6.19)$$

这里 $k_j = (j-b)dk$ ($j = 1, 2, \dots, N$, b 是固定实数, $-bdk$ 是 k 空间的区间起点)。

迄今为止, 我们只是形式地引入了一个对偶坐标 k , 并没有指明它和原来的 x 空间有什么关系。我们采取如下的约定

$$dxdk = \frac{2\pi}{N}, \quad (6.20)$$

或者等价地

$$dk = \frac{2\pi}{L}, \quad (6.21)$$

就会在 k 和 x 之间建立比较简洁的物理联系。例如 x 如果代表时间, 那么约定(6.20)会导致 k 是圆频率。你可能已经学过傅里叶级数或者三角级数, 知道周期为 L 的函数可以用圆频率为 $\frac{2\pi}{L}$ 的整数倍的信号的线性组合。这就是(6.21)的物理来源。你也可以这样理解, 严格的单频波都是要测量无穷多次振动才能确定, 实际测量的振动次数当然是有限的(也就是 $f(x)$ 定义范围的长度是有限的 L), 这样我们对每个振动信号频率的测量就会有误差: 显然 L 越大, 误差越小——这是(6.21)另一种解读。

现在, x 坐标和 k 坐标由(6.20)联系了起来。可以看出, x 和 k 的量纲互为倒数(例如时间和频率, 长度和波数)。我们建立对偶空间的真正意图是在 x 空间的函数和 k 空间的函数之间建立联系, 把有些在 x 空间比较难以研究的函数转化到 k 空间进行研究。如果默认函数都是分段连续且在无穷远处可以忽略, 那么 x 空间的函数 $f(x)$ 都可以看作如(6.16)的矢量; k 空间的函数 $g(k)$ 都可以看作如(6.19)的矢量。

二元函数 $h(k, x)$ 可以看成是一个矩阵, 它的第 m 行 n 列的矩阵元是 $h(k_m, x_n)\sqrt{dkdx}$ 。如果用 h 对应的矩阵去乘以 f 对应的矢量, 就得到:

$$\sum_x \left(h(k, x)\sqrt{dkdx} \right) \left(f(x)\sqrt{dx} \right) = \left(\int h(k, x)f(x)dx \right) \sqrt{dk}. \quad (6.22)$$

这实际上给出了一个 k 空间的函数

$$g(k) = \int h(k, x)f(x)dx \quad (6.23)$$

所对应的矢量。

我们把(6.23)叫做一个从 x 空间的函数到 k 空间的函数的“变换”，这个变换依赖的二元函数 $h(k, x)$ 叫做变换的“核”。

同样地， k 空间的函数 $g(k)$ 可以通过另一个核 $H(x, k)$ “逆变换”回 $f(x)$ ，

$$f(x) = \int H(k, x)g(k)dk \quad (6.24)$$

容易看出来，上述逆变换能够成立的充分必要条件是 $h(k, x)$ 对应的矩阵和 $H(k, x)$ 对应的矩阵互为逆矩阵。

6.3 傅里叶变换和它的反演公式

我们无法列举所有可能的核，也没有必要这么做。我们比较感兴趣的是一些比较特殊的核。例如，我们来考虑这样一个核 $\frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}$ 。按照约定(6.20)，核 $\frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}$ 对应的矩阵的第 m 行第 n 列元素为：

$$\frac{e^{-ik_mx_n}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{dxdk} = \frac{e^{-ik_mx_n}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2\pi}{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-ik_mx_n}. \quad (6.25)$$

由于 k 轴和 x 轴都做了均匀划分， $k_m = (m-b)dk, x_n = (n-a)dx$ 。那么核 $\frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}$ 对应的矩阵其实就是上一节讨论的(6.12)中的酉矩阵 E 。

你可以进行一次完全类似地推导，得出核 $\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$ 对应的矩阵是 E^\dagger 。

既然核 $\frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}$ 对应的矩阵是酉矩阵，那么由它定义的变换

$$\tilde{f}(k) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx \quad (6.26)$$

是个复向量空间的旋转。变换(6.26)实际上就是物理中最常用的**傅里叶变换** (Fourier Transformation)。

既然傅里叶变换是由(6.12)中的酉矩阵 E 给出的向量旋转。那么我们可以用其逆矩阵 E^\dagger 对应的核 $\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$ 来进行还原：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)e^{ikx} dk. \quad (6.27)$$

上式给出了傅里叶变换的逆变换。

我们来考虑一个特殊的函数 $\delta(x)$ 的傅里叶变换。按照定义 (6.26) 以及积分公式 (5.4)，可以直接得到 $\delta(x)$ 的傅里叶变换是个常数函数 $\tilde{\delta}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ 。然后我们对其进行傅里叶逆变换，就得到了

δ 函数的积分表示：

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk. \quad (6.28)$$

Table 6.1: 由 (6.26) 定义的傅里叶变换的一些结果。由于源和像都是取值为实数的偶函数，所有结果的源、像都可以互换。表中 $\gamma = 0.5772\dots$ 是欧拉常数。

源	像
$e^{-x^2/2}$	$e^{-k^2/2}$
$\frac{\sin x}{x}$	$f(k) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & -1 \leq k \leq 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$
$\frac{\sin^2 x}{x^2}$	$f(k) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{ k }{2}\right), & -2 \leq k \leq 2 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$
$\frac{1}{a^2+x^2}$, 参数 $a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-a k }}{a}$
$\frac{1}{\cosh(ax)}$, 参数 $a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a \cosh \frac{\pi k}{2a}}$
$\frac{x}{\sinh(ax)}$, 参数 $a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{a^2(1+\cosh \frac{\pi k}{a})}$
$\frac{1}{\sqrt{ x }}$	$\frac{1}{\sqrt{ k }}$
$ x ^\alpha$, 参数 $\alpha \in (-1, 0)$	$-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \frac{\pi\alpha}{2} \Gamma(\alpha+1)}{ k ^{\alpha+1}}$
$\ln x $	$-\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{ k } - \sqrt{2\pi}\gamma\delta(k)$

如果你是物理专业的学生，请重视(6.28)这个结果。你今后会在《电动力学》、《量子场论》等课程中不断地遇见它。

另外，由于傅里叶变换本质是复向量空间的旋转，它具有保内积不变的特点（内积由(6.18)给出），也就是：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}^*(k)\tilde{g}(k)dk. \quad (6.29)$$

特别地，当 $f = g$ 时，

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 dk. \quad (6.30)$$

容易根据定义验证，取值为实数的偶函数的傅里叶变换也是取值为实数的偶函数。在这种情况下，源和像可以互换（同时把宗量 x 和 k 互换）。在表6.1中我给出了一些例子。

6.4 高维空间的傅里叶变换

n 维空间的函数 $f(\mathbf{x})$ （这里 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ）的傅里叶变换可以看成依次对分量 x_1, x_2, \dots, x_n 进行傅里叶变换：

$$\tilde{f}(k_1, k_2, \dots, k_n) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \int \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) e^{-i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n)} dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

(6.31)

不过，我们通常用矢量的观点来描述：

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^n \mathbf{x}. \quad (6.32)$$

这里的 $\int d^n \mathbf{x}$ 表示对 n 维全空间的体积分。

傅里叶逆变换仍然可以简洁地写成：

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^n \mathbf{k}. \quad (6.33)$$

对高维空间的 $\delta^{(n)}(\mathbf{x})$ 函数进行傅里叶变换再进行傅里叶逆变换，就可以得到：

n 维 δ 函数的积分表示：

$$\delta^{(n)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^n \mathbf{k}. \quad (6.34)$$

我忍不住要再唠叨一句，(6.34)这个公式很重要。

保内积性质对 n 维空间傅里叶变换仍然成立：

$$\int f^*(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} = \int \tilde{f}^*(\mathbf{k}) \tilde{g}(\mathbf{k}) d^n \mathbf{k}. \quad (6.35)$$

特别地，当 $f = g$ 时，

$$\int |f(\mathbf{x})|^2 d^n \mathbf{x} = \int |\tilde{f}(\mathbf{k})|^2 d^n \mathbf{k}. \quad (6.36)$$

6.5 傅里叶空间的物理公式

对傅里叶逆变换式

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^n \mathbf{k}.$$

两边作用 ∂_j

$$\partial_j f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int (ik_j \tilde{f}(\mathbf{k})) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^n \mathbf{k}.$$

当 j 取遍 $1, 2, \dots, n$ ，上式可以写成矢量形式：

$$\widetilde{\nabla} f = i\mathbf{k} \tilde{f}. \quad (6.37)$$

或者更简洁地写成：

$$\widetilde{\nabla} = i\mathbf{k}. \quad (6.38)$$

上式(6.38)的意思是：在位置空间的梯度算符等价于傅里叶空间的数乘因子 ik 。这句很抽象的话具体是想表达什么呢？

由于傅里叶变换是可逆的，所以 $f(\mathbf{x})$ 和 $\tilde{f}(\mathbf{k})$ 其实包含了相同的信息。在物理中，我们把 $f(\mathbf{x})$ 和 $\tilde{f}(\mathbf{k})$ 看成同一个物理对象的不同数学形式。物理学家甚至经常都不区分函数的符号，直接写 $f(\mathbf{x})$ 和 $f(\mathbf{k})$ ，并根据上下文来确定 f 的含义。这乍听有些过于随意的做法其实并不会引起混乱，相反，在我的眼里，反而使得物理内容的表述更加简洁了——毕竟谁都不太会喜欢阅读到处都是弯帽子符号的段落。下面我用一个具体的例子来说明物理学家的这种习惯是什么意思：

在静电学中，电场 $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ 和电势 $\phi(\mathbf{x})$ 之间的关系为：

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi. \quad (6.39)$$

我们也可以把电势傅里叶变换为 $\phi(\mathbf{k})$ 。注意当我决定使用相同的符号 ϕ 来表示位置空间和傅里叶空间的电势时， $\phi(\cdot)$ 这个符号不再是数学中的一个固定的映射规则的意思——它的意思是：电势作为...的函数。同样，我可以把电场 $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ 的三个分量 $E_1(\mathbf{x}), E_2(\mathbf{x}), E_3(\mathbf{x})$ 都进行傅里叶变换，得到 $E_1(\mathbf{k}), E_2(\mathbf{k}), E_3(\mathbf{k})$ ，也就是 $\mathbf{E}(\mathbf{k})$ 。根据(6.38)，在傅里叶空间（也就是 \mathbf{k} 空间），电势和电场的关系就成为：

$$\mathbf{E} = -i\mathbf{k}\phi. \quad (6.40)$$

显然(6.40)比(6.39)更简单（乘法总比微分简单些吧）。

同样得，我们可以在傅里叶空间写出电势 ϕ 和电荷密度 ρ 的微分关系：

$$k^2\phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (6.41)$$

相比于位置空间的泊松方程 $\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ ，显然傅里叶空间的方程(6.41)简单得多。

很大程度上讲，我们引入傅里叶变换就是因为线性的物理理论在傅里叶空间的表述往往比较简单。

6.6 卷积定理

在上一节中，我们看到，位置空间的微分可以转化为傅里叶空间的数乘，从而达到简化问题的目的。积分则通常要复杂得多，傅里叶变换一般无法起到简化作用。不过——有一类特殊的积分例外，那就是卷积。

两个函数 $f(\mathbf{x})$ 和 $g(\mathbf{x})$ 的卷积定义为

$$(f \star g)(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(\mathbf{y}) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d^n \mathbf{y}. \quad (6.42)$$

显然，卷积满足交换律： $f \star g = g \star f$ 。

卷积(6.42)通常用来作图像平滑等。比如在最简单的情况下，你可以取

$$g(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{(2\pi)^{n/2}}{V_n}, & \text{if } |\mathbf{x}| < R \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (6.43)$$

这里 $V_n = \frac{\pi^{n/2} R^n}{(\frac{n}{2})!}$ 是半径为 R 的 n 维球的体积。这时，

$$(f \star g)(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{V_n} \int_{|\mathbf{y}-\mathbf{x}| < R} f(\mathbf{y}) d^n \mathbf{y}. \quad (6.44)$$

也就是说，我们把 $f(\mathbf{x})$ 通过和 g 卷积，得到了在以 \mathbf{x} 为球心， R 为半径的球内的 f 的平均值。

一般的图像平滑不会使用(6.43)那样的权重函数（称为“卷积核”）来对邻近的像素取平均，而会使用比较平滑的权重函数（如高斯函数）。

乍看起来，卷积是比较费时的操作，因为对每个 \mathbf{x} 你都要计算一个积分。对分辨率比较高的图，你就要计算几亿甚至更多次积分才能把图像平滑掉。实际的图像处理软件并不会这样蛮干，而是使用傅里叶变换——因为傅里叶变换可以把问题简化为仅需两次积分的操作。为了说明其中的原理，我们需要下面的卷积定理。

卷积定理: 设 f, g 的傅里叶变换依次为 \tilde{f}, \tilde{g} ，则 $f \star g$ 的傅里叶变换为 $\tilde{f}\tilde{g}$ ，即卷积的傅里叶变换等于傅里叶变换的乘积。

证明: 直接对(6.42)中的 $(f \star g)(\mathbf{x})$ 作傅里叶变换：

$$\widetilde{(f \star g)}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^n \mathbf{x} \int d^n \mathbf{y} f(\mathbf{y}) g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (6.45)$$

对固定的 \mathbf{y} 而言，变量替换 $\mathbf{w} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ 不改变体积元 ($d^n \mathbf{x} \rightarrow d^n \mathbf{w}$)，所以

$$\widetilde{(f \star g)}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{y}+\mathbf{w})} d^n \mathbf{w} \int d^n \mathbf{y} f(\mathbf{y}) g(\mathbf{w}) \quad (6.46)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(\mathbf{y}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} d^n \mathbf{y} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{w}} g(\mathbf{w}) d^n \mathbf{w} \quad (6.47)$$

$$= \tilde{f}(\mathbf{k}) \tilde{g}(\mathbf{k}) \quad (6.48)$$

如果在傅里叶空间也定义卷积：

$$(\tilde{f} \star \tilde{g})(\mathbf{k}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \tilde{f}(\mathbf{p}) \tilde{g}(\mathbf{k} - \mathbf{p}) d^n \mathbf{p}. \quad (6.49)$$

同样可以证明

$$\tilde{f}g = \tilde{f} \star \tilde{g}. \quad (6.50)$$

即乘积的傅里叶变换等于傅里叶变换的卷积。

例题 28: 定义函数

$$f(x) = \int_{x-1}^{x+1} e^{-t^2} dt$$

求 $f(x)$ 的傅里叶变换。

解答: 所给函数是 e^{-t^2} 在 x 附近的某种加权 (这题里是等权) 求和, 所以是卷积的形式。定义

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{2\pi}, & \text{if } -1 < x < 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (6.51)$$

则 $f(x)$ 可以看成 e^{-x^2} 和 $g(x)$ 的卷积。根据卷积定理, $f(x)$ 的傅里叶变换等于 e^{-x^2} 的傅里叶变换与 $g(x)$ 的傅里叶变换的乘积。

e^{-x^2} 的傅里叶变换为:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-ikx} dx = \frac{e^{-k^2/4}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+\frac{ik}{2})^2} dx = \frac{e^{-k^2/4}}{\sqrt{2}}$$

$g(x)$ 的傅里叶变换为:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 \sqrt{2\pi} e^{-ikx} dx = \frac{e^{-ik} - e^{ik}}{-ik} = \frac{2 \sin k}{k}$$

所以 $f(x)$ 的傅里叶变换等于 $\frac{\sqrt{2}e^{-k^2/4} \sin k}{k}$ 。

6.7 第6章习题

习题 72: 计算 $\delta(x^2 - 1)$ 的傅里叶变换。

习题 73: 证明: 取值为实数的偶函数 $f(x)$ 的傅里叶变换 $g(k)$ 也是取值为实数的偶函数, 且 $g(x)$ 的傅里叶变换是 $f(k)$ (源和像可以对易)。

习题 74: 求函数 $\frac{\sin x}{x}$ 的傅里叶变换。

习题 75: 设 $\frac{\sqrt{|x|}}{1+x^2}$ 的傅里叶变换为 $F(k)$, 计算积分

$$\int_0^{\infty} F^2(k) dk.$$

习题 76: 设对任意实数 k 均有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}},$$

计算积分

$$\int_0^{\infty} [f(x)]^2 dx.$$

习题 77: 设 $\frac{1}{1+x^4}$ 的傅里叶变换为 $F(k)$, 计算积分

$$\int_0^{\infty} F(k) dk.$$

习题 78: 考虑三维空间的 top-hat 函数 $h(\mathbf{x})$, 它是这样定义的: 如果 \mathbf{x} 在单位球内 (即 $|\mathbf{x}| < 1$), 则 $h(\mathbf{x}) = 1$, 否则 $h(\mathbf{x}) = 0$. 计算 $h(x)$ 的 (三维) 傅里叶变换。

习题 79: 定义函数

$$f(x) = \int_{x-1}^{x+1} \frac{\sin t}{t} dt$$

求 $f(x)$ 的傅里叶变换。

习题 80: 记

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos[k(x^2-1)]}{1+x^4} dx,$$

计算

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(k) dk.$$

习题 81: 计算函数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$$

的傅里叶变换。

7. 拉普拉斯变换

7.1 拉普拉斯变换和它的反演公式

我们在前一章介绍了由 $\frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}$ 这个变换核给出的傅里叶变换。傅里叶变换经常是无边界的线性微分问题中有很多应用——很大程度上是因为它能把梯度算符变成数乘因子 ik 。

在空间坐标或者时间坐标有边界的、特别是半边界 (例如 $t \in [0, \infty)$) 的情况, 我们还经常用到另一个积分变换——拉普拉斯变换。拉普拉斯变换的核是 $e^{-pt}h(t)$ 。这里的 $h(t)$ 是单位跃阶函数, 定义为:

$$h(t) \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } t \geq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (7.1)$$

它可以看作是 $\delta(t)$ 的原函数。

在讨论拉普拉斯变换时, 为了避免引起混淆, 我们通常要把单位跃阶函数的定义稍稍修改为:

$$h(t) \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } t > 0^- \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (7.2)$$

注意上面的标注 $t > 0^-$ 和 $t \geq 0$ 有略微不同的物理意义。它的意思是 $h(t)$ 当 $t \in (-\varepsilon, \infty)$ ($\varepsilon \rightarrow 0^+$) 时取值为 1, 所以

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\delta(t)dt = 1. \quad (7.3)$$

于是函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换等于

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)h(t)e^{-pt} dt = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (7.4)$$

经过拉普拉斯变换之后，显然 $f(t)$ 在 $t < 0$ 处的取值的信息被抹去了。不过，拉普拉斯变换通常只应用于定义在 $t \in (0^-, \infty)$ 上的函数。在这个意义下，拉普拉斯变换是可逆的。

假设 $f(t)$ 分段连续，且随 t 的增长速度不超过指数级。那么，只要 p 的实部足够大，积分 $F(p) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$ 绝对收敛且对 p 可导。也就是说，我们可以找到某个实数 p_0 ，使 $F(p)$ 在满足 $\operatorname{Re} p > p_0$ 的区域内是解析函数。于是，在拉普拉斯变换 (7.4) 中令 $p = \beta + ik$ ，这里的 β 是任选的满足 $\beta > p_0$ 的常数， k 是实变量。

$$F(\beta + ik) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)h(t)e^{-\beta t} e^{-ikt} dt. \quad (7.5)$$

容易看出来， $F(\beta + ik)$ 相当于是对 $\sqrt{2\pi}f(t)h(t)e^{-\beta t}$ 做了傅里叶变换，于是有逆变换：

$$\sqrt{2\pi}f(t)h(t)e^{-\beta t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\beta + ik)e^{ikt} dk. \quad (7.6)$$

也就是

$$f(t)h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\beta + ik)e^{(\beta+ik)t} dk. \quad (7.7)$$

对 $t > 0^-$ 我们可以扔掉 $h(t)$ 的因子，并把 $\beta + ik$ 替换回为 p ，最终得到拉普拉斯变换的反演公式：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} F(p)e^{pt} dp, \quad (t > 0^-). \quad (7.8)$$

这里积分是沿着竖直线 $\operatorname{Re} p = \beta$ 进行的。

7.2 常见的拉普拉斯变换

说句实话，拉普拉斯变换的反演公式(7.8)并不太好，通常需要进行一个围道积分才能算出结果。因此除非万不得已，我不会考虑使用反演公式。我首先考虑的是更原始，但很多时候更有效的查表的办法。

所以，让我们来制表吧！

根据定义(7.4)直接可以算出表 7.1。为了让这张表更加强大，我也把本书后面才会介绍的贝塞尔函数 J_n 写到了这里，相关定义和证明请参考(11.18)以及(11.95)。下面我们对表中计算比较复杂的几个例子加以说明。

源	像	备注
$\delta(t)$	1	
1	$\frac{1}{p}$	
t^α	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$	$\alpha \neq -1, -2, -3, \dots$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	
$\ln t$	$-\frac{1}{p}(\gamma + \ln p)$	
$\frac{t^n}{e^t-1}$	$\left(-\frac{d}{dp}\right)^{n+1} \ln \Gamma(p+1)$	整数 $n \geq 1$
$\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}$	$\ln p - \frac{d}{dp} \ln \Gamma(p+1)$	
$\frac{1}{t} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\right)$	$\ln \Gamma(p) - \left(p - \frac{1}{2}\right) \ln p + p - \frac{\ln(2\pi)}{2}$	
$J_n(t)$	$\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$	n 为非负整数
$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$	
$f(t-a)h(t-a)$	$e^{-ap} F(p)$	$a > 0$, 源平移规则
$f(t)e^{at}$	$F(p-a)$	像平移规则
$t^n f(t)$	$\left(-\frac{d}{dp}\right)^n F(p)$	n 为非负整数
$f'(t)$	$pF(p) - f(0^-)$	
$f''(t)$	$p^2 F(p) - pf(0^-) - f'(0^-)$	
$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-1-k} f^{(k)}(0^-)$	n 为非负整数
$\int_0^t f(u) du$	$\frac{F(p)}{p}$	源的积分规则
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty f(u) e^{-\frac{u^2}{4t}} du$	$\frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}$	像的宗量开方规则
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^\infty F(s) ds$	仅当 $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$ 时
$af(t) + bg(t)$	$aF(p) + bG(p)$	
$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau$	$F(p)G(p)$	卷积定理

Table 7.1: 常见的拉普拉斯变换；表中 $\gamma = 0.5772\dots$ 是欧拉常数；表中假设了 $f(t)$ 的拉普拉斯变换为 $F(p)$, $g(t)$ 的拉普拉斯变换为 $G(p)$; a, b, ω, α 等均为常数。

例题 29: 证明表7.1中的 $\ln t$ 的拉普拉斯变换结果。

证明: 根据定义, $\ln t$ 的拉普拉斯变换为

$$F(p) = \int_0^{\infty} (\ln t) e^{-pt} dt. \quad (7.9)$$

显然积分只对 $p > 0$ 有意义。做积分变量替换 $s = pt$, 有

$$F(p) = \frac{1}{p} \int_0^{\infty} (\ln s - \ln p) e^{-s} ds = \frac{1}{p} (-\gamma - \ln p). \quad (7.10)$$

这里我们利用了(4.39)的结论 $\Gamma'(1) = -\gamma$, 并通过对(4.7)求导把 $\Gamma'(1)$ 写成 $\int_0^{\infty} (\ln s) e^{-s} ds$.

例题 30: 证明表7.1中的像的宗量开方规则。

证明: 令 $\zeta_{\pm} = \sqrt{pt} \pm \frac{u}{2\sqrt{t}}$ (这里 $p, u > 0$)。

当 t 在 $(0, \infty)$ 范围内变化时, ζ_+ 从 ∞ 单调减小到 $w = \sqrt{2\sqrt{pu}}$ 再单调增大至 ∞ ; ζ_- 则从 $-\infty$ 单调增大至 ∞ 。且

$$d\zeta_{\pm} = \left(\frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{t}} \mp \frac{u}{4t^{3/2}} \right) dt. \quad (7.11)$$

把平凡的积分

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{\infty}^w + \int_w^{\infty} \right) e^{-\zeta_+^2} d\zeta_+ = 0, \quad (7.12)$$

写成 t 的积分, 就有

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(\sqrt{pt} + \frac{u}{2\sqrt{t}})^2} \left(\frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{t}} - \frac{u}{4t^{3/2}} \right) dt = 0. \quad (7.13)$$

再把我们熟知的高斯积分

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\zeta_-^2} d\zeta_- = 1, \quad (7.14)$$

写成 t 变量的积分, 就有

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(\sqrt{pt} - \frac{u}{2\sqrt{t}})^2} \left(\frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{t}} + \frac{u}{4t^{3/2}} \right) dt = 1. \quad (7.15)$$

把(7.13)乘以 $e^{2u\sqrt{p}}$, 再和(7.15)相加, 就有

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(\sqrt{pt} - \frac{u}{2\sqrt{t}})^2} \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{t}} dt = 1. \quad (7.16)$$

两边乘以 $f(u)e^{-\sqrt{p}u}$ 并对 u 在 $(0, \infty)$ 内积分, 有

$$\int_0^{\infty} f(u)du \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-pt - \frac{u^2}{4t}} \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{t}} dt = F(\sqrt{p}). \quad (7.17)$$

左边交换积分次序, 然后两边同除以 \sqrt{p} 即得

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} dt \left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} f(u) e^{-\frac{u^2}{4t}} du \right] = \frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}. \quad (7.18)$$

证毕 (抹把头上的汗)。

7.3 拉普拉斯变换的应用

我们来举些例子说明如何用查表的方法求拉普拉斯变换的变换和逆变换。

例题 31: 计算 $f(t) = te^{-t}$ 的拉普拉斯变换。

解答: t 的拉普拉斯变换是 $\frac{\Gamma(2)}{p^2} = \frac{1}{p^2}$, 所以 $f(t)$ 的拉普拉斯变换是 $\frac{1}{(p+1)^2}$ 。

例题 32: 计算 $\frac{\sin t}{t}$ 的拉普拉斯变换, 并用结果计算 $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ 。

解答: $\sin t$ 的拉普拉斯变换为 $\frac{1}{p^2+1}$, 所以 $\frac{\sin t}{t}$ 的拉普拉斯变换等于:

$$\int_p^{\infty} \frac{1}{s^2+1} ds = \frac{\pi}{2} - \arctan p.$$

这说明

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-pt} dt = \frac{\pi}{2} - \arctan p.$$

令 $p=0$ 得到 $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ 。

例题 33: 计算 $F(p) = \frac{1}{(p^2+1)^2}$ 的拉普拉斯逆变换。

解答: 由 $F(p) = \frac{1}{2p} \left(-\frac{d}{dp} \right) \frac{1}{p^2+1}$, 先对 $\frac{1}{p^2+1}$ 进行拉普拉斯逆变换得到 $\sin t$, 然后根据像的求导规则得到 $\left(-\frac{d}{dp} \right) \frac{1}{p^2+1}$ 的逆变换为 $t \sin t$ 。最后根据源的积分规则得到 $F(p)$ 的逆变换为

$$f(t) = \frac{1}{2} \int_0^t u \sin u du = \frac{1}{2} (-t \cos t + \sin t). \quad (7.19)$$

拉普拉斯变换对解给定初始条件的线性方程组非常有用，我们来看一个具体的例子：

例题 34: 如图，电阻 R 和电容 C 并联，再依次和电感 L 以及电动势为 \mathcal{E} 的直流电源串联，在 $t = 0$ 时刻合上开关 K ，求在 $t > 0$ 时刻电路中的电流 $I(t)$ 。

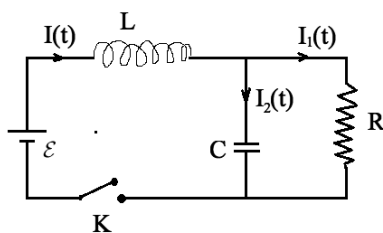


Figure 7.1: 例题 34 的图

解答: 设电容上积累的电荷为 Q ，则由并联部分电压关系得到

$$I_1 = \frac{Q}{CR}, \quad I_2 = \frac{dQ}{dt}. \quad (7.20)$$

总电压方程为：

$$L \frac{d}{dt} \left(\frac{Q}{CR} + \frac{dQ}{dt} \right) + \frac{Q}{C} = \mathcal{E}. \quad (7.21)$$

即

$$Q'' + \frac{1}{CR} Q' + \frac{1}{CL} Q = \frac{\mathcal{E}}{L}. \quad (7.22)$$

我们要求这个二阶常微分方程在 $Q(0) = 0, Q'(0) = 0$ 的初始条件下的解。对上式进行拉普拉斯变换，设 $Q(t)$ 的拉普拉斯变换为 $\tilde{Q}(p)$ ：

$$\left[p^2 \tilde{Q} - pQ(0) - Q'(0) \right] + \frac{1}{CR} \left[p\tilde{Q} - Q(0) \right] + \frac{1}{CL} \tilde{Q} = \frac{\mathcal{E}}{Lp}$$

利用 $Q(0) = Q'(0) = 0$ ，得到

$$\tilde{Q} = \frac{\mathcal{E}}{Lp \left(p^2 + \frac{p}{CR} + \frac{1}{CL} \right)}$$

记 $I_2 = Q'(t)$ 的拉普拉斯变换为 \tilde{I}_2 ，注意到 $Q(0) = 0$ ，

$$\tilde{I}_2 = p\tilde{Q} - Q(0) = \frac{\mathcal{E}}{L \left(p^2 + \frac{p}{CR} + \frac{1}{CL} \right)}$$

做因式分解 $p^2 + \frac{1}{CR}p + \frac{1}{CL} = (p - \alpha)(p - \beta)$ (即求出一元二次多项式的两个根 α, β)。如果 $L = 4CR^2$, 则 $\alpha = \beta = -\frac{1}{2CR}$ 。

$$\tilde{I}_2 = \frac{\mathcal{E}}{L(p - \alpha)^2}$$

利用前面所列公式表进行反演

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{L} t e^{\alpha t}.$$

如果 $L \neq 4CR^2$, 则

$$\tilde{I}_2 = \frac{\mathcal{E}}{L(\alpha - \beta)} \left(\frac{1}{p - \alpha} - \frac{1}{p - \beta} \right)$$

即

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{L(\alpha - \beta)} (e^{\alpha t} - e^{\beta t}).$$

最后, 利用

$$I_1 = \frac{Q}{CR} = \frac{\int_0^t I_2(t') dt'}{CR}$$

以及

$$I = I_1 + I_2$$

即可算出电路中的总电流 I 。

7.4 第7章习题

习题 82: 计算 $\delta(t^4 - 1)$ 的拉普拉斯变换。

习题 83: 计算 $e^{-t} \sin(2t)$ 的拉普拉斯变换。

习题 84: 计算

$$\frac{1}{p(p^2 + 2p + 2)}$$

的拉普拉斯逆变换。

习题 85: 计算 $\frac{p}{p^2 + 2p + 4}$ 的拉普拉斯逆变换。

习题 86: 求解方程

$$f'' + 3f' + 2f = e^{-t}$$

在给定初条件

$$f(0) = 0, f'(0) = 1$$

时的解 $f(t)$ 。

习题 87: 如图电动势为 \mathcal{E} 的直流稳压电源和电感 L 以及电阻 R 串联, 在 $t = 0$ 时刻合上开关 K , 求之后电路中的电流 $I(t)$ 。

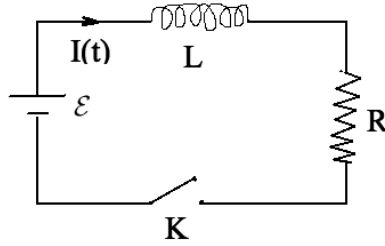


Figure 7.2: 习题 87 的图

习题 88: 设 $f(t) = \frac{1}{\cosh t}$ 的拉普拉斯变换为 $F(p)$ 。计算极限

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p).$$

习题 89: 已知 f 是周期为 1 的实函数: $f(t) = f(t+1)$ 。记 $f(t)$ 的拉普拉斯变换为 $F(p)$; $f^2(t)$ 的拉普拉斯变换为 $G(p)$ 。已知 $F(1) = 1$, 则 $G(2)$ 的最小可能值等于多少?

习题 90: 计算 $(\ln t)^2$ 的拉普拉斯变换。

习题 91: 计算 $\frac{1}{p}e^{-\sqrt{p}}$ 的拉普拉斯逆变换。

习题 92: 计算积分

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-\frac{1}{2}}}{(x+a)^p(x+b)^p} dx,$$

这里的参数 $p > \frac{1}{2}, a > 0, b > 0$ 。

习题 93: 计算极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln x - \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(e^t - 1)} \right].$$

习题 94: 用 $\tau(n)$ 表示正整数 n 的正约数的个数, 例如 $\tau(1) = 1, \tau(6) = 4$ 。计算级数和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \int_0^{\infty} \frac{\cos t}{t + n\pi} dt.$$

8	正交曲面坐标系中的矢量分析	119
8.1	极坐标	
8.2	正交曲面坐标系	
8.3	梯度、散度和旋度	
8.4	矢量分析常见公式	
8.5	第 8 章习题	
9	常见数理方程	141
9.1	泊松方程	
9.2	热传导方程	
9.3	波动方程	
9.4	热传导方程和波动方程的修正	
9.5	第 9 章习题	
10	分离变量法和谐函数概述	165
10.1	零边界条件和谐函数	
10.2	谐函数展开系数的通解	
10.3	谐函数求解概述	
10.4	第 10 章习题	
11	正交曲面坐标系中的谐函数	185
11.1	极坐标系的谐函数	
11.2	柱函数的性质	
11.3	极坐标系的数理方程	
11.4	柱坐标系的谐函数和数理方程	
11.5	球面谐函数	
11.6	勒让德多项式	
11.7	球坐标系的谐函数和数理方程	
11.8	第 11 章习题	
12	非零边界条件和格林函数方法	249
12.1	非零边界条件的泊松方程问题	
12.2	非零边界条件的波动方程问题	
12.3	格林函数 (Green's Function)	
12.4	无界区域方法总结: 积分变换和格林函数	
12.5	第 12 章习题	
13	后记	279
13.1	二阶微分方程的级数解法	
13.2	正交定理的一些推广	
13.3	临别赠题	

Bibliography	287
---------------------------	------------

数理方程与特殊函数

内容概要

梯度、散度和旋度都是用不依赖于坐标系的几何语言给出定义。具体到给定的坐标系下，这些算符会有具体的微分表达式。在局域坐标标架都是正交标架的正交曲面坐标系里，梯度、散度和旋度都可以直接通过几何语言定义快速推演出它们的微分表达式。

我们先学习最简单的泊松方程、热传导方程和波动方程。它们的解都可以用谐函数来进行分解。通过熟悉几个常见坐标系里的谐函数，可以很快地写出这些数理方程在简单区域内的解。

线性方程里的源（或者某些情况下也可以是边界条件、初始条件等）可以看成“输入信号”。方程的解看成“输出信号”。当输入信号为 δ 函数时，产生的输出信号称为格林函数——或者简单地讲，格林函数是线性系统对单位脉冲的响应。在一般情况下，任意输入信号总是可以把拆分成 δ 函数的线性组合（也就是看成很多个脉冲的组合），把这些脉冲对应的格林函数进行线性组合（通常就是格林函数的积分）就可以得到问题的解。

8. 正交曲面坐标系中的矢量分析

在本章中，我假定你已经熟悉三维空间的矢量的一些基本性质。例如两个矢量的内积 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ 满足交换律；外积 $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ 满足反交换律： $\mathbf{y} \times \mathbf{x} = -\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ ；三个矢量张成的平行六面体的有向体积的多种写法：

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \mathbf{y} \cdot (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) = -\mathbf{x} \cdot (\mathbf{z} \times \mathbf{y}) = -\mathbf{z} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{x}) = -\mathbf{y} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{z}) \quad (8.1)$$

等等。

对两个矢量 \mathbf{x}, \mathbf{y} ，由于 $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ 垂直于 \mathbf{x}, \mathbf{y} 张成的平面，所以任意第三个矢量去叉乘 $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ ，又会让结果回到 \mathbf{x}, \mathbf{y} 张成的平面上。我们预期结果可以写成 \mathbf{x}, \mathbf{y} 的线性组合——线性组合的系数是多少呢？

如果 \mathbf{z} 恰好和 \mathbf{x}, \mathbf{y} 都垂直，也就是和 $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ 平行，那么 $\mathbf{z} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{y})$ 结果必然为零。所以我们猜测线性组合的系数大致有 $\mathbf{z} \cdot \mathbf{x}$ 和 $\mathbf{z} \cdot \mathbf{y}$ 的形式

直接在直角坐标系中根据定义进行一番不算太复杂的计算后，可以得到

二重外积公式：

$$\mathbf{z} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})\mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})\mathbf{y}. \quad (8.2)$$

下面我们转入对坐标系和矢量微分的讨论。

8.1 极坐标

如图 8.1 所示, 在极坐标系中某一点 (r, θ) 出发, 稍微变化 r 得到的矢量和稍微变化 θ 得到的矢量互相垂直, 两个小矢量的物理长度为 dr 和 $rd\theta$ 。

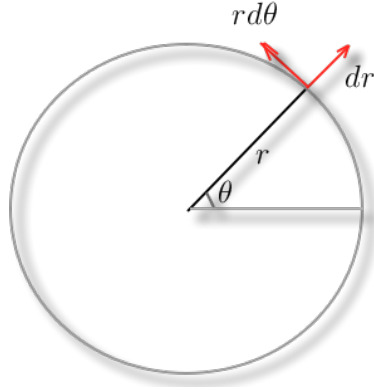


Figure 8.1: 极坐标里稍微变化 r 得到的矢量和稍微变化 θ 得到的矢量互相垂直, 两个小矢量的物理长度为 dr 和 $rd\theta$ 。

如果 r 坐标和 θ 坐标都发生了小的变动, 根据勾股定理, 位移平方是

$$ds^2 = dr^2 + (rd\theta)^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2. \quad (8.3)$$

如果极坐标里的曲线以 $r(\theta)$ 的形式给出, 曲线长度就可以写成积分:

$$\int ds = \int \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = \int d\theta \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}. \quad (8.4)$$

如果极坐标里的曲线以 $\theta(r)$ 的形式给出, 则曲线长度为

$$\int ds = \int \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = \int dr \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}. \quad (8.5)$$

我们来看一个比较有趣的例子。

例题 35: 在极坐标 (r, θ) 下, “内卷” 曲线

$$r = \frac{1}{\sqrt{1 + \theta^2}}$$

定义在 $\theta \in [0, 1000]$ 范围内。请估算这条曲线的长度。

解答：利用 (8.4) 可以得到，曲线长度为

$$\begin{aligned}
 l &= \int_0^{1000} d\theta \sqrt{\frac{\theta^2}{(1+\theta^2)^3} + \frac{1}{1+\theta^2}} \\
 &= \int_0^{1000} d\theta \sqrt{\frac{1}{1+\theta^2} \left(1 + \frac{\theta^2}{(1+\theta^2)^2}\right)^{1/2}} \\
 &\approx \int_0^{1000} d\theta \sqrt{\frac{1}{1+\theta^2} \left(1 + \frac{\theta^2}{2(1+\theta^2)^2}\right)} \quad (8.6)
 \end{aligned}$$

在最后一步我们利用了 $\frac{\theta^2}{(1+\theta^2)^2} \ll 1$ 。然后，做变量替换 $\theta = \sinh t$ 。注意到积分上限 $\theta = 1000$ 近似对应 $t \approx \ln 2000$ 。

$$\begin{aligned}
 l &\approx \int_0^{\ln 2000} \left(1 + \frac{\tanh^2 t}{2 \cosh^2 t}\right) dt \\
 &= \ln 2000 + \frac{1}{6} \tanh^3 t \Big|_0^{\ln 2000} \\
 &\approx \ln 2000 + \frac{1}{6}. \quad (8.7)
 \end{aligned}$$

在最后一步我们利用了 $\ln 2000 \gg 1$ 以及当宗量远大于 1 时， \tanh 的取值接近于 1。用计算机可以检验，我们最后的结果精确到了三位有效数。

解决了极坐标系里的曲线长度问题，我们再来看面积的计算。面积元是由图 8.1 中的两个小矢量张成的小矩形的面积： $d\mathbf{r} \cdot r d\theta = r dr d\theta$ 。

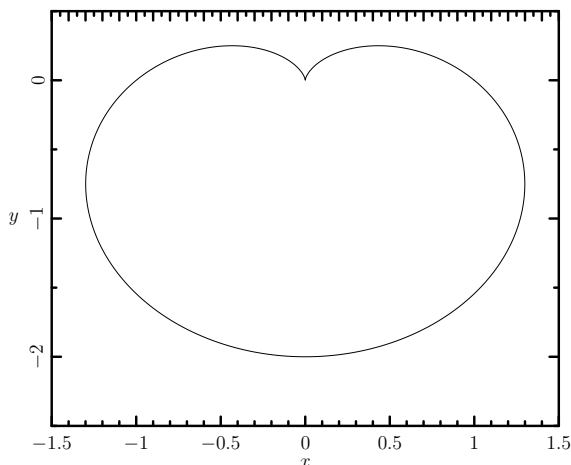
例题 36: 计算如图 8.2 所示的心型曲线包围的面积。曲线的极坐标方程为 $r = 1 - \sin \theta$ 。

解答：直接对面积元积分

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1-\sin\theta} r dr = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 - \sin \theta)^2 d\theta = \frac{3}{2} \pi.$$

8.2 正交曲面坐标系

我们把极坐标系这个例子进行推广：如果在存在局域坐标轴方向（即仅变化一个坐标分量所得的曲线在这个点的切线方向）的任意点，局域坐标轴方向总是两两垂直，则称该坐标系为**正交曲面坐标系**。一般情况下，在三维空间的坐标系里，我们总喜欢把坐标进行排列使得局域坐标轴方向构成右手的正交系。

Figure 8.2: 心型曲线 $r = 1 - \sin \theta$.

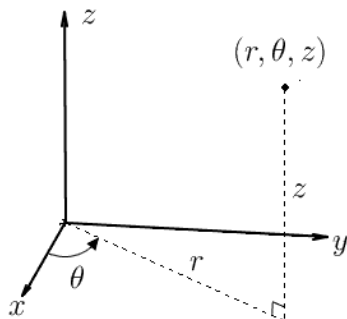
任意维的直角坐标系显然都是正交曲面坐标系。极坐标系 (r, θ) 也是正交曲面坐标系（在极坐标系的原点不存在坐标轴方向，可以不计较）。下面我们介绍在物理中应用最为广泛的几个三维空间的正交曲面坐标系。

8.2.1 柱坐标系

如图 8.3 所示，在三维空间的柱坐标系 (r, θ, z) ($r \geq 0; 0 \leq \theta < 2\pi$) 是正交曲面坐标系。变化 r 产生的长度元为 dr ；变化 θ 产生的长度元为 $r d\theta$ ；变化 z 产生的长度元为 dz 。根据三维空间的勾股定理，柱坐标系的曲线元长度就是

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2}. \quad (8.8)$$

体积元则是 $r dr d\theta dz$ 。

Figure 8.3: 柱坐标系 (r, θ, z) 正交曲面坐标系： (r, θ) 是点在 x - y 平面上的投影的极坐标。

例题 37: 在柱坐标系 (r, θ, z) 的锥型螺旋线段由方程

$$r = 2\sqrt{2}z; \quad \theta = \frac{z}{2\sqrt{2}}; \quad 0 \leq z \leq 4$$

描述。计算该曲线段的长度。

解答: 直接对长度元 $ds = \sqrt{dr^2 + r^2d\theta^2 + dz^2} = \sqrt{z^2 + 9}dz$ 积分, 曲线段长度为

$$L = \int_0^4 \sqrt{z^2 + 9} dz. \quad (8.9)$$

做变量替换 $z = 3 \sinh t$, 则 $dz = 3 \cosh t dt$, $t = \ln(\sinh t + \cosh t) = \ln \frac{z + \sqrt{z^2 + 9}}{3}$ 。所以

$$\begin{aligned} L &= 9 \int_0^{\ln 3} \cosh^2 t dt \\ &= \frac{9}{2} \int_0^{\ln 3} [1 + \cosh(2t)] dt \\ &= \frac{9}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sinh(2t) \right] \Big|_0^{\ln 3} \\ &= \frac{9}{2} [t + \sinh t \cosh t] \Big|_{t=\ln 3} \\ &= \frac{9}{2} \left[\ln 3 + \frac{20}{9} \right] \\ &= 10 + \frac{9}{2} \ln 3. \end{aligned} \quad (8.10)$$

例题 38: 在柱坐标系 (r, θ, z) 中参数方程 $r = e^{-|z|}$ 给出的曲面包围的体积是多少?

解答: 对体积元积分

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{e^{-|z|}} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{e^{-|z|}} r dr \\ &= \pi \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-2|z|} \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} dz e^{-2z} \\ &= \pi \end{aligned} \quad (8.11)$$

8.2.2 球坐标系

如图 8.4 所示, 在三维空间的球坐标系 (r, θ, ϕ) ($r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi < 2\pi$) 也是正交曲面坐标系。变化 r 产生的长度元为 dr ; 变化 θ 产生的长度元为 $r d\theta$; 变化 ϕ 产生的长度元为 $r \sin \theta d\phi$ 。你可以想象半径为 r 的地球上的一个点, 改变 r 相当于垂直于地面升上 dr ; 改变 θ 相当于沿着经线圈向着南行走 $r d\theta$ (因为经线总是大圆, 半径为 r); 改变 ϕ 相当于沿着纬线圈往东行走 $r \sin \theta d\phi$ (因为纬线圈的半径是 $r \sin \theta$)。这三个方向 (垂直上升, 往南, 往东) 显然构成右手正交系。

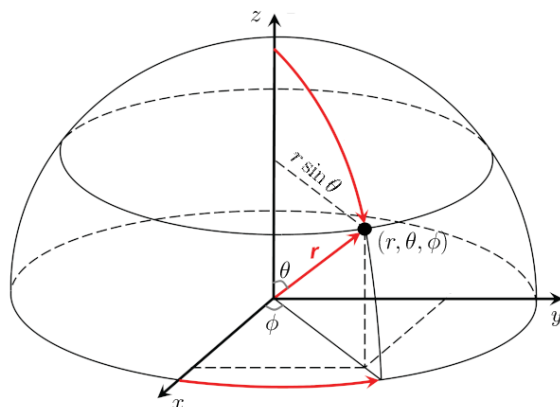


Figure 8.4: 球坐标系 (r, θ, ϕ) 是正交曲面坐标系: r 是点到原点的距离; θ 是原点到点的矢量和 z 轴正向的夹角; ϕ 是点在 x - y 平面上的投影和 x 轴正向的夹角。

球坐标系的长度元

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2}. \quad (8.12)$$

体积元为 $r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ 。

例题 39: 在球坐标系 (r, θ, ϕ) 中参数方程 $r = 2 + \sin \theta \cos \phi$ 给出的曲面包围的体积是多少?

解答：对体积元进行积分

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{2+\sin \theta \cos \phi} r^2 dr \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi (2 + \sin \theta \cos \phi)^3 \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi (8 + 6 \sin^2 \theta \cos^2 \phi) \\
 &= \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi \sin \theta (8 + 3 \sin^2 \theta) d\theta \\
 &= \frac{2\pi}{3} \int_{-1}^1 (11 - 3 \cos^2 \theta) d(\cos \theta) \\
 &= \frac{40\pi}{3}
 \end{aligned} \tag{8.13}$$

例题 40: 三维空间的 top-hat 函数定义为

$$h(\mathbf{x}) \equiv \begin{cases} 1, & \text{if } |\mathbf{x}| \leq 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases} \tag{8.14}$$

求 $h(\mathbf{x})$ 的傅立叶变换 $H(\mathbf{k})$ 。

解答：我们对给定的 \mathbf{k} 来计算

$$H(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{|\mathbf{x}| \leq 1} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3 \mathbf{x}. \tag{8.15}$$

取 \mathbf{k} 方向为北极方向（也就是 z 轴正向）建立球坐标系 (r, θ, ϕ) 。则 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = kr \cos \theta$ ，这里 $k = |\mathbf{k}|$ 。

$$\begin{aligned}
 H(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^1 r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi e^{-ikr \cos \theta} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 r^2 dr \int_{-1}^1 e^{-ikr \cos \theta} d(\cos \theta) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 r^2 dr \frac{e^{-ikr} - e^{ikr}}{-ikr} \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k^3} \int_0^1 kr \sin(kr) d(kr) \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k^3} \int_0^k \mu \sin(\mu) d\mu \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin k - k \cos k}{k^3}
 \end{aligned} \tag{8.16}$$

例题 41: 计算三维傅立叶空间的函数 $F(\mathbf{k}) = \frac{1}{k^2}$ (这里的 $k = |\mathbf{k}|$) 的傅立叶逆变换 $f(\mathbf{x})$ 。

解答: 我们对给定的 \mathbf{x} 来计算

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{k^2} d^3\mathbf{k}. \quad (8.17)$$

取 \mathbf{x} 方向为傅立叶空间的北极方向, 建立球坐标系 (k, θ, ϕ) 。则 $\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} = k|\mathbf{x}|\cos\theta$ 。

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty k^2 dk \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{e^{ik|\mathbf{x}|\cos\theta}}{k^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dk \int_{-1}^1 e^{ik|\mathbf{x}|\cos\theta} d(\cos\theta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dk \frac{e^{ik|\mathbf{x}|} - e^{-ik|\mathbf{x}|}}{ik|\mathbf{x}|} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \int_0^\infty \frac{\sin(k|\mathbf{x}|)}{k|\mathbf{x}|} d(k|\mathbf{x}|) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \int_0^\infty \frac{\sin(\mu)}{\mu} d\mu \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \end{aligned} \quad (8.18)$$

在计算过程中我们利用熟知的 $\int_0^\infty \frac{\sin(\mu)}{\mu} d\mu = \frac{\pi}{2}$ (见例如 (3.22))。

8.2.3 双球坐标系

在静电学问题中, 有时候还会用到双球坐标系。双球坐标系 (μ, η, θ) ($0 \leq \eta \leq \pi$) 和柱坐标系 (r, θ, z) 的关系是

$$r = \frac{a \sin \eta}{\cosh \mu - \cos \eta}, \quad (8.19)$$

$$z = \frac{a \sinh \mu}{\cosh \mu - \cos \eta}, \quad (8.20)$$

其中常数 $a > 0$ 。

我们先来关注 η 为常数的那些曲面。

容易直接验证

$$(r - a \cot \eta)^2 + z^2 = \frac{a^2}{\sin^2 \eta}. \quad (8.21)$$

常数 η 对应一段以 z 轴上的 $z = \pm a$ 为端点的, 张角为 $2(\pi - \eta)$ 的圆弧绕 z 轴旋转而成的曲面。显然, 这个旋转曲面和 z 轴的交点一定是 $z = \pm a$ 两点。显然, 当 $\eta = \pi/2$ 时, 曲面是半圆弧旋转而成, 也就是以原点为球心, 半径为 a 的球面。

再来看 μ 为常数的那些曲面。

容易直接验证

$$r^2 + (z - a \coth \mu)^2 = \frac{a^2}{\sinh^2 \mu}. \quad (8.22)$$

所以常数 μ 对应一个以 $a \coth \mu$ 为球心, $\frac{a}{\sinh \mu}$ 为半径的球。

对常数 $c > 0$, 方程 $|\mu| = c$ 描述的就是两个以在 z 轴上的 $z = \pm a \coth c$ 两个点为球心, $\frac{a}{\sinh c} < a \coth c$ 为半径的两个分离的, 关于 x - y 平面反射对称的球面。当 $c \rightarrow 0^+$ 时, 两个球面的球心分别在 $z = \pm \infty$ 处, 半径也趋向于无穷大, 且两球几乎相切于原点。当 c 逐渐增大, 两球逐渐分离, 且半径逐渐缩小, 球心分别往 $z = \pm a$ 两点移动。当 $c \rightarrow \infty$ 时, 两个球的球心到达 $\pm a$, 半径变为零, 也就是两个球收缩为 z 轴上的 $z = \pm a$ 的两个点。

图 8.5 展示了常数 μ 和常数 η 对应的曲面在竖直平面上截出来的曲线。从这个图上看, 双球坐标系也像是一个正交曲面坐标系。怎么验证这个猜想呢? 从方程 (8.19) 和 (8.20) 可以把长度元平方 $ds^2 = dr^2 + dz^2 + r^2 d\theta^2$ 转化为:

$$\begin{aligned} \frac{ds^2}{a^2} &= \left[\frac{(\cos \eta \cosh \mu - 1)}{(\cosh \mu - \cos \eta)^2} d\eta - \frac{\sin \eta \sinh \mu}{(\cosh \mu - \cos \eta)^2} d\mu \right]^2 \\ &\quad + \left[-\frac{\sin \eta \sinh \mu}{(\cosh \mu - \cos \eta)^2} d\eta + \frac{1 - \cosh \mu \cos \eta}{(\cosh \mu - \cos \eta)^2} d\mu \right]^2 \\ &\quad + \frac{\sin^2 \eta}{(\cosh \mu - \cos \eta)^2} d\theta^2 \\ &= \frac{(1 - \cos \eta \cosh \mu)^2 + \sin^2 \eta \sinh^2 \mu}{(\cosh \mu - \cos \eta)^4} (d\mu^2 + d\eta^2) + \frac{\sin^2 \eta}{(\cosh \mu - \cos \eta)^2} d\theta^2 \end{aligned}$$

利用 $\sin^2 \eta \sinh^2 \mu = (1 - \cos^2 \eta)(\cosh^2 \mu - 1)$, 上面的结果可以化简为:

$$ds^2 = \frac{a^2}{(\cosh \mu - \cos \eta)^2} (d\mu^2 + d\eta^2) + \frac{a^2 \sin^2 \eta}{(\cosh \mu - \cos \eta)^2} d\theta^2 \quad (8.23)$$

因为(8.23)只含坐标微分的平方项 (也就是说, 不含类似于 $d\mu d\eta$ 之类的交叉项), 局部的勾股定理成立。因此双球坐标系是正交曲面坐标系。

除此之外, 从(8.23)我们还能看出来: 变化 η 产生的长度元是 $\frac{a}{\cosh \mu - \cos \eta} d\eta$; 变化 μ 产生的长度元是 $\frac{a}{\cosh \mu - \cos \eta} d\mu$; 变化 θ 产生的长度元是 $\frac{a \sin \eta}{\cosh \mu - \cos \eta} d\theta$ 。

8.3 梯度、散度和旋度

在下面的讨论中, 我们把在每个位置都可以用单个数值表示的量称为标量场。例如, 固体中的温度、空间中的电势、空间中的引力势这些都是标量场。如果在每

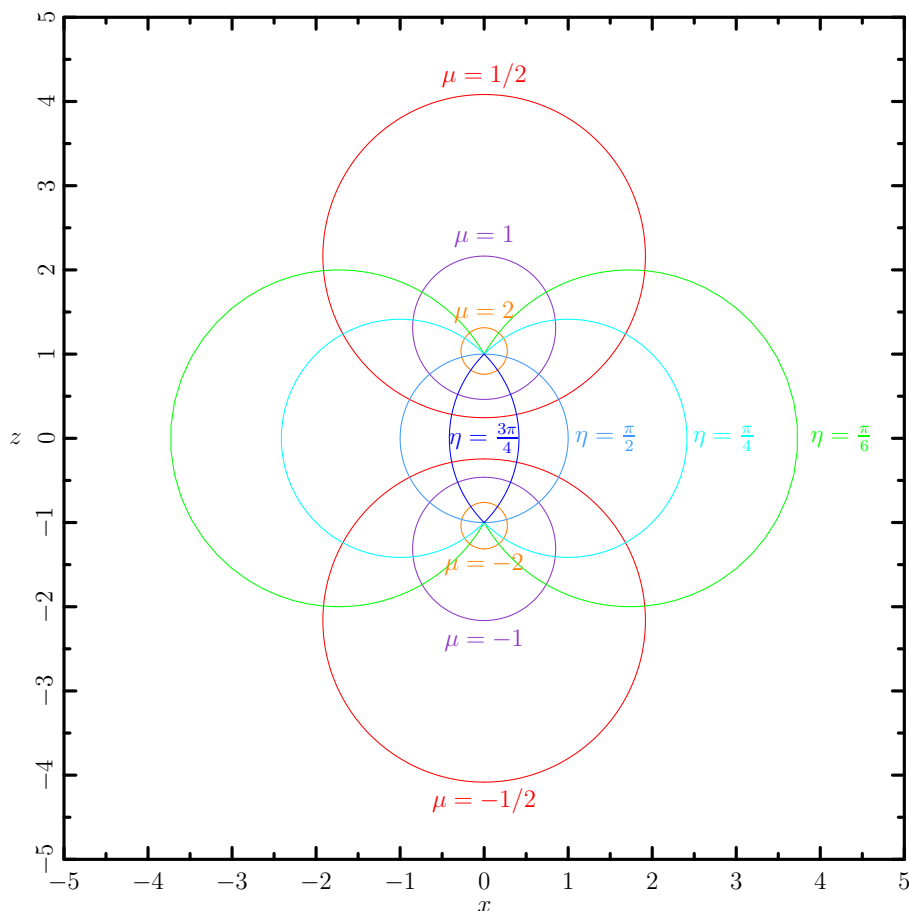


Figure 8.5: 双球坐标系中，常数 μ 对应球心在 z 轴上的球面，常数 η 对应旋转曲面。图示为这些球面/旋转曲面在 x - z 平面上截出来的曲线。

个空间位置都有一个矢量，比如热流密度，电流密度这些，都可以称为矢量场。在直角坐标系中，标量场就可以写成一个三元函数 $f(x, y, z)$ ；矢量场可以写成三个三元函数的集合 $\mathbf{j}(x, y, z) = (j_x(x, y, z), j_y(x, y, z), j_z(x, y, z))$ 。注意这里的 j_x, j_y, j_z 表示矢量场 \mathbf{j} 的 x, y, z 分量（而不像有些高等数学教材中用下标 x 来表示对 x 求偏导）。不过，至少对物理专业的学生而言，不能认为标量场就是一个三元函数，矢量场就是三个三元函数。标量场、矢量场都是物理对象，是在建立坐标系之前就存在的客观实体。只有在建立了坐标系之后，它们才会以一个或三个三元函数的数学形式表现出来。

我们在高等数学中已经接触过可以对标量场操作，得到矢量场的梯度算符 ∇ ；可以对矢量场操作，得到标量场的散度算符 $\nabla \cdot$ ；以及可以对矢量场操作，得到另一个矢量场的旋度算符 $\nabla \times$ 。这些算符也都是建立在建立坐标系之前就存在的物理对象。

我们熟悉的三维直角坐标系的梯度、散度、旋度的数学表达式

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z \quad (8.24)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \quad (8.25)$$

$$\nabla \times \mathbf{j} = \left(\frac{\partial j_z}{\partial y} - \frac{\partial j_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial j_x}{\partial z} - \frac{\partial j_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial j_y}{\partial x} - \frac{\partial j_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z. \quad (8.26)$$

并不应该被看作是这些算符的定义。其实是这些算符的物理定义导致了直角坐标系中的表达式 (8.24), (8.25) 和 (8.26), 而不是反过来。在其他坐标系中, 我们应该从这些算符的物理定义出发进行推导, 得到它们的数学表达式。虽然你也可以硬从直角坐标系中的 (8.24), (8.25) 和 (8.26) 出发, 并通过坐标系之间的微分变换法则得到其他坐标系中梯度、散度、旋度的表达式, 但这样蛮干一般会比较复杂, 并会让有趣的物理内容变成枯燥的计算。

8.3.1 梯度

为了对梯度给出一个不依赖于坐标系的描述, 我们需要学会一种技能: 被动技。

在前面对球 top-hat 函数的傅立叶变换 (8.15) 的计算过程中, 我们实际上是针对每一个不同方向的 \mathbf{k} 都选取了一个不同的球坐标系来进行积分计算。也就是说, 我们并不知道怎样对所有的 \mathbf{k} 给出一个普适的计算方法。我们是被动地进行解答: 你任给我个 \mathbf{k} , 我就告诉你怎样算出结果。这样当然也算解决了问题。

我们都知道极限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ 的意思是当 x 很接近 a 时, $f(x)$ 就很接近 c 。但无论怎样定义“很接近”(比如 $|x - a| < 10^{-100}$, $|f(x) - c| < 10^{-1000}$ 等), 都无法建立起数学分析的严密逻辑体系。柯西解决这个问题的诀窍就在于使用了被动技: 你任给我一个 $f(x)$ 能被认为很接近 c 的标准, 我都能告诉你一个 x 能被认为很接近 a 的标准, 来保证满足你的要求。用现代数学语言来描述就是: 对任给 $\varepsilon > 0$ (你指定的 $f(x)$ 接近 c 的衡量标准), 都存在 $\delta > 0$ (我给出的 x 接近 a 的衡量标准), 使得 $|x - a| < \delta$ 时, 都有 $|f(x) - c| < \varepsilon$ 。

把梯度算符作用于一个标量场 f , 怎样 (不依赖于坐标系地) 描述得到的矢量场 ∇f 呢? 我采用被动技: 请你任意指定一个方向 \mathbf{n} , 我告诉你 ∇f 沿着 n 方向投影的大小。具体地说就是

梯度的定义: 标量场的梯度在任意指定方向上的投影等于该标量场沿着这个方向上的单位长度内的变化量。

在这个定义里, 我没有用任何的数学符号! 但你可能有点疑惑: 我们习惯于用矢量的大小和方向来描述它, 并籍此建立脑海中的物理图像。这样仅仅描述怎样

投影, 算讲清楚梯度是什么样的矢量了吗? 实际上, 一个矢量的方向就是使得它的投影最大的方向。根据上面的定义, 我们立刻可以知道: **标量场的梯度的方向就是该标量场 (在单位长度内) 变化得最快的方向, 大小就是该标量场最大的 (单位长度) 变化率。**所以, 这种对任意方向投影的描述包含了矢量大小和方向的信息, 是更为全面的描述方式。

下面我们来考虑正交曲面坐标系中的梯度。

以球面坐标系为例: 变动 r, θ, ϕ 时产生的正交长度元分别为 $\delta r \vec{e}_r, r \delta \theta \vec{e}_\theta, r \sin \theta \delta \phi \vec{e}_\phi$ 。这里我们更为明确地添加了 $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$ 这些构成右手系的正交归一化矢量来表示你变动坐标 r, θ, ϕ 时产生的小矢量的方向。

设 f 为某个标量函数:

- 沿着 \vec{e}_r 方向 (保持 θ, ϕ 不变, 变化 r), f 的梯度分量为

$$\lim_{\delta r \rightarrow 0} \frac{\delta f}{\delta r} = \frac{\partial f}{\partial r}.$$

- 沿着 \vec{e}_θ 方向 (保持 r, ϕ 不变, 变化 θ), f 的梯度分量为

$$\lim_{\delta \theta \rightarrow 0} \frac{\delta f}{r \delta \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

- 沿着 \vec{e}_ϕ 方向 (保持 r, θ 不变, 变化 ϕ), f 的梯度分量为

$$\lim_{\delta \phi \rightarrow 0} \frac{\delta f}{r \sin \theta \delta \phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi}$$

因此, 我们可以直接写出

球坐标系下的梯度的微分表达式:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{e}_\phi. \quad (8.27)$$

这其实就是把直角坐标系的梯度公式中的 $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ 换成了局域正交系里对长度元的微分 $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$ 。

容易用同样的方法得到

柱坐标系的梯度的微分表达式:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z. \quad (8.28)$$

8.3.2 散度

因为散度作用于矢量场之后得到的是比较简单的标量场, 我们不需要用被动技来描述, 而是直接给出

散度的定义: 矢量场的散度是单位体积内该矢量场在表面的净流出量。

所谓矢量 \mathbf{j} 在某块空间区域 Ω 的表面净流出量, 是指它在表面的法向分量对表面面积元的积分: $\iint_{\partial\Omega} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$ 。如果你学习过电磁学里的通量的概念, 对这种表面积分应该是不陌生的。

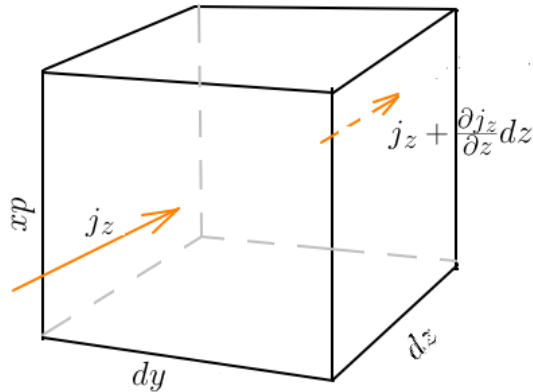


Figure 8.6: 直角坐标系中的散度计算示意图

如图 8.6 所示, 在直角坐标系中考虑由 $dx\vec{e}_x$, $dy\vec{e}_y$, $dz\vec{e}_z$ 这三个由坐标微小变化产生的小矢量构成的小长方体, \mathbf{j} 沿 \vec{e}_z 方向的分量 j_z 在这个小长方体表面的净流出量由两部分贡献组成, 分别为 $-j_z dx dy$ (图示前面实线箭头的流入量, 因为是流入量, 所以计算净流出量时要加个负号) 和 $(j_z + \frac{\partial j_z}{\partial z} dz) dx dy$ (图示后面虚线箭头的流出量), 所以 j_z 分量对表面净流出量的贡献为 $\frac{\partial j_z}{\partial z} dx dy dz$, 对散度 (单位体积的表面净流出量) 的贡献为 $\frac{\partial j_z}{\partial z}$ 。同理, j_x , j_y 分量对散度的贡献分别为 $\frac{\partial j_x}{\partial x}$, $\frac{\partial j_y}{\partial y}$ 。因而我们得到了公式(8.25)。

现在我们以球坐标系为例来说明一般的正交曲面坐标系和直角坐标系有何不同。设 \mathbf{j} 沿着 $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$ 的分量为: (j_r, j_θ, j_ϕ) 。如图 8.7 所示, 我们考虑由 $dr\vec{e}_r, rd\theta\vec{e}_\theta, r\sin\theta d\phi\vec{e}_\phi$ 这三个由坐标微小变化产生的小矢量构成的近似长方体, 并计算矢量场在这个小长方体表面的净流出量。我们来看 j_r 分量的贡献。 j_r 在这个小长方体表面的净流出量由两部分贡献组成, 分别为 $-j_r(rd\theta)(r\sin\theta d\phi)$ (图示前面实线箭头的流入量, 因为是流入量, 所以计算净流出量时要加个负号) 和 $j_r(rd\theta)(r\sin\theta d\phi) + \frac{\partial [j_r(rd\theta)(r\sin\theta d\phi)]}{\partial r} dr$ (图示后面虚线箭头的流出量)。注意这里和直角坐标系的计算过程的差别: 我们必须把面积元 $(rd\theta)(r\sin\theta d\phi)$ 在前后表面的差异也考虑进去。

于是我们得到了 j_r 对净流出率的贡献为: $\frac{\partial}{\partial r} [j_r(rd\theta)(r\sin\theta d\phi)] dr$ 。这个结果来自于前后两个面的流入、流出量的不完全抵消。这一方面是因为 j_r 在 \vec{e}_r 方向的变化, 另一方面也因为前后两个面的面积也发生了微小的变化。

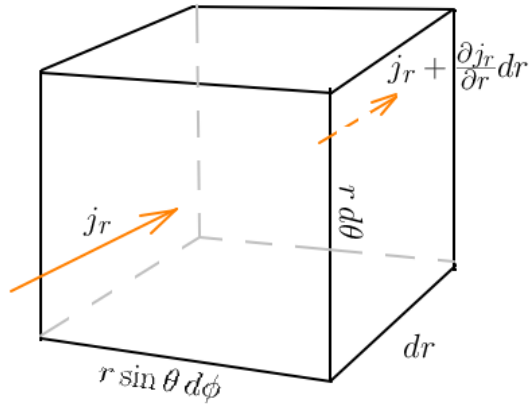


Figure 8.7: 球坐标系中散度计算示意图

除以体积元 $dr(r d\theta)(r \sin \theta d\phi)$, 得到 j_r 对散度的贡献: $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j_r)$ 。

同理, j_θ 对散度的贡献为

$$\frac{1}{(dr)(rd\theta)(r \sin \theta d\phi)} \frac{\partial}{\partial \theta} [(dr)(r \sin \theta d\phi) j_\theta] d\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta j_\theta).$$

j_ϕ 对散度的贡献为

$$\frac{1}{(dr)(rd\theta)(r \sin \theta d\phi)} \frac{\partial}{\partial \phi} [(dr)(rd\theta) j_\phi] d\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} j_\phi.$$

最后全部加起来, 就得到球坐标系里 $\nabla \cdot \mathbf{j}$ 的具体微分表达式:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta j_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} j_\phi. \quad (8.29)$$

通过这个例子我们看到, 和之前梯度的情况有所不同, 我们并不能简单地模仿直角坐标系的散度公式, 简单地把 $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ 换成了局域正交系里对长度元的微分 $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$ 。这是因为在直角坐标系里, 由坐标微小变化产生的是严格的长方体, 前后 (或者左右/上下) 两个面的面积总是严格相同的, 故而没有抵消的流入、流出量完全由矢量场的分量的变化引起。而在一般的正交曲面坐标系里, 由坐标微小变化产生的近似长方体可能有稍微的弯曲, 还要考虑前后 (或者左右/上下) 矢量场流过的面积的变化。

所以我们采取计算步骤是, 先忽略前后 (左右/上下) 面积变化, 模仿直角坐标系的散度公式写出一个“平坦近似” (忽略近似长方体形状的弯曲) 下的计算公式。然后再考虑前后 (左右/上下) 面积变化带来的影响。具体的步骤是

- 1 以三个长度元写出类似于直角坐标系形式的“平坦近似散度”。

2 每一项都在微分号内乘以面积修正因子，在外面除掉。

我们以球坐标系为例来说明上面看起来有些抽象的描述。我们写出如下的计算草稿：

分量方向	正交长度元	垂直面积元	面积修正因子
\vec{e}_r	dr	$(rd\theta)(r\sin\theta d\phi)$	r^2 (仅提取和 r 有关的因子)
\vec{e}_θ	$r d\theta$	$(dr)(r\sin\theta d\phi)$	$\sin\theta$ (仅提取和 θ 有关的因子)
\vec{e}_ϕ	$r\sin\theta d\phi$	$(dr)(rd\theta)$	1 (仅提取和 ϕ 有关的因子)

Table 8.1: 球坐标系散度表达式的演算草稿

按照表 8.1 第二列写出平坦近似(即把(8.25)中的 $\partial x, \partial y, \partial z$ 分别置换为 $\partial r, r\partial\theta, r\sin\theta\partial\phi$):

$$\nabla \cdot \mathbf{j} \approx \frac{\partial}{\partial r} j_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} j_\theta + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} j_\phi$$

按照表 8.1 最后一列进行面积修正 (在偏微分号作用项上乘以面积修正因子, 并在偏微分号外面除掉该因子), 就得到

球坐标系散度的微分表达式:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j_r) + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta j_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} j_\phi. \quad (8.30)$$

用同样的方法, 可以写出

柱坐标系里的散度的微分表达式:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r j_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial j_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial j_z}{\partial z}. \quad (8.31)$$

8.3.3 旋度

旋度算符作用于矢量场, 得到的还是矢量场。我们已经有了经验, 对矢量最有效的自然语言描述方法是使用被动技: 你指定一个方向, 我告诉你在这个方向上矢量的投影大小。下面我们给出旋度的自然语言定义:

旋度的定义: 矢量场的旋度在任意给定的方向上的投影是该矢量场在垂直于该给定方向的平面上的单位面积的边界环路积分。

具体地说, $\nabla \times \mathbf{j}$ 在 P 点的 \mathbf{n} 方向上的投影可以这样来“画图测量”: 过 P 点作和 \mathbf{n} 垂直的平面。在该平面上, 取包含 P 点的一个简单小面积元 dS 。然后把 \mathbf{j} 沿着

dS 的边界积分——也就是把 \mathbf{j} 沿着边界方向的分量对边界长度元积分： $\oint_{\partial dS} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l}$ 。积分的结果和面积 dS 之比（当 $dS \rightarrow 0^+$ 时）就是 $\nabla \times \mathbf{j}$ 在 P 点的 \mathbf{n} 方向上的投影。

边界的方向由右手法则给出：让你右手的大拇指指向 \mathbf{n} 方向，其余四指弯曲时指向的方向就是 dS 边界的正向。

这个定义很明确地刻画出了旋度的物理意义：**旋度 $\nabla \times \mathbf{j}$ 在 \mathbf{n} 方向上的分量刻画的是矢量场 \mathbf{j} 以右手法则围绕 \mathbf{n} 的环路积分的大小。**

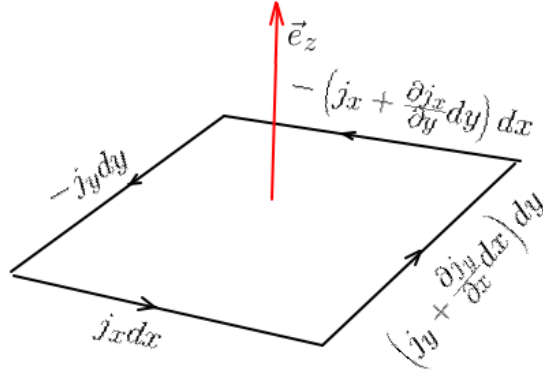


Figure 8.8: 直角坐标系旋量计算示意图

我们先来看直角坐标系的旋量算符的微分表达式是怎样得到的。例如我们考虑 $\nabla \times \mathbf{j}$ 沿 \vec{e}_z 方向的分量。图 8.8 展示了矢量在垂直于 \vec{e}_z 的平面上的一个面积为 $dx dy$ 的方形小面积元的边界上的环路积分。

$$(\nabla \times \mathbf{j})_z = \frac{1}{dx dy} \left[\frac{\partial j_y}{\partial x} dx dy - \frac{\partial j_x}{\partial y} dy dx \right] = \frac{\partial j_y}{\partial x} - \frac{\partial j_x}{\partial y}.$$

也就是我们在 \vec{e}_z 方向上验证了 (8.26)。用同样的方法可以验证 \vec{e}_x , \vec{e}_y 方向上 (8.26) 也成立。

在一般的正交曲面坐标系中，差别是沿边界作环路积分时，小面积元相对两条边的长度可能会有稍许不同。因此，我们需要做个长度修正。具体步骤是：

- 1 以三个长度元写出类似于直角坐标系形式的“平坦近似旋度”。
- 2 每个方向的矢量分量都乘以相应方向的长度元，并在外面除掉。

我们仍然以球坐标系为例来说明上面看起来有些抽象的描述。先根据表 8.1 的第二列，写出旋度的平坦近似（即把 (8.26) 中的 $\partial x, \partial y, \partial z$ 分别替换为 $\partial r, r \partial \theta, r \sin \theta \partial \phi$ ）：

$$\nabla \times \mathbf{j} \approx \left(\frac{1}{r} \frac{\partial j_\phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial j_\theta}{\partial \phi} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial j_r}{\partial \phi} - \frac{\partial j_\phi}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{\partial j_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial j_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\phi. \quad (8.32)$$

我们来看第一项 $\frac{1}{r} \frac{\partial j_\phi}{\partial \theta}$ 。 j_ϕ 对应的长度元为 $r \sin \theta d\phi$ ，但偏微分只对 θ 进行，所以我们只要考虑其中的 $\sin \theta$ 因子。在偏微分号里多乘个 $\sin \theta$ ，并在外面除掉，就把该项修正为： $\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta j_\phi)$ 。按照这种方法，对所有偏微分项做完修正后，我们得到了

球坐标系旋度的微分表达式:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{j} = & \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta j_\phi) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} j_\theta \right) \vec{e}_r \\ & + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} j_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r j_\phi) \right) \vec{e}_\theta \\ & + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r j_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} j_r \right) \vec{e}_\phi. \end{aligned} \quad (8.33)$$

用同样的方法，我们可以写出

柱坐标系旋度的微分表达式:

$$\nabla \times \mathbf{j} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial j_z}{\partial \theta} - \frac{\partial j_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial j_r}{\partial z} - \frac{\partial j_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r j_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial j_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z. \quad (8.34)$$

8.3.4 拉普拉斯算符

拉普拉斯算符 ∇^2 是在物理学中最为常见的算符。它的定义是

$$\nabla^2 f \equiv \nabla \cdot (\nabla f). \quad (8.35)$$

也就是梯度的散度。拉普拉斯算符作用于一个标量场，仍然得到一个标量场。

联合(8.27)和(8.30)，可以得到：

球坐标系拉普拉斯算符的微分表达式:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial}{r^2 \partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{r^2 \sin \theta \partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \quad (8.36)$$

联合(8.28)和(8.31)，可以得到：

柱坐标系拉普拉斯算符的微分表达式:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (8.37)$$

8.4 矢量分析常见公式

我们在描述矢量场时用到了“被动技”：你任给我一个方向，我给你矢量在这个方向上的分量。当你改变选取的方向时，不同方向的分量之间存在很强的联系。也就是说，你不能指望随便指定一个投影的规则，就真的造出一个矢量场。

但另一方面，我们通常对于具体的物理量是否是矢量不会产生太大的疑问，所以从物理实体中构造矢量（而不去检验矢量的不同方向的分量之间的关系是否自洽）是物理学家们更常用的偷懒方法。

更一般地， n 阶张量是这样用“被动技”描述的：你依次给我（有序排列的） n 个方向，我就给你 n 阶张量在这 n 个方向上的分量。

标量、矢量分别是零阶、一阶张量。

一般的 n 阶张量在各个方向组上的分量当然也要满足一定的自洽条件（这通常是通过坐标系变换时张量分量必须满足的变换规则来描述）。不过，对于物理专业的初学者而言，我建议的学习方法是先通过物理实体来构造张量（而不做严谨的数学检验）。等到对张量建立了足够的物理图像之后，再去系统地学习张量的严谨数学定义。

假设 \mathbf{j} 是个矢量场，我们用它来构造一个二阶张量场。设你指定的两个方向是 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ 。我取二阶张量 T 沿着 $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$ 的分量为： \mathbf{j} 沿着 \mathbf{n}_2 方向的分量的梯度沿着 \mathbf{n}_1 方向的分量。这句绕口的话写下来就是：

$$T_{n_1, n_2} \equiv \mathbf{n}_1 \cdot \nabla(\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{j}). \quad (8.38)$$

这个二阶张量我们称之为 \mathbf{j} 的“梯度”，并简单地记作 $\nabla\mathbf{j}$ 。这个二阶张量还可以形式上再取一次“散度”得到 $\nabla^2\mathbf{j}$ ，结果是一个矢量——它沿任意 \mathbf{n}_2 方向的分量是 $\nabla^2(\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{j})$ 。此外，我们还可以把 $\nabla\mathbf{j}$ 形式地和一个矢量 \mathbf{u} “求内积”得到 $\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{j}$ ，结果是一个矢量——它沿任意 \mathbf{n}_2 方向的分量是 $\mathbf{u} \cdot \nabla(\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{j})$ 。

表8.2总结了梯度、散度、旋度对标量、矢量、二阶张量的操作。

被操作量	操作	操作结果
标量	梯度	矢量
矢量	梯度	二阶张量
矢量	散度	标量
矢量	旋度	矢量
二阶张量	散度	矢量

Table 8.2: 梯度、散度、旋度对标量场、矢量场和二阶张量的作用结果

梯度、散度、旋度可以进行各种联合操作，表8.3给出了各种可能性。表中的“恒为零”的这些结果假设了所讨论的函数性质足够良好（二阶偏导可以交换次

序)。我们也可以粗略地(十分不严谨地)用矢量的知识来理解这些结果。例如 $\nabla \times \nabla f \equiv 0$ (梯度的无旋性), 我们可以理解为 ∇ 和自身平行, 所以 $\nabla \times \nabla \equiv 0$ 。又如 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{j}) \equiv 0$ (旋度的无散性), 我们可以理解为由 $\nabla, \nabla, \mathbf{j}$ 张成的平行六面体因为有两条边相同, 所以退化为平行四边形, 有向体积退化为零。当然, 把 ∇ 看成一个普通矢量并不正确, 我这里讲的仅仅是记忆的方法而不是证明。

被操作量	第一步操作	第二步操作	操作结果	备注
标量	梯度	散度	标量	梯度的无旋性
标量	梯度	旋度	恒为零	
矢量	梯度	散度	矢量	
矢量	散度	梯度	矢量	
矢量	旋度	旋度	矢量	
矢量	旋度	散度	恒为零	旋度的无散性

Table 8.3: 梯度、散度、旋度的联合操作

思考题: 请用梯度、散度、旋度的几何意义证明梯度的无旋性和旋度的无散性。

注意到对矢量场仅有三种非零的联合操作: 梯度的散度、散度的梯度、旋度的旋度。这三个结果之间存在着一个非常简单的联系: **旋度的旋度等于散度的梯度与梯度的散度之差**。也就是下面的

二重旋度公式:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{j}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{j}) - \nabla^2 \mathbf{j} \quad (8.39)$$

对比二重旋度公式(8.39)和二重外积公式(8.2), 我们发现高度的相似性。在矢量分析中把 ∇ 当成一个普通的矢量经常能获得一些正确的结果, 这是因为(在假设了函数足够光滑之后)偏微分像乘法一样可以交换次序。不过, 这并不是什么万能的法则。尤其要注意的是, ∇ 是一个微分算符, 它必须作用到它后面的每一个非常数函数。当通过普通的类比得到的公式违反了这一法则时, 我们必须把一些项“交换因子次序”, 并加到结果中去。下面列出了一些矢量分析的公式, 请体会(特别是最后两个例子)我是如何通过“交换因子次序”的手段来保证微分算符作用到它后面每一个函数的。

- $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
- $\nabla^2(fg) = g\nabla^2 f + f\nabla^2 g + 2\nabla f \cdot \nabla g$

- $\nabla \cdot (f\mathbf{j}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{j} + f(\nabla \cdot \mathbf{j})$
- $\nabla \times (f\mathbf{j}) = (\nabla f) \times \mathbf{j} + f(\nabla \times \mathbf{j})$
- $\nabla \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{u}) = (\nabla \times \mathbf{j}) \cdot \mathbf{u} - (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{j}$
- $\nabla \times (\mathbf{j} \times \mathbf{u}) = (\nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{j} - (\nabla \cdot \mathbf{j} + \mathbf{j} \cdot \nabla)\mathbf{u}$.

思考题：利用直角坐标系中的具体微分表达式证明二重旋度公式。

8.5 第8章习题

习题 95: 在极坐标系 (r, θ) 中, 当 θ 在区间 $[0, 1]$ 内连续变化时, 方程 $r = \theta$ 给出了一条曲线段。请计算这条曲线段的长度。

习题 96: 两个相距为 $\frac{1}{\pi}$ 的平行平面去截一个半径为 1 的球, 两平行面都与球相交。那么球面夹在两个平行平面之间的部分的面积是多少?

习题 97: 四维直角坐标系 (w, x, y, z) 中的单位超球体可以定义为满足

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$

的所有点。如果再加一个限制条件

$$w^2 \leq \frac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2),$$

求所得区域的四维体积。

习题 98: 双球坐标系里 $\eta = 0$ 和 $\eta = \pi$ 分别对应什么点集?

习题 99: 写出双球坐标系里的梯度、散度、旋度, 以及拉普拉斯算符的具体微分表达式。

习题 100: 抛物坐标系 (u, v, ϕ) ($u \geq 0; v \geq 0; 0 \leq \phi < 2\pi$) 和球坐标系 (r, θ, ϕ) 的关系为

$$u = r(1 + \cos \theta) \tag{8.40}$$

$$v = r(1 - \cos \theta) \tag{8.41}$$

常数 u 和常数 v 对应的显然都是以原点为焦点的旋转抛物面 (关于这一点, 你需要回忆下抛物线的极坐标方程)。请证明抛物坐标系是正交曲面坐标系, 并计算分别变化坐标 u, v, ϕ 时产生的长度元。写出这个坐标系里的梯度、散度、旋度, 以及拉普拉斯算符的具体微分表达式。

习题 101: 三维空间的两个矢量的内积是 2, 外积 (叉乘) 的长度为 1。则这两个矢量的长度之和的最小值是多少?

习题 102: 设矢量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 的长度都是 1, 且 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, 则

$$|\mathbf{a} + 2\mathbf{c}| + |3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c}|$$

的最小值是多少?

习题 103: 在一个半径为 1 的球 Ω 内, 标量函数 f 和 g 分别满足方程:

$$f + 2\nabla^2 f = 0$$

和

$$2g + \nabla^2 g = 0.$$

且 f 和 g 在球的表面上处处为零。则在球内 fg 的体积分

$$I = \iiint_{\Omega} fg dV$$

的取值范围是多少?

习题 104: 在本题中, 我们近似认为地球轨道是半径为 r 的圆, 一年为 365 天。现在假想把太阳分成质量比为 1:2:3:4 的四个小球 (均可看作质点)。然后把这四个小球放置在空间中, 使得任何两个小球之间的距离都等于 r (也就是说, 以它们为顶点构成一个边长等于日地距离的正四面体)。然后由静止释放这四个小球, 让它们在相互之间的引力作用下开始运动。问: 经过多少天后, 第一次发生小球间的碰撞?

9. 常见数理方程

我们先通过具体的例子来熟悉一些常见的数理方程。

9.1 泊松方程

我们知道牛顿引力势 φ 满足泊松方程：

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi G\rho, \quad (9.1)$$

这里 φ 是引力势， G 是牛顿引力常数， ρ 是质量密度。

方程(9.1)的满足无穷远处趋向于零的解是：

$$\varphi(\mathbf{x}) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3\mathbf{y}. \quad (9.2)$$

在静电学中，联立高斯定律 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ 和电场与电势的关系 $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ 也可以得到泊松方程

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (9.3)$$

这里 φ 是静电势， ρ 是电荷密度， ϵ_0 是真空的介电常数。

方程(9.3)的满足无穷远处趋于零的解是：

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3\mathbf{y}. \quad (9.4)$$

解 (9.2) 和 (9.4) 是怎么得到的呢？显然这两个解在数学上是一回事，所以我们推导其中一个，例如(9.1)的解(9.2)就够了。

第6.5节介绍了如何把复杂的微分方程转化到傅立叶空间的代数方程。方程(9.1)在傅立叶空间的形式是：

$$-k^2 \varphi = 4\pi G\rho, \quad (9.5)$$

这里的 $k = |\mathbf{k}|$ 。

于是傅立叶空间的解是 $\varphi(\mathbf{k}) = -\frac{4\pi G\rho(\mathbf{k})}{k^2}$ 。对此进行傅立叶逆变换就能得到 $\varphi(\mathbf{x})$ 。根据“乘积的傅立叶逆变换等于傅立叶逆变换的卷积”，我们只要把 $\frac{1}{k^2}$ 的傅立叶逆变换 $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{|\mathbf{x}|}$ (见(8.18)) 和 $-4\pi G\rho(\mathbf{x})$ 作卷积，得到恰好就是 (9.2)。

9.1.1 边界条件和唯一解定理

在知道了全空间所有电荷的分布之后，我们可以直接根据(9.4)计算出静电势。不过，更常见的情形是，我们只在一个有限的空间区域内研究静电学问题，并不知道区域边界以及区域外的电荷分布。这时候仅凭区域内的电荷分布无法计算出电势，需要额外补充条件。例如，当我们把区域 Ω 的边界 (记作 $\partial\Omega$) 都接地时，就有

$$\varphi(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} = 0. \quad (9.6)$$

这样在边界上对所求函数做的限制称为边界条件。

有了边界条件 (9.6)，再加上已知区域 Ω 内部的电荷密度 $\rho(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in \Omega$)，就能唯一地确定区域内的电势 $\varphi(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in \Omega$)。

我们先来讨论解的唯一性。假设 φ_1, φ_2 均在边界 $\partial\Omega$ 上满足 (9.6) 以及在 Ω 内满足 (9.3)。考虑函数 $f(\mathbf{x}) \equiv \varphi_1(\mathbf{x}) - \varphi_2(\mathbf{x})$ ，显然有 $f(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} = 0$ 以及 $\nabla^2 f(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \Omega} = 0$ 。于是，

$$0 \leq \int_{\Omega} |\nabla f|^2 d^3\mathbf{x} \quad (9.7)$$

$$= \int_{\Omega} [\nabla \cdot (f\nabla f) - f\nabla^2 f] d^3\mathbf{x} \quad (9.8)$$

$$= \int_{\Omega} \nabla \cdot (f\nabla f) d^3\mathbf{x} \quad (9.9)$$

$$= \int_{\partial\Omega} f\nabla f \cdot d\mathbf{S} \quad (9.10)$$

$$= 0 \quad (9.11)$$

显然(9.7)不等号取到等号，必须 ∇f 处处为零，也就是 f 为一个常量。又因为在边界上已知 $f = 0$ ，所以 f 恒为零，也就是说 φ_1 和 φ_2 实际为同一个解。

上述证明过程显然可以推广到很一般的边界条件：只要在边界上每个点给定 φ 或者 φ 的梯度垂直于边界表面的分量，则两个解至多相差一个常数。

在有些教材中对边界条件有一些约定。当给定边界上 φ 值, 叫做第一类边界条件; 当给定边界上 $(\nabla\varphi)_\perp$ (下标 \perp 表示垂直边界表面往外的分量) 时, 叫做第二类边界条件; 如果在部分边界点给的是 φ , 另一部分边界点上给的是 $(\nabla\varphi)_\perp$, 则叫做混合边界条件。对第一类或者混合边界条件, 由于边界上至少有一个点的 φ 值是给定的, 所以也不能存在相差为非零常数的不同解, 解就是唯一的。对于第二类边界条件, 则不同解只能相差一个常数。

给各类边界条件起一些难记的名字并没有什么实际的意义, 尤其是当这些名字对应的只是一些特例的时候。我们直接给出下面的更一般的 (我随便起了个名字的)

泊松方程唯一解定理: 设 $\alpha(\mathbf{x}), \beta(\mathbf{x})$ 是定义在边界 $\partial\Omega$ 上的已知函数, 在 $\partial\Omega$ 上的任意点满足: α, β 不同时为零, 且 $\alpha\beta \geq 0$ 。那么, 当在 Ω 内给定 $\nabla^2\varphi$, 在边界 $\partial\Omega$ 上给定 $\alpha\varphi + \beta(\nabla\varphi)_\perp$ 时, φ 的不同解只能相差一个常数。进一步, 如果 α 不恒为零, 则 φ 只能有唯一解。

之前的证明思路仍然可行。仍然假设 f 是两个解的差, 则有 $\nabla^2 f|_\Omega = 0$ 以及

$$\alpha f + \beta (\nabla f)_\perp|_{\partial\Omega} = 0. \quad (9.12)$$

我们把 $\partial\Omega$ 上 β 不为零的点集记作 $\partial\Omega_\beta$, β 为零 (那么 α 必然不为零) 的点集记作 $\partial\Omega_\alpha$, 则

$$0 \leq \int_\Omega |\nabla f|^2 d^3\mathbf{x} \quad (9.13)$$

$$= \int_\Omega [\nabla \cdot (f\nabla f) - f\nabla^2 f] d^3\mathbf{x} \quad (9.14)$$

$$= \int_\Omega \nabla \cdot (f\nabla f) d^3\mathbf{x} \quad (9.15)$$

$$= \int_{\partial\Omega} f (\nabla f)_\perp dS \quad (9.16)$$

$$= - \int_{\partial\Omega_\beta} \frac{\alpha}{\beta} f^2 dS - \int_{\partial\Omega_\alpha} \frac{\beta}{\alpha} [(\nabla f)_\perp]^2 dS \quad (9.17)$$

$$\leq 0 \quad (9.18)$$

于是(9.13)和(9.18)中的不等号必须取到等号, 也就是 f 为常数。于是再根据(9.12)知道, 在 $\partial\Omega$ 上处处有 $\alpha f = 0$ 。于是只要 α 不恒为零, 常数 f 只能是零。

唯一性定理中的 $\alpha\beta \geq 0$ 是导出最后一步 (9.18) 的不等号的关键, 要注意这个条件是不可去掉的。图9.1给出一个当 $\alpha\beta \geq 0$ 不满足时, 解不唯一的例子。

9.1.2 解的存在性问题

最后我们来思考下解的存在性问题。从物理的角度考虑, 只要边界条件是可以实际操作设置的, 那么电势解的存在是显然的。但从数学的角度看, 解的存在性

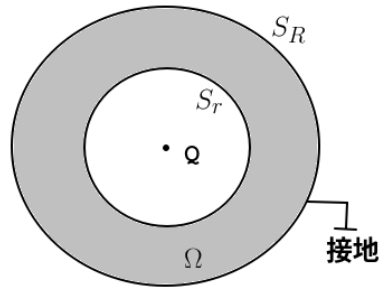


Figure 9.1: 设有一个接地的半径为 R 的金属球壳 S_R , 内部除了球心处之外都为真空。我们假想出另外一个同心但半径 $r < R$ 的球面 S_r , 考虑夹在 S_r 和 S_R 之间的区域 Ω 。假设你能在球心处放置点电荷, 且随意调节电量 Q 的大小, 那么容易证明在边界 S_r 上, 电势 φ 满足 $\varphi - \frac{r(R-r)}{R}(\nabla\varphi)_\perp = 0$ 。显然, 这个系统无论是电势还是电场, 都因为你可以随意调节点电荷 Q 的大小而不存在唯一解。

却一点都不简单。

我们先来看一个一维区间 $[a, b]$ 内第一类边界条件的简单例子: 当 $\varphi(a)$ 和 $\varphi(b)$ 都给定, 且对所有 $x \in (a, b)$, $\varphi''(x)$ 都给定时, 解的存在性和唯一性都很显然。不过, 我们要用第6.2节介绍过的更高级的观点来看待这个问题。把 $[a, b]$ 划分为 $N+1$ 等份, 定义

$$dx \equiv \frac{b-a}{N+1} \quad (9.19)$$

以及

$$x_j \equiv a + jdx, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N+1 \quad (9.20)$$

我们认为 N 足够大以至于可以近似认为

$$\varphi''(x_i) = \frac{\varphi(x_{i-1}) + \varphi(x_{i+1}) - 2\varphi(x_i)}{dx^2} \quad (9.21)$$

由于 $\varphi(x_0) = \varphi(a)$ 和 $\varphi(x_{N+1}) = \varphi(b)$ 均已知, 于是未知函数 $\varphi(x)$ 可以近似认为由矢量

$$\begin{pmatrix} \varphi(x_1)\sqrt{dx} \\ \varphi(x_2)\sqrt{dx} \\ \dots \\ \varphi(x_{N-1})\sqrt{dx} \\ \varphi(x_N)\sqrt{dx} \end{pmatrix} \quad (9.22)$$

来表示。这个待求的矢量满足方程：

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & & & \\ & & 1 & -2 & 1 & & & & \\ & & & & \dots & & & & \\ & & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(x_1)\sqrt{dx} \\ \varphi(x_2)\sqrt{dx} \\ \varphi(x_3)\sqrt{dx} \\ \dots \\ \varphi(x_{N-2})\sqrt{dx} \\ \varphi(x_{N-1})\sqrt{dx} \\ \varphi(x_N)\sqrt{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi''(x_1)dx^{5/2} - \varphi(a)\sqrt{dx} \\ \varphi''(x_2)dx^{5/2} \\ \varphi''(x_3)dx^{5/2} \\ \dots \\ \varphi''(x_{N-2})dx^{5/2} \\ \varphi''(x_{N-1})dx^{5/2} \\ \varphi''(x_N)dx^{5/2} - \varphi(b)\sqrt{dx} \end{pmatrix} \quad (9.23)$$

注意方程右边是一个已知的矢量，所以解是否存在就归结为实对称矩阵

$$A \equiv \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & & & \\ & & 1 & -2 & 1 & & & & \\ & & & & \dots & & & & \\ & & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (9.24)$$

是否可逆。

容易用数学归纳法证明 $\det(A) = (-1)^N(N+1)$ ，因此 A 可逆。但可惜这种蛮干的方法并不能推广到高维空间。

我们再换一个思路：如果边界条件是 $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ ，且 (a,b) 内部是无源的，则方程(9.23)右边会变成零，而方程左边，特别是矩阵 A 并不会被改变。因为这时候有显然的解 $\varphi = 0$ ，且根据唯一解定理该解是唯一的，我们就可以反推出 A 是可逆的（否则 φ 将会有无穷多解）。这样对任意的源分布和第一类边界条件，方程(9.23)都存在唯一解。

在高维空间 ∇^2 算符也可以离散化写成邻近几个点的函数值的线性组合。因此，上面这个证明并不依赖于空间维数和区域形状。我们这样就（一不小心）证明了任意维度空间里第一类边界条件下泊松方程的解的存在性以及唯一性。

思考题：请讨论第二类边界条件下的泊松方程的解的存在性。

物理专业的读者可能对这一小节有点提不起兴趣来。其实我是醉翁之意不在酒，我真正想引出的结论是，当边界条件为零边界条件时（边界上待求函数为零，或者其梯度的法向分量为零，或者两者的同号线性组合为零），算符 ∇^2 等价于一

个实对称（因此也是厄米）矩阵。在一维的情况，读者可以自行补充第二类边界条件的情况进行验证。在第11章，我们会采用更抽象的方式进行证明高维的情况，并解释我们为什么要把 ∇^2 算符和一个厄米矩阵联系起来。

9.1.3 在一些特殊区域内的解

纸上谈兵了半天，是时候实践一下了。

例题 42: 如图9.2所示，地面（视为无限大半平面）电势为零，与地面绝缘的墙面（也视为无限大半平面）电势为 V_0 (这里 $V_0 \neq 0$)。求墙与地之间的空间内的静电势 $\varphi(x, y)$ 。

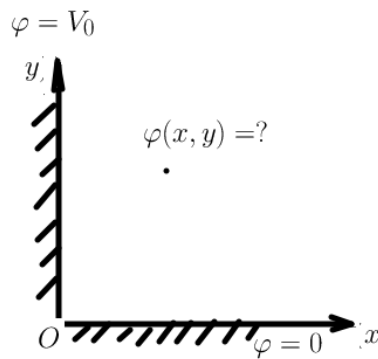


Figure 9.2: 例题 42 图

解答: 在柱坐标系 (r, θ, z) 内求解， φ 满足边界条件

$$\varphi|_{\theta=0} = 0, \quad \varphi|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = V_0$$

和柱坐标系拉普拉斯方程 (请使出洪荒之力回忆正交曲面坐标系的相关知识):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

显然， $\varphi = \frac{2}{\pi} \theta V_0$ 是问题的解。

例题 43: 如图9.3，在无限大接地金属板上方 h 处放置点电荷 q 。求点电荷受金属板上感应电荷的吸引力大小。

解答: 把感应电荷都拿掉，并在关于金属板对称的位置放置点电荷 $-q$ ，这种情况产生的电势和原问题的电势在板上方的空间满足相同的边界条件和泊松方程，因

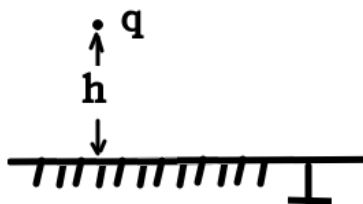


Figure 9.3: 例题 43 图

此具有相同的解。所以吸引力大小为 $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4h^2}$ 。

这种用一个或多个点电荷替代感应电荷的解法叫做电像法。系统学习过电磁学的读者应该对此非常熟悉。我们再来看一个经典的例子：

例题 44: 如图9.4所示，在半径为 R 的接地金属球壳内，在距离球心为 $a < R$ 处放置一个点电荷 Q ，计算球壳内的电势。

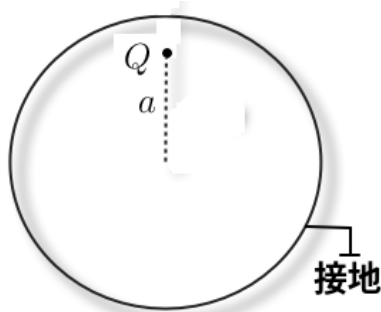


Figure 9.4: 例题 44 图

解答： 放入点电荷后，在金属球壳上会产生感应电荷。如图9.5所示，在球心 O 和点电荷 Q 的连线的延长线上，距离球心为 $OQ' = \frac{R^2}{a}$ 处放置一个点电荷 $Q' = -\frac{R}{a}Q$ 来替代感应电荷。设 A 为金属球壳上任意一点。由于 $\frac{OQ}{OA} = \frac{a}{R} = \frac{R}{R^2/a} = \frac{OQ'}{OA}$ ，所以三角形 OQA 相似于三角形 $OQ'A$ ，且相似比为 $\frac{a}{R}$ 。所以 $\frac{QA}{AQ'} = \frac{a}{R}$ 。这就导致 Q 和 Q' 在 A 处产生的电势恰好完全抵消，即金属球壳上是零电势，和原问题所要求的边界条件相同。又在金属球壳内，电势也满足相同的泊松方程，所以电荷 Q, Q' 在金属球壳内产生的电势是原问题的解。

要特别注意的是，上述解答中， Q 和 Q' 在球壳外产生的电势并不是原问题的解，这是因为把球壳上感应电荷替换为球壳外的 Q' 之后，球壳外的泊松方程的源发生了变化，因此唯一解定理并不适用。

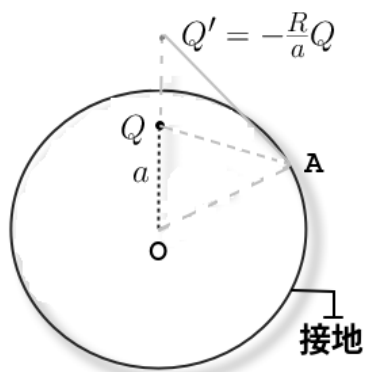


Figure 9.5: 例题 44 解答图

思考题：如果例题 44 中的金属球壳是孤立的（不接地），球壳内电势是怎样的？

9.2 热传导方程

泊松方程描述的是静态的稳态系统。实际上，任何一开始非稳态的系统达到稳恒状态都需要一定的时间。对于日常的应用而言，研究系统达到静电平衡的过程并没有什么特别大的意义，我们关注的一般是达到稳态比较慢的系统，例如：温度不均匀的固体通过热传导达到热平衡的过程。

我们把单位时间单位面积流过的热量称为热流密度，它是一个矢量。

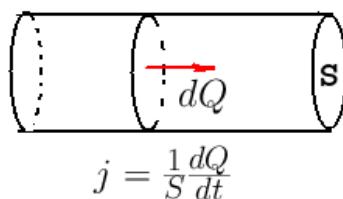


Figure 9.6: 单位时间单位面积流过的热量称为热流密度

图9.6演示了一根长导热棒中均匀流过热流时的情况：热流密度 \mathbf{j} 的方向沿着导热棒的方向，大小是单位时间单位截面积流过的热量。

在没有额外热源的情况下，傅立叶热传导定律把热流密度 \mathbf{j} 和温度 T 的不均匀性 (梯度 ∇T) 联系起来：

傅立叶热传导律:

$$\mathbf{j} = -\lambda \nabla T \quad (9.25)$$

比例系数 λ 叫做**导热系数**。这是一个在温度梯度不是太夸张时的线性近似, 可以非常好地描述日常生活和工程中的绝大多数固体的热传导现象。读者可能还接触过另外一个线性近似定律: 牛顿冷却定律。比如把一块高温金属放在空气中, 因为空气存在对流, 金属表面和表面附近一层空气的温差一直是很大的。这时候可以认为金属表面和空气之间的温度变化是不连续的。这种情况下要用牛顿冷却定律(单位时间流失的热量和金属-空气温差成正比)来描述金属块如何降温(粗略地就把金属、空气都当成单一温度; 虽然金属内部仍然可以用傅立叶热传导律来建立更精确的温度分布, 金属附近空气也存在温度的变化以及很难算的对流, 但这些都是次级的效应了)。如果是一个热传导性非常差的、杯壁很厚的保暖杯放在空气中, 杯子外壁和空气的温度几乎相同, 这时就要对杯子使用傅立叶热传导律(并用空气温度给出外壁的边界条件)了。

现在我们在假设傅立叶热传导律的前提下导出固体内的热传导方程。对(9.25)两边取散度得到

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\lambda \nabla^2 T. \quad (9.26)$$

另一方面, 根据散度的几何意义, $\nabla \cdot \mathbf{j}$ 等于单位体积的表面热量流出速率, 在没有热源、没有相变、并且忽略热辐射的情况下, 能量守恒方程是

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -c\rho \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (9.27)$$

这里 c 是单位质量热容, ρ 是质量密度, $c\rho$ 是单位体积的热容。

结合(9.26)和(9.27)得到

热传导方程:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \nabla^2 T = 0. \quad (9.28)$$

其中 $a = \frac{\lambda}{\rho c}$ 是热传导方程的参数。

9.2.1 热传导方程参数 a 的物理意义

导热系数仅仅描述了热流密度对热不均匀性的响应, 却没有描述物质本身温度变化对热流的响应(如果比热很大, 那么即使有了热流, 物体的温度分布却很难改变)。热传导方程参数 $a = \frac{\lambda}{\rho c}$ 比导热系数 λ 更好地描述了材料的热扩散的速率。

表9.1给出了一些材料的热传导方程参数 a ，这和我们的生活直觉是相符的：铝的导热性能要优于铅，金属的导热性能普遍优于非金属。

Table 9.1: 一些材料的热传导方程参数

材料	λ (W/m/K)	ρ (kg/m ³)	c (J/kg/K)	a (m ² /s)
铝	230	2.7×10^3	900	0.94×10^{-4}
铅	33	11.3×10^3	125	2.3×10^{-5}
某种砖	0.75	2×10^3	750	5.0×10^{-7}

我们先从宏观上看一下 a 的物理意义。

热扩散、布朗运动，随机行走这些现象都有个特点：扩散范围的尺度的平方大致和时间成正比。这个结论和空间维度无关；时间越长，这个规律越准确。

热传导方程的参数 a 大致描述的就是单位时间内热扩散尺度的平方。比如铝的 a 约是 $10^{-4} \text{m}^2/\text{s}$ ，就说明如果你把一根铝棒一端放进沸水里，那么经过时间 t （如果 t 不是很大，能够忽略铝棒向空气的散热），大致有 \sqrt{at} 长的部分变得很烫。也就是说，1s 后大约有 $\sim 0.01\text{m}$ 长的部分变得很烫手；100s 后大约有 $\sim 0.1\text{m}$ 长的部分变得很烫。当然，这些都是量级的估计，所以你也不必纠结温度多高能称之为烫。

然后我们从微观角度来理解为什么热扩散尺度的平方和时间成正比。微观上，热传导由某种粒子互相碰撞来完成。例如有光子热传导，声子热传导和电子热传导等。假设粒子的微观运动速率是 u 的量级，粒子微观运动的平均自由程是 ℓ 的量级（也就是说，每个粒子大约保持直线运动 ℓ 的距离后就会被随机散射向不同的方向）。现在我们关注某个粒子的沿 x 方向的分运动。把两次碰撞间粒子沿 x 方向分运动产生的 x 方向的分位移记作 Δx ，则 Δx 服从一个均值为零，分布宽度（可以理解为标准差）的量级为 ℓ 的某种概率分布函数。每次碰撞相当于对 Δx 重新采样。那么，经过时间 t 之后， Δx 大致被重新采样了 $N = \frac{ut}{\ell}$ 次。累计起来，该粒子在 x 方向上运动的距离为所有这些 Δx 之和——或者说，这些 Δx 的平均值乘以 N ——结果当然还是个随机数。接触过实验误差分析的读者一定知道，如果某种误差 Δx 的分布宽度 $\sim \ell$ ，则对 Δx 进行 N 次重复采样并取平均值后，平均值的分布宽度为 $\sim \frac{\ell}{\sqrt{N}}$ 。（这在数学上可以用概率论里的中心极限定理推导出来。）这里也是一样， Δx 的平均值的分布宽度大致为 $\frac{\ell}{\sqrt{N}}$ 。所以，在 x 方向上的位移（即所有 Δx 之和）的分布宽度为 $\sim N \frac{\ell}{\sqrt{N}} = \sqrt{N}\ell \sim \sqrt{ut}\ell$ 。对比前面讨论的 a 的宏观物理意义，我们得到 $a \sim u\ell$ 。也就是说：热传导方程参数 a 大致是热媒粒子的典型微观速率和平均自由程的乘积。

在固体中，热媒粒子的平均自由程可以用典型的分子（或原子）间距离 $\sim 10^{-10}\text{m}$ 来估算。如果是声子热传导为主的普通固态物质，声子的传播速度大约

是 $\sim 10^3\text{-}10^4\text{m/s}$ 的量级，我们就能估算出大多数固态物质的热传导方程参数是 $10^{-7}\text{-}10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$ 的量级。对于以电子热传导为主的金属，电子的微观运动速率的数量级¹是 $\sim 10^5\text{-}10^6\text{m/s}$ ，所以金属的热传导方程参数一般是 $\sim 10^{-5}\text{-}10^{-4}\text{m}^2/\text{s}$ 的量级。至此，表格 9.1 的所有谜团都解开了！

9.2.2 热传导方程的稳态解

设加了某些热边界条件的固体的线性尺度大小为 L ，那么经过时间 $t \gg \frac{L^2}{a}$ 之后，固体内的热扩散就非常充分了，其温度梯度（或者说热流密度）的分布经常能够达到一个稳定的状态。我们把 $t \gg \frac{L^2}{a}$ 时的渐近解（如果存在）称为稳态解。稳态解满足热传导方程以及边界条件，但不需要满足初始条件。

我们先来看一个比较简单的例子。

例题 45: 一根长度为 $L = 0.3\text{m}$ 的均匀铝棒，一开始温度为 $T_0 = 300\text{K}$ 。从 $t = 0$ 时刻开始，把铝棒的一端和温度为 $T_1 = 400\text{K}$ 的热库接触，另一端和温度为 $T_2 = 500\text{K}$ 的热库接触。设铝的热传导方程参数为 $a = 10^{-4}\text{m}^2/\text{s}$ 。问：大约经过多久，铝棒上的温度分布达到稳定？温度的稳定分布形式是怎样的？

解答: 如果沿着铝棒建立 x 轴并取铝棒所在区间为 $[0, L]$ ，则铝棒上的温度分布满足热传导方程

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0. \quad (9.29)$$

以及边界条件

$$T|_{x=0} = T_1; T|_{x=L} = T_2; \quad (9.30)$$

和初始条件（即初始时刻系统的状态）

$$T|_{t=0} = T_0. \quad (9.31)$$

首先注意到(9.30)和(9.31)表面上看起来是矛盾的，其实你大可不必为此担忧：边界条件(9.30)其实是仅适用于 $t \in (0^+, \infty)$ ，并且在边界上，我们并不要求 T 对时间连续（物理上看，当把铝棒两端和热库接触时，接触面上的温度确实会有突变）。方程(9.29)在条件(9.30)和(9.31)下的严格求解也并不困难，不过，这不是我们目前要讨论的话题。

根据 a 的物理意义，我们知道当 $t \gg \frac{L^2}{a} = 900\text{s}$ 时，铝棒上的温度分布会达到稳定

¹注：由于费米简并，金属中的电子气温度可达 $T \sim 10^4\text{-}10^5\text{K}$ 的量级，然后用 $u \sim \sqrt{\frac{k_B T}{m_e}}$ 可以估算出金属内电子的微观运动速率。

(如果这样的解存在的话)。

我们最后需要求出稳态解 (同时也是验证稳态解存在的必要步骤)。容易直接看出来 (或者你非要有个计算步骤的话, 是把方程(9.29)的时间偏导项扔掉后求解 $T(x)$), $T = T_1 + (T_2 - T_1)\frac{x}{L}$ 是满足方程(9.29)和边界条件(9.30)的稳态解。

上面的例题中, 因为两端温度固定, 所以“温度梯度稳定”等价于“温度稳定”。我们再来看一个更复杂的, 温度梯度可以达到稳定但温度无法达到稳定的例子:

例题 46: 如图9.7所示, 在一根长为 $2L$ 的导热棒在 $t = 0$ 时刻温度为 T_0 。在 $t > 0$ 时刻, 导热棒两端均有强度为 j 的热流进入。设材料的导热系数 λ , 质量密度 ρ , 单位质量的比热 c 均已知, 试计算当 t 足够大时, 导热棒各处的温度的稳态解 $T(x, t)$ 。

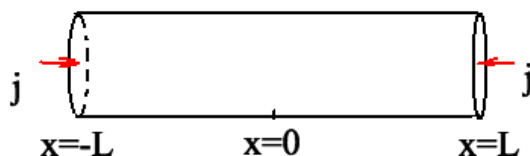


Figure 9.7: 例题 46 图

解答: 根据对称性, 在棒中间处热流和温度梯度均为零。写出如下的方程和边界条件:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (9.32)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (9.33)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = \frac{j}{\lambda} \quad (9.34)$$

$$T|_{t=0} = T_0 \quad (9.35)$$

其中 $a = \frac{\lambda}{\rho c}$ 。

在 t 时刻, 累计流入的热量为 $Q = 2jSt$ (其中 S 为横截面积)。棒的热容为 $C = c\rho(2SL)$ 。所以 t 时刻棒的平均温度为

$$\bar{T} = T_0 + \frac{Q}{C} = T_0 + \frac{j}{\rho c L} t.$$

把平均温度去掉, 研究各处温度起伏: $\Delta T(x, t) \equiv T(x, t) - \left(T_0 + \frac{j}{\rho c L} t\right)$ 。显然 ΔT 满

足

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial t} - a \frac{\partial^2 \Delta T}{\partial x^2} = -\frac{j}{\rho c L} \quad (9.36)$$

$$\left. \frac{\partial \Delta T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (9.37)$$

$$\left. \frac{\partial \Delta T}{\partial x} \right|_{x=L} = \frac{j}{\lambda} \quad (9.38)$$

$$\Delta T|_{t=0} = 0 \quad (9.39)$$

因为 ΔT 描述的是温度起伏，还有一个额外条件：

$$\int_0^L \Delta T(x, t) dx = 0$$

因为 a 的物理意义是单位时间扩散距离的平方，当 $t \gg \frac{L^2}{a}$ 时，棒上的温度梯度趋于稳定（如果这样的解存在的话），即 ΔT 仅仅依赖于 x ，满足

$$-a \frac{\partial^2 \Delta T}{\partial x^2} = -\frac{j}{\rho c L} \quad (9.40)$$

$$\left. \frac{\partial \Delta T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (9.41)$$

$$\left. \frac{\partial \Delta T}{\partial x} \right|_{x=L} = \frac{j}{\lambda} \quad (9.42)$$

$$\int_0^L \Delta T(x, t) dx = 0 \quad (9.43)$$

由此不难解出

$$\Delta T = \frac{j}{2\lambda} \left(\frac{x^2}{L} - \frac{L}{3} \right)$$

最后我们得到，当 $t \gg \frac{L^2}{a}$ 时

$$T = \left(T_0 + \frac{j}{\rho c L} t \right) + \frac{j}{2\lambda} \left(\frac{x^2}{L} - \frac{L}{3} \right)$$

在上面这些例子中，我们学习了怎样计算一个热传导问题的稳态解，但没有讨论稳态是如何达到的（即 $t \lesssim \frac{L^2}{a}$ 时的解）。我们将在第10章和第12章讨论如何计算热传导问题的精确解。但是，要求精确解，计算稳态解是第一步。所以请重视这一小节的内容。

9.3 波动方程

9.3.1 弦的横向小振动

完全均匀沿水平方向绷直的弦，线密度为 ρ ，张力为 f 。弦的各部分沿竖直方向稍稍偏离平衡位置，偏离量 u 是水平位置 x 的函数。

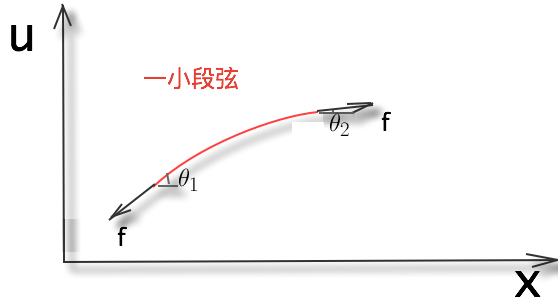


Figure 9.8: 弦的横向小振动受力分析

如图9.8考虑弦的一小段，弦的纵向（沿 x 向）净受力为

$$f \cos \theta_2 - f \cos \theta_1 \approx \frac{1}{2} (\theta_1^2 - \theta_2^2) f$$

这是 θ_1 和 θ_2 的高阶小量，我们将它忽略掉（即认为纵向是受力平衡的）。

弦的横向净受力为

$$f \sin \theta_2 - f \sin \theta_1 \approx (\theta_2 - \theta_1) f$$

θ_2 和 θ_1 可以近似用弦的斜率来代替，设这一小段的坐标从 x 到 $x + dx$

$$\theta_2 - \theta_1 \approx \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+dx} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x \approx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

根据 $F = ma$ ，得到弦的这一段沿垂直方向的加速度

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{f \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx}{\rho dx} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

其中 ρ 为质量线密度， a 定义为 $\sqrt{\frac{f}{\rho}}$ ，具有速度的量纲。

最后，得到弦的横振动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (9.44)$$

思考题：弦一振动不是就被拉长了吗？为什么在前面的推导过程中把张力 f 当成常量？

9.3.2 杆的纵向小振动

设一根均匀弹性杆，一开始处于静止并受力平衡，各个切面的位置可以用 x 来标记。

然后考虑如图9.9的沿杆的方向发生压缩-拉伸的变化：每个初始坐标为 x 的切面沿着杆的方向有小小的偏离平衡位置的位移 $u(x)$ 。



Figure 9.9: 杆的纵向小振动

在线性近似下，应力 P （横截面上单位面积受力）和 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 成正比（可以对一小段杆运用胡克定律导出这个结论）：

$$P = E \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (9.45)$$

其中 E 称为杨氏模量（Young's modulus）。

按照套路，对 x 和 $x + dx$ 之间的一小段杆运用牛顿第二定律 $F = ma$ ，得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{(P(x+dx) - P(x))S}{\rho S dx} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (9.46)$$

其中 S 为截面积， ρ 为质量密度。

令 $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ ，则又得到了

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (9.47)$$

9.3.3 真空中的电磁波

真空中的电场 \mathbf{E} 和磁场 \mathbf{B} 满足真空中的 Maxwell 方程组：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

这里用的是国际单位制。

利用前面学习过的矢量分析知识：“旋度的旋度等于散度的梯度与梯度的散度之差”（绕死我了），可以得到：

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} &= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{E}) \\ &= -\nabla \times \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \right) \\ &= -c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) \\ &= -c^2 (\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}) \\ &= c^2 \nabla^2 \mathbf{B}\end{aligned}$$

请自行验证，可以用一样的过程推导出 \mathbf{E} 也满足波动方程：

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \mathbf{E} = 0.$$

（注意这里用了简写： \mathbf{B} 和 \mathbf{E} 的每个分量都满足波动方程。当然，对真空中的电磁波而言，它们只能是横波，所以一共有 4 个独立振动方程。）

综合前面的一维和三维的多个例子，我们总结出一般的

自由波动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u = 0, \quad (9.48)$$

我们马上会看到， a 的物理意义为波的相速度。

9.3.4 一维波动方程的通解

仍然回到一维空间的情况：令 $u = \Phi(x)\Psi(t)$ （注意大多数二元函数并不能这样分解，我们这里只是假设存在一个这样形式的解），代入波动方程，得到

$$a^2 \frac{\Phi''}{\Phi} = \frac{\Psi''}{\Psi},$$

等式两边分别是 x 和 t 的函数，所以只能是常数。由此得到两个解

$$u = e^{ik(x \mp at)}, \quad (k \in \mathcal{R}) \quad (9.49)$$

其中 k 是任意的实常数。注意 k 不能有虚部，否则解会出现在远处发散的行为，不符合物理系统的能量有限的特点。

如果我们追踪相位为零的点，则得到 $x = \pm at$ ；即 $e^{ik(x-at)}$ 描述的是沿 x 轴正向传播的波， $e^{ik(x+at)}$ 描述的是沿 x 轴负向传播的波。

虽然把待求解函数分解成平面波 $e^{ik(x \mp at)}$ 的线性组合, 具有很容易看出波速的优点, 但这并不是唯一的写法。

当我们需要实数解时, 可以把解写成:

$$\cos(kx)\cos(akt), \sin(kx)\cos(akt), \cos(kx)\sin(akt), \sin(kx)\sin(akt), \quad (k \geq 0) \quad (9.50)$$

的线性组合。注意当我们这样写的时候, 好像(9.49)里 \pm 号对应的两种解变成了(9.50)里的四种, 其实只是因为我们在(9.49)中允许 k 取任意实数, 而在(9.50)中限制了 $k \geq 0$, 两者的自由度还是相同的。一般在做理论分析时, 我们会更多使用(9.49), 而在实际求解方程时, 我们会更多地采用(9.50)。

在空间无边界的情况下, 既然每个 k 值都对应形如(9.49)的一个解。我们就可以把 u 写成一堆这种解的线性组合:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int c(k)e^{ik(x-at)} dk + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d(k)e^{ik(x+at)} dk \quad (9.51)$$

设 $c(k)$ 和 $d(k)$ 的傅立叶逆变换为 $C(x)$ 和 $D(x)$ 。上式只是把傅立叶逆变换中的 x 换成了 $x \mp at$, 于是得到

一维无边界波动问题的通解:

$$u(x,t) = C(x-at) + D(x+at), \quad (9.52)$$

其中 C 和 D 的形式可以通过初始条件来确定。

$u(x,t)$ 显然除了依赖于初始的位移 u , 还依赖于初始的速度 $\frac{\partial u}{\partial t}$, 因此需要两个初始条件, 相应可以确定两个未知函数 C 和 D 。

例题 47: 求解满足下列初始条件的无边界波动方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \\ u|_{t=0} &= Ae^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= 0. \end{aligned} \quad (9.53)$$

其中 A, σ 均为已知常量。

解答: 令 $u(x,t) = C(x-at) + D(x+at)$, 则根据初始条件, 有

$$C(x) + D(x) = Ae^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (9.54)$$

以及

$$C'(x) = D'(x) \quad (9.55)$$

由此易解出

$$u(x, t) = \frac{A}{2} \left(e^{-\frac{(x-at)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(x+at)^2}{2\sigma^2}} \right). \quad (9.56)$$

思考题：把初始条件换成一般的

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= \phi(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \psi(x). \end{aligned} \quad (9.57)$$

其中 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 为给定的函数，你还能求解吗？

9.4 热传导方程和波动方程的修正

热传导方程和自由波动方程都是理想化的模型。下面我们考虑实际场景中对它们的一些修正。

9.4.1 热传导方程的弛豫时间修正

在推导热传导方程时，假设了傅立叶热传导律，也就是局域热流密度对温度梯度的响应是无穷快的²。这就是为什么微观的运动方程（牛顿第二定律）含时间的二次导数，而宏观的热传导方程只含时间的一次导数（即忽略了微观粒子加速过程）。如果考虑微观上热流密度对温度梯度的响应的滞后效应，热传导方程也应该含时间的二次导数。

我们取一个简化的模型，把傅立叶热传导律修正为：

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \frac{1}{\tau}(\mathbf{j} + \lambda \nabla T) = 0. \quad (9.58)$$

在固定位置，假设 ∇T 也固定的情况下， \mathbf{j} 和 $-\lambda \nabla T$ 的差是以 $e^{-t/\tau}$ 的形式衰减的， τ 是使得傅立叶热传导律成立的弛豫时间。

对方程 (9.58) 两边取散度，并利用能量守恒式 (9.27)，就得到

$$\tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} - a \nabla^2 T = 0, \quad (9.59)$$

²在宏观统计意义上，也就是只考虑大部分热量的流动情况时，热扩散速度仍然是有限的

这里的 $a = \frac{\lambda}{\rho c}$ 。上式中令 $\tau \rightarrow 0^+$ ，就回到前面得到过的热传导方程。

假设问题是无边界的，我们来尝试求 (9.59) 的解 $T(\mathbf{x}, t)$ 。

在傅立叶空间 $T(\mathbf{k}, t)$ （在这里我遵循物理学家的习惯用同一个符号表示傅立叶变换的源和像）热传导方程 (9.59) 成为

$$\tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} + ak^2 T = 0. \quad (9.60)$$

对固定的 \mathbf{k} ，这个方程是二阶线性常微分方程，容易求出通解为：

$$T(\mathbf{k}, t) = A(\mathbf{k})e^{\lambda_1 t} + B(\mathbf{k})e^{\lambda_2 t}. \quad (9.61)$$

这里的

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\tau ak^2}}{2\tau}. \quad (9.62)$$

为了求得 \mathbf{x} 空间的解，可以对(9.61)做傅立叶逆变换。

$$T(\mathbf{x}, t) = \int d^3\mathbf{k} \left[A(\mathbf{k})e^{\lambda_1 t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + B(\mathbf{k})e^{\lambda_2 t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right]. \quad (9.63)$$

未知函数 $A(\mathbf{k})$ 和 $B(\mathbf{k})$ 可以由初始条件 $T|_{t=0}$ 和 $\frac{\partial T}{\partial t}|_{t=0}$ 来确定。

在 $ak^2\tau \ll 1$ 时，我们可以近似得到

$$\lambda_1 \approx -ak^2; \lambda_2 = -\frac{1}{\tau} \quad (9.64)$$

这样(9.61)的物理意义就很清楚了：第一项 $A(\mathbf{k})e^{-ak^2 t}$ 描述的是宏观上的热扩散，在 t 时刻，满足 $ak^2 t \gg 1$ 的傅立叶成分被指数压缩，也就是在 $\frac{1}{k} \ll \sqrt{at}$ 的尺度上热扩散已经把温度几乎都抹平了。第二项 $B(\mathbf{k})e^{-\frac{t}{\tau}}$ 描述的是微观上的滞后效应，在考虑宏观的热传导现象时一般都可以忽略。

9.4.2 波动方程的阻尼修正

在讨论波动方程时，我们假设了零阻尼。实际的物理系统总会有各种阻尼。例如弦的横向小振动会受到空气阻力，假设空气阻力和弦的横向运动速度成正比，则波动方程要修正为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \nabla^2 u = 0. \quad (9.65)$$

这里的 a 仍然是波速； τ 的物理意义是阻尼衰减时间，也就是当一段弦失去驱动力时，在空气阻力的作用下的速率会按 $\propto e^{-t/\tau}$ 的形式衰减。

带弛豫时间修正的热传导方程 (9.59) 和带阻尼修正的波动方程 (9.65) 的形式是相同的。区别只是前者的弛豫时间很短，占主导的是时间的一次偏导项；后者的弛豫时间（阻尼衰减时间）很长，占主导的是时间的二次偏导项。

在无边界的情况下, 解(9.61) 可以照搬到有阻尼的波动方程, 只是 λ_1, λ_2 变为:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4a^2\tau^2k^2}}{2\tau}. \quad (9.66)$$

在阻尼很小 (阻尼时间很长) 的情况下 $ak\tau \gg 1$ 时, 近似有

$$\lambda_{1,2} = \pm iak. \quad (9.67)$$

解就成为自由波动方程的 (平面波解) 的形式。

9.4.3 波动方程的色散修正

我们考虑图 9.9 的杆的纵向小振动。

如果考虑对线性近似的修正, 应力 P 和 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 可能并不严格成正比, 我们假设 (9.45) 有如下的修正

$$P = E \left(\frac{\partial u}{\partial x} - b^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right), \quad (9.68)$$

其中 b 是一个很小的长度, 反映的是在接近微观尺度胡克定律的失效。我们没有写二次偏导项, 是因为从对称性考虑二次偏导项无法产生单向的应力。

这样杆的纵向小振动方程就被修正为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) = 0. \quad (9.69)$$

仍然在傅立叶空间考虑 $u(k, t)$ ($k \in \mathcal{R}$) 的变化。傅立叶空间的方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 k^2 (1 + b^2 k^2) u = 0. \quad (9.70)$$

容易看出来通解为:

$$u(k, t) = A(k)e^{iak\sqrt{1+b^2k^2}t} + B(k)e^{-iak\sqrt{1+b^2k^2}t}. \quad (9.71)$$

进行傅立叶逆变换,

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk A(k)e^{i[kx+\omega(k)t]} + B(k)e^{i[kx-\omega(k)t]}. \quad (9.72)$$

这里的时间圆频率 ω 是依赖于 k 的函数

$$\omega(k) = ak\sqrt{1+b^2k^2}. \quad (9.73)$$

区别于自由波动方程的 $\omega = ak$ 的情况, 现在时间圆频率 ω 和空间圆频率 k 产生了非线性的依赖关系, 这时候我们称波存在色散 (dispersion)。等式(9.73) 称为色散关系。

我们再回顾波的相速度 (phase velocity) 的概念。我们可以追踪比如沿 x 正向传播的波 $B(k)e^{i(kx-\omega t)}$ 相位固定为 $kx - \omega t = \phi_0$ 的点, 也就是满足 $x = \frac{\omega}{k}t + \frac{\phi_0}{k}$ 的点。显然, 这些点以速度 $\frac{\omega}{k}$ (在这个特定的例子里, 等于 $a\sqrt{1+b^2k^2}$) 移动。所以相速度 $v_p \equiv \frac{\omega}{k}$ 。

群速度 (group velocity) 的概念要稍微复杂一些, 它的定义是 $v_g \equiv \frac{d\omega}{dk}$ 。为什么要定义一个这么奇怪的量呢?

为了简化讨论, 我们考虑

$$A(k) = 0, B(k) = \frac{1}{2} [\delta(k - k_1) + \delta(k - k_2) + \delta(k + k_1) + \delta(k + k_2)], \quad (9.74)$$

这里的 $k_1 > k_2 > 0$ 是常数。这时可以从(9.72)直接计算出

$$u(x, t) = \cos [k_1 x - \omega(k_1) t] + \cos [k_2 x - \omega(k_2) t]. \quad (9.75)$$

也就是说我们考虑的是两个不同空间频率的, 往 x 轴正向传播的波。利用和差化积公式, (9.75)可以写成

$$u(x, t) = 2 \cos \left(\frac{k_1 - k_2}{2} x - \frac{\omega(k_1) - \omega(k_2)}{2} t \right) \cos \left(\frac{k_1 + k_2}{2} x - \frac{\omega(k_1) + \omega(k_2)}{2} t \right). \quad (9.76)$$

现在我们假设 k_1, k_2 很接近, 且 $\delta k \equiv \frac{k_1 - k_2}{2}$ 的大小远小于 $\bar{k} \equiv \frac{k_1 + k_2}{2}$ 。当我远远望去, 眼睛分辨率无法区分空间频率为 \bar{k} 的成分时, 我将会看到 $u(x, t)$ 是一个波形为 $2 \cos [\delta k(x - v_g t)]$ 的低频包络在以群速度 $v_g \equiv \frac{d\omega}{dk}$ 移动。当我把镜头拉近, 仔细观察包络的每一处, 就会看到高频的 $\cos [\bar{k}(x - v_p t)]$ 的波形。注意, 当存在色散时, 一般来说相速度 v_p 并不等于群速度 v_g 。这会导致整体包络的移动速度和包络内的高频波的移动速度不相同。也就是说, 如果你让镜头跟着包络移动, 你会看到高频波相对于包络在移动。

无论是能量还是信息, 都是由高频波的振幅主导, 也就是由包络的形状决定。所以描述包络移动速度的群速度近似是能量 (或者说信息) 传播的速度。不过这既然是一种近似, 就并非绝对。比如对空间跨度极短的脉冲而言, 根本就不存在空间频率为 δk 的长波包络, 那么我们上面的分析其实并不成立, 群速度也就不完全是信息传播的速度。在这种设定下, 实验上曾经做到过让群速度超过真空中的光速, 请放心: 这只是玩了个概念上的小把戏, 并没有造成物理学的任何危机。

9.4.4 热源和波源的修正

静电泊松方程右边的电荷密度可以看成方程的“源”。当热传导问题中有热源 (比如烤串的加热问题), 或者波动方程中有波源 (比如一端系在一个电动牙刷上的弦的横向小振动), 方程右边也要加上代表热源或者波源的函数。例如

有源的热传导方程:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a\nabla^2 T = S(\mathbf{x}, t). \quad (9.77)$$

以及

有源的波动方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 T = S(\mathbf{x}, t). \quad (9.78)$$

这里的源 $S(\mathbf{x}, t)$ 都是给定的已知函数。如果 $S(\mathbf{x}, t)$ 退化为 $S(\mathbf{x})$ 也就是说源不依赖于时间, 我们称之为静态源的方程。我们之前学习过的泊松方程就是静态源的方程。

在某种意义上, 边界条件和初始条件也可以看成特殊的源, 反过来, 源也可以看成很多个 (以不同时刻为初始时刻的) 初始条件的叠加。这些观点有时会有些奇妙的用处, 我们后面会借助具体的例子加以说明。

9.5 第9章习题

习题 105: 在一个半径为 R 的固定的接地金属球外, 距离球心 $2R$ 处有一个点电荷 q 。把该点电荷缓慢地移动到无穷远处, 要做的功是多大?

习题 106: 一根长为 2.3m , 截面积为 10^{-3}m^2 的均匀铝棒, 两端分别和温度为 320K 和 280K 的热库接触。等铝棒上的温度分布达到均匀后, 每秒钟有多少热量从高温热库进入铝棒并流向低温热库? (已知在室温附近, 铝的导热系数约为 230W/m/K 。)

习题 107: 孤立的半径为 a 的均匀薄圆盘, 其材质的热传导方程参数为 a 。一开始圆盘上的温度分布为

$$T(r) = \left(2 - \frac{r^2}{a^2}\right) T_0.$$

其中 r 是离圆心的距离, T_0 是常量。估算圆盘多久后可以近似达到热平衡 (各处温差远小于 T_0)。当圆盘达到热平衡时, 圆盘的温度是 T_0 的多少倍?

习题 108: 长度为 L 的不良导体棒一端和温度为 T_0 的热库接触, 并在 $t = 0$ 时刻和热库处于热平衡。从 $t = 0$ 时刻开始, 在不良导体棒的另一端注入恒定大小为 j 的热流。设不良导体棒的导热系数 λ , 单位质量的比热 c 和质量密度 ρ 均已知。写出不良导体棒上温度 $T(x, t)$ ($0 \leq x \leq L, t \geq 0$) 满足的方程和边界条件, 并简要分析当 t 很大时的解的渐近行为。

习题 109: 一根无限长的空心圆柱, 内表面半径为 r , 温度恒为 100K ; 外表面半径

为 $2r$, 温度恒为 200K 。则在空心圆柱内部的中间层 (对应半径为 $\frac{3}{2}r$ 的圆柱面) 上, 温度是多少?

习题 110: 二维直角坐标系 x - y 平面内, 函数 $u(x,y)$ 满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u = 0.$$

并且在 x 轴上的 u 值都是已知的:

$$u(x,0) = e^{-x^2}.$$

求解 $u(x,y)$ 。

习题 111: 已知某种保温材料的比热很小可以忽略不计。测试员用该保温材料做成一个内半径为 0.1m , 外半径为 0.11m 的球形保温容器。把该容器装满 100°C 的开水后, 置于温度为 20°C 的房间里, 一天后发现容器内水温下降了 40°C , 保温效果很不理想。测试员于是加大保温容器的厚度, 使外半径达到 0.2m , 然后装满 100°C 的开水, 置于温度为 20°C 的房间里, 问: 一天后保温容器内的水温下降多少度?

习题 112: 两端固定的, 长度为 L 的均匀弦的横向小振动 $u(x,t)$ ($0 \leq x \leq L, t \geq 0$) 满足初始条件:

$$u|_{t=0} = A \sin \frac{\pi x}{L}.$$

其中 A 是常量, 以及

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

求解 $u(x,t)$ 。

习题 113: 柱坐标系 (r, θ, z) 里

$$r \leq 1, -1 \leq z \leq 1$$

描述了一个均匀材质圆柱体所占的空间区域。

现在控制圆柱体侧表面的温度恒为

$$T|_{r=1} = T_0 \left(\frac{1}{\sqrt{z^2 - 4z + 5}} + \frac{1}{\sqrt{z^2 + 4z + 5}} \right),$$

其中 T_0 为常量。同时控制圆柱体上下表面的温度恒为

$$T|_{z=\pm 1} = T_0 \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + 9}} \right).$$

计算圆柱内温度的稳定分布 $T(r, \theta, z)$ 。

习题 114: 把两个半径均为 R , 带电量均为 Q 的金属球从无穷远处缓慢移近, 使它们互相接触。这个过程对两个金属球至少要做的功是多大?

10. 分离变量法和諧函数概述

迄今为止我们学习的泊松方程、热传导方程和波动方程都只涉及拉普拉斯算符 ∇^2 以及一些时间偏导算符。当边界条件是零边界条件（下一小节会解释具体零边界条件是什么）的时候，我们要采用一个固定的套路求解这些方程。

设问题所在的区域为 Ω ，要求解满足给定的零边界条件、数理方程、以及初始条件的未知函数 $u(\mathbf{x}, t)$ ($\mathbf{x} \in \Omega, t \geq 0$)。我们的固定套路如下：

泊松方程、热传导方程、波动方程的普适解法：

- 1 对给定零边界条件找出 ∇^2 的正交归一化的本征函数 $\psi_1(\mathbf{x}), \psi_2(\mathbf{x}), \dots$ 。
- 2 用这些本征函数对问题中的待求解函数 $u(\mathbf{x}, t)$ 进行线性分解 $u(\mathbf{x}, t) = \sum_i c_i(t) \psi_i(\mathbf{x})$ ，每个本征函数前的“待定系数” $c_i(t)$ 都是时间的函数。
- 3 把初始条件也分解为本征函数 ψ_1, ψ_2, \dots 的线性组合，得到每个 $c_i(t)$ 满足的初始条件。
- 4 如果数理方程中有一些已知函数（例如泊松方程中的电荷密度），把这些已知函数也分解为本征函数的线性组合。然后把分解式 $u(\mathbf{x}, t) = \sum_i c_i(t) \psi_i(\mathbf{x})$ 代入数理方程，得到每个 $c_i(t)$ 满足的常微分方程。
- 5 利用每个 $c_i(t)$ 的初始条件和它满足的常微分方程求解 $c_i(t)$ 。

这个普适解法将贯穿本书，成为我们求解数理方程的标准技能。所以请一定反复领悟这个方法的便捷之处，例如：

- a 第 1 步仅依赖于区域的形状和零边界条件，对于一些常见的区域和边界条件，本征函数 ψ_1, ψ_2, \dots 往往是可以预先计算好的。

- b 注意到 ψ_1, ψ_2, \dots 是正交归一化的, 所以任意函数 $f(\mathbf{x})$ 的分解式就非常简单: $f(\mathbf{x}) = \sum_i d_i \psi_i(\mathbf{x})$, 这里的系数 $d_i = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \psi_i(\mathbf{x}) dV$ 是个简单的体积分。
- c 很多时候讨论的是无源的方程, 可以直接跳过第 4 步里对源的分解步骤。
- d 每种方程对应的 $c_i(t)$ 的方程几乎是固定的, 我们往往可以预先算好 $c_i(t)$ 的通解, 而不需要每次重复步骤 4 和步骤 5。

在大多数教材中, 把这一套解法更一般地叫做“分离变量法”。不过, 我们这里总结的套路更具有针对性。我们准备针对一些简单的区域和坐标系把 ψ_1, ψ_2, \dots 都计算好。并对三类方程都计算好 $c_i(t)$ 的通解。这样, 这个套路实施起来就非常容易了, 往往一个数理方程的求解只是几分钟的工作量。

我们要研究的方程是泊松方程、热传导方程、波动方程。要研究的区域包括一维的区间; 二维的长方形、圆形、环形、柱面、球面; 三维的长方体、实心柱体、空心柱体、实心球体、空心球体。要研究的坐标系包括: 直角坐标系, 极坐标系, 柱坐标系, 球坐标系。在对这些区域和坐标系以及方程计算本征函数 ψ_1, ψ_2, \dots 以及 $c_i(t)$ 的通解是一个宏大的计划——而当我们完成这个计划时, 本书也就接近尾声了。

在实施我们的宏大计划之前, 我们先要用数学语言把这个计划描述得更加清晰。对数学推演不是很感兴趣的读者可以只阅读结论, 跳过具体的推导。

10.1 零边界条件和諧函数

10.1.1 零边界条件下的实对称算符 ∇^2

在第9.1.2节我们在一个简单的一维问题中把 ∇^2 算符和一个实对称矩阵对应了起来, 这时我们(不太严谨地)就把 ∇^2 算符称为一个实对称算符。但是在高维空间的任意形状区域里, ∇^2 对应的矩阵过于复杂, 直接写出矩阵的蛮干的方式已经不适用了。我们首先要用一种更加巧妙的方式来定义实对称算符。

我们把算符和对称矩阵作类比的出发点是如下的事实: A 是对称矩阵, 当且仅当对任意两个矢量 \mathbf{f}, \mathbf{g} 都有 $\mathbf{f}^T A \mathbf{g} = \mathbf{g}^T A \mathbf{f}$ 。这个定理的证明十分简单, 只要考虑到 $\mathbf{f}^T A \mathbf{g}$ 是 1×1 的矩阵(也就是个数), 它的转置等于自身。所以 $\mathbf{f}^T A \mathbf{g} = \mathbf{g}^T A^T \mathbf{f}$, 也就是说 $\mathbf{f}^T A \mathbf{g} = \mathbf{g}^T A \mathbf{f}$ 等价于 $\mathbf{g}^T (A - A^T) \mathbf{f} = 0$, 由 \mathbf{g}, \mathbf{f} 的任意性即知这也等价于 $A = A^T$ 。

当我们用连续的观点来看待函数时, 如果对于区域 Ω 内满足零边界条件(10.2)的任意两个实函数 $f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})$, 都有

$$\int_{\Omega} f \nabla^2 g dV = \int_{\Omega} g \nabla^2 f dV, \quad (10.1)$$

(这里 dV 为体积分元, 即在 n 维空间的 $d^n \mathbf{x}$), 则我们说 ∇^2 是一个对称算符。在这种情况下, 又显然 ∇^2 是一个实算符(因为它作用到任何实函数上仍然得到实函数), 所以它是一个实对称算符。

等式 (10.1) 显然不可能对任何函数 f, g 成立, 所以 ∇^2 只是针对某一类满足特定条件的函数而言是实对称算符。在第9.1.2节我们碰到过这样的例子: 当边界条件为 $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ 时, 泊松方程里的 ∇^2 就完全等价于一个实对称矩阵。我们现在来考虑任意区域内的更一般的边界条件:

零边界条件的定义: 设 $\alpha(\mathbf{x}), \beta(\mathbf{x})$ 为区域 Ω 边界 $\partial\Omega$ 上的给定函数。在任一点, α, β 不同时为零。对 Ω 内的未知函数 φ , 我们把边界条件

$$(\alpha\varphi + \beta(\nabla\varphi)_\perp)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (10.2)$$

称为零边界条件。

如果一开始就额外要求在边界上所有点 $\alpha\beta \geq 0$, 则(10.2)称为加强的零边界条件。

加强的零边界条件中, 额外的条件 $\alpha\beta \geq 0$ 是用来保证 ∇^2 满秩, 从而物理问题存在唯一解。详细原因可以参考第9.1节的讨论。

即便悄悄地告诉你也没有关系——“零边界条件”以及“加强的零边界条件”这些名字都是我随便起的。在很多教材中有类似的一个概念叫做齐次边界条件: 满足边界条件 A 的任意两个函数的线性组合都满足边界条件 A, 就称 A 为齐次边界条件。显然, 零边界条件是齐次边界条件的一种特殊(但在物理问题中又非常常见的)情形。

我们之所以特别关注零边界条件而不是更一般的齐次边界条件, 是因为有如下的:

∇^2 算符的实对称条件: 在区域 Ω 内, 当只考虑满足零边界条件(10.2)的函数集时, ∇^2 是一个实对称算符。

证明: 设 f, g 是满足 (10.2) 的任意两个实函数, 也就是说在边界 $\partial\Omega$ 上的任何一点,

$$\alpha f + \beta(\nabla f)_\perp = \alpha g + \beta(\nabla g)_\perp = 0. \quad (10.3)$$

即矢量 $(f, (\nabla f)_\perp)$ 和 $(g, (\nabla g)_\perp)$ 线性相关。因此,

$$f(\nabla g)_\perp - g(\nabla f)_\perp = 0. \quad (10.4)$$

(如果这种描述让你不适应, 你可以直接用消元法从(10.3)推导(10.4))。

于是

$$\int_{\Omega} (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f) dV = \int_{\Omega} \nabla \cdot (f\nabla g - g\nabla f) dV \quad (10.5)$$

$$= \int_{\partial\Omega} [f(\nabla g)_{\perp} - g(\nabla f)_{\perp}] dS \quad (10.6)$$

$$= 0 \quad (10.7)$$

在最后一步，我们利用了(10.4)在边界 $\partial\Omega$ 上处处成立的事实。

如果是全空间（没有边界）的物理问题，则在假设无穷远处没有能量和物质交换的情况下，上述证明依然有效。如果是一个有限无边界的区域，例如球面，则上述证明（在没有任何边界条件的情况下）也依然有效。换句话说，“没有边界”也是一种特殊的零边界条件。

10.1.2 諧函数：零边界条件下 ∇^2 的本征函数

既然零边界条件下的 ∇^2 算符是实对称矩阵，就可以用它的本征矢构成一组正交归一化的基，用连续的观点来描述就是：在给定的零边界条件下，本征值方程

$$\nabla^2 f = \lambda f \quad (10.8)$$

存在一组正交归一化的完备函数族（离散观点下也就是本征矢） $\psi_1(\mathbf{x}), \psi_2(\mathbf{x}), \psi_3(\mathbf{x}), \dots$ ，满足

$$\nabla^2 \psi_1 = \lambda_1 \psi_1, \nabla^2 \psi_2 = \lambda_2 \psi_2, \nabla^2 \psi_3 = \lambda_3 \psi_3 \dots \quad (10.9)$$

这里的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是本征值。本征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ 的具体值和本征函数 ψ_1, ψ_2, \dots 的具体表达式是由区域的形状和具体的边界条件确定的。

为了节省力气，我们把 ∇^2 在零边界条件下的本征函数称为諧函数。由于实对称矩阵的不同本征值对应的本征矢自动正交，我们有如下的

諧函数正交定理: 在给定区域 Ω 和零边界条件的情况下，不同本征值对应的諧函数互相正交。

也就是说，如果 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ，则在 Ω 内的体积分 $\int_{\Omega} \psi_1 \psi_2 dV = 0$ 。

在存在简并的本征值（本征值方程有重根）的情况下， ∇^2 的本征函数的选择还存在人为选取的自由度（即可以在简并本征值对应的本征矢子空间内自由选择一组正交归一化的本征矢）。通常我们会选取具有坐标分离变量形式的函数作为本征函数，这时本征函数还和坐标系的选取有关。

之前的讨论只假设了零边界条件, 从现在开始, 我们假设加强的零边界条件 (或者说只考虑有唯一解的物理问题), 也就是在 (10.2) 相关的定义中假设 $\alpha\beta \geq 0$. 对此, 我们有如下的重要定理。

谐函数本征值符号判据: 在只考虑满足加强的零边界条件的非常数函数集时, ∇^2 是负定的实对称算符, 也就是说它的本征值均为负数。

证明: 设 f 是满足加强的零边界条件 (10.2) 的实值函数, 且 f 不是常数。我们把边界 $\partial\Omega$ 上 $\beta \neq 0$ 的点集记为 $\partial\Omega_\beta$, 其余边界上的点集 (则显然满足 $\alpha \neq 0$) 记为 $\partial\Omega_\alpha$ 。那么二次型

$$\int_{\Omega} f \nabla^2 f dV = \int_{\Omega} \nabla \cdot (f \nabla f) dV - \int_{\Omega} |\nabla f|^2 dV \quad (10.10)$$

$$< \int_{\Omega} \nabla \cdot (f \nabla f) dV \quad (10.11)$$

$$= \int_{\partial\Omega} f (\nabla f)_{\perp} dS \quad (10.12)$$

$$= - \int_{\partial\Omega_\beta} \frac{\alpha}{\beta} f^2 dS - \int_{\partial\Omega_\alpha} \frac{\beta}{\alpha} [(\nabla f)_{\perp}]^2 dS \quad (10.13)$$

$$\leq 0 \quad (10.14)$$

在最后一步, 我们用到了加强的零边界条件中的额外要求 $\alpha\beta \geq 0$ 。

在接下来的讨论中, 我们将只考虑加强的零边界条件, 因此可以把本征值写成: $\lambda_1 = -k_1^2, \lambda_2 = -k_2^2, \lambda_3 = -k_3^2 \dots$ 这里的 $k_1, k_2, \dots > 0$ 。这样写除了上述数学上的原因之外, 在物理上也是有好处的: 在很多情况下, k_1, k_2, \dots 会和位置空间的波矢大小联系起来。按照物理上的习惯, 我们称 k_1, k_2, k_3, \dots 为波数。也就是说谐函数的本征值是负的波数平方。

10.2 谐函数展开系数的通解

按照套路约定, 把区域 Ω 里的物理问题的解假设成

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum_i c_i(t) \psi_i(\mathbf{x}) \quad (10.15)$$

的形式, 其中的谐函数 ψ_i 满足

$$\nabla^2 \psi_i = -k_i^2 \psi_i. \quad (10.16)$$

以及正交归一化条件

$$\int_{\Omega} \psi_i \psi_j dV = \delta_{ij}, \quad (10.17)$$

即当且仅当 $i = j$ 时积分为 1，其余情况为零。

我们先做相对简单的事情：针对泊松方程，热传导方程，和波动方程来求解 $c_i(t)$ 的通解。

10.2.1 泊松方程的諧函数展开系数

我们来考虑泊松方程

$$\nabla^2 u = S(\mathbf{x}, t), \quad (10.18)$$

其中源 $S(\mathbf{x}, t)$ 是个已知的函数。（一般的物理问题中源只是空间坐标的函数，不过我们并不必加这条限制。）

按照我们约定的套路，展开式是

$$u(\mathbf{x}) = \sum_i c_i(t) \psi_i(\mathbf{x}). \quad (10.19)$$

把 (10.19) 代入 (10.18)，并利用 $\nabla^2 \psi_i = -k_i^2 \psi_i$ ，得到

$$-\sum_i k_i^2 c_i(t) \psi_i(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x}, t). \quad (10.20)$$

上式两边乘以任意指定的一个 ψ_n 并对问题所在区域 Ω 进行 (\mathbf{x} 坐标的) 体积分，利用諧函数 $\psi_1, \psi_2 \dots$ 的正交归一性，得到

$$-c_n(t) k_n^2 = s_n(t) \quad (10.21)$$

这里的“源系数” s_n 的定义为：

$$s_n(t) \equiv \int_{\Omega} S(\mathbf{x}, t) \psi_n(\mathbf{x}) dV. \quad (10.22)$$

我们一不小心就得到了系数的表达式

$$c_n(t) = -\frac{1}{k_n^2} s_n(t) \quad (10.23)$$

当源是静态的时候，源系数 s_n 也是常数，对应的解也是静态的。

请仔细体会上面的解法的巧妙之处，你就能逐渐领悟为什么我老是和你叨叨諧函数。

10.2.2 热传导方程的諧函数展开系数

现在来考虑热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \nabla^2 u = S(\mathbf{x}, t), \quad (10.24)$$

其中源 $S(\mathbf{x}, t)$ 是个已知的函数。

套路展开式是

$$u(\mathbf{x}) = \sum_i c_i(t) \psi_i(\mathbf{x}). \quad (10.25)$$

把 (10.25) 代入 (10.24), 并利用 $\nabla^2 \psi_i = -k_i^2 \psi_i$, 得到

$$\sum_i \left(\frac{dc_i}{dt} + ak_i^2 c_i \right) \psi_i(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x}, t). \quad (10.26)$$

上式两边乘以 ψ_n 并对问题所在区域 Ω 进行 (\mathbf{x} 坐标的) 体积分, 利用谐函数 $\psi_1, \psi_2 \dots$ 的正交归一性, 得到

$$\frac{dc_n}{dt} + ak_n^2 c_n = s_n(t). \quad (10.27)$$

源系数 s_n 仍然由 (10.22) 定义。

微分方程(10.27)可以这样来解, 令

$$c_n(t) = b_n(t) e^{-ak_n^2 t}. \quad (10.28)$$

代入(10.27), 得到

$$\frac{db_n}{dt} = s_n(t) e^{ak_n^2 t}. \quad (10.29)$$

于是

$$b_n(t) = \int^t s_n(\tau) e^{ak_n^2 \tau} d\tau. \quad (10.30)$$

上面 b_n 的解里面包含了一个积分常数。最后就有

$$c_n(t) = e^{-ak_n^2 t} \int^t s_n(\tau) e^{ak_n^2 \tau} d\tau. \quad (10.31)$$

上述表达式中含有积分常数的不确定性, 需要初始条件来确定。

当源是静态时, s_n 是常数, 上述解(10.31)可以简化为

$$c_n(t) = d_n e^{-ak_n^2 t} + \frac{s_n}{ak_n^2}. \quad (10.32)$$

这里的 d_n 是积分常数, 可以由初始条件确定。

10.2.3 波动方程的谐函数展开系数

现在来考虑波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u = S(\mathbf{x}, t), \quad (10.33)$$

其中 $S(\mathbf{x}, t)$ 是个已知的函数。

套路展开式是

$$u(\mathbf{x}) = \sum_i c_i(t) \psi_i(\mathbf{x}). \quad (10.34)$$

把 (10.34) 代入 (10.33), 并利用 $\nabla^2 \psi_i = -k_i^2 \psi_i$, 得到

$$\sum_i \left(\frac{d^2 c_i}{dt^2} + a^2 k_i^2 c_i \right) \psi_i(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x}, t). \quad (10.35)$$

上式两边乘以 ψ_n 并对问题所在区域 Ω 进行 (\mathbf{x} 坐标的) 体积分, 利用諧函数 $\psi_1, \psi_2 \dots$ 的正交归一性, 得到

$$\frac{d^2 c_n}{dt^2} + a^2 k_n^2 c_n = s_n(t). \quad (10.36)$$

源系数 s_n 仍然由 (10.22) 定义。

设

$$c_n(t) = b_n(t) e^{iak_n t}, \quad (10.37)$$

代入 (10.36), 得到

$$\frac{d^2 b_n}{dt^2} + 2iak_n \frac{db_n}{dt} = s_n(t) e^{-iak_n t} \quad (10.38)$$

我们再设

$$\frac{db_n}{dt} = e_n(t) e^{-2iak_n t}. \quad (10.39)$$

代入 (10.38), 得到

$$\frac{de_n}{dt} = s_n(t) e^{iak_n t}. \quad (10.40)$$

于是

$$e_n(t) = \int^t s_n(\tau) e^{iak_n \tau} d\tau. \quad (10.41)$$

即

$$\frac{db_n}{dt} = e^{-2iak_n t} \int^t s_n(\tau) e^{iak_n \tau} d\tau. \quad (10.42)$$

积分得到 b_n 并代入 (10.37), 最终得到

$$c_n(t) = e^{iak_n t} \int^t du e^{-2iak_n u} \int^u s_n(\tau) e^{iak_n \tau} d\tau. \quad (10.43)$$

Table 10.1: 谐函数展开系数 $c_n(t)$ 的通解: 表中 $-k_n^2$ 为谐函数对应的本征值; s_n 为源按照谐函数展开的系数; d_n, e_n 等均为积分常数, 需要由初始条件确定。

方程	一般源	静态源 (s_n 是常数)
泊松方程	$-\frac{1}{k_n^2} s_n(t)$	$-\frac{1}{k_n^2} s_n$
热传导方程	$e^{-ak_n^2 t} \int^t s_n(\tau) e^{ak_n^2 \tau} d\tau$	$d_n e^{-ak_n^2 t} + \frac{s_n}{ak_n^2}$
波动方程	$e^{iak_n t} \int^t du e^{-2iak_n u} \int^u s_n(\tau) e^{iak_n \tau} d\tau$	$d_n \sin(ak_n t) + e_n \cos(ak_n t) + \frac{s_n}{a^2 k_n^2}$

解(10.43)看着有些复杂。我们现在来考虑静态源, 也就是 s_n 是常数这种比较简单的情况, 这时候(10.36)的通解为

$$c_n(t) = d_n \sin(ak_n t) + e_n \cos(ak_n t) + \frac{s_n}{a^2 k_n^2}. \quad (10.44)$$

d_n, e_n 同样还是积分常数, 可以进一步由初始条件来确定。

表10.1清点了一下战果。

迄今为止, 我们的计算都十分顺畅, 原因在于我们假定了能够找到一组正交归一化的谐函数。那么到底如何找到这样一组谐函数呢? 现在是时候解决这最后一个问题了。

10.3 谐函数求解概述

我们先把问题限制在有限的区域内。无限区域问题通常是有限区域问题的极限情况, 而且很多时候可以用傅立叶变换、格林函数等其他方法来解决, 我们最后一起集中讨论。

10.3.1 一维直角坐标系

在一维空间, ∇^2 的具体微分表达式是 $\frac{d^2}{dx^2}$ (除非你建立一个度量不均匀的奇怪坐标系难为自己)。本征方程是

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi = -k^2 \psi \quad (10.45)$$

解这个方程立刻可以得到

一维空间的谐函数:

$$\psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx). \quad (10.46)$$

其中 k 为波数, A, B 为待定常数。

当给了具体的零边界条件, 我们就能得到 k 的允许取值, 从而得到一系列正交归一化的諧函数。我们来看下面的例子

例题 48: 求解两端固定弦的横振动 $u(x, t)$ ($0 \leq x \leq L, t \geq 0$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0. \\ u|_{x=0} &= 0; \quad u|_{x=L} = 0. \\ u|_{t=0} &= \frac{Ax(L-x)}{L^2}; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

这里 $a > 0$ 和 A 都是常量。 L 是弦的长度。

解答: 套路第 1 步: 在必须满足边界条件 $\psi(0) = \psi(L) = 0$ 的情况下, 一维空间的諧函数(10.46)就成为非常明确的形式:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10.47)$$

对应的

$$k_n = \frac{n\pi}{L}. \quad (10.48)$$

套路第 2 步, 令

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \psi_n(x). \quad (10.49)$$

套路第 3 步, 把初始条件分解

$$u(x, 0) = \frac{A}{L^2} x(L-x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \psi_n(x). \quad (10.50)$$

这里的

$$q_n = \int_0^L \frac{A}{L^2} x(L-x) \psi_n(x) dx = \begin{cases} \frac{4A\sqrt{2L}}{n^3\pi^3}, & \text{if } n \text{ is odd} \\ 0, & \text{if } n \text{ is even} \end{cases} \quad (10.51)$$

另一方面又有 $u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) \psi_n(x)$, 所以

$$c_n(0) = q_n. \quad (10.52)$$

另外一个初始条件 $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$ 给出的是

$$c'_n(0) = 0. \quad (10.53)$$

套路最后一步, 我们直接套用波动方程的在无源情况下的通解(10.44) (其中 $s_n = 0$), 以及(10.48), (10.52), (10.53)。可以得出:

$$c_n = q_n \cos\left(\frac{n\pi at}{L}\right). \quad (10.54)$$

把 q_n 的表达式代入上式, 最终得到

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8A}{(2n+1)^3 \pi^3} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi at}{L}\right) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right). \quad (10.55)$$

在上面的问题中, 我们顺便还能得到一个有趣的结果。首先, 我们根据初始条件知道 $u(\frac{L}{2}, 0) = \frac{A}{4}$ 。然后利用(10.55), 就可以得到

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots = \frac{\pi^3}{32}. \quad (10.56)$$

如果你熟悉上面这个结果, 那么它反过来又可以作为你对结果抽样检验。

我们再来通过一个例子来熟悉套路。

例题 49: 一根用热传导方程参数为 a 的材料做成的长度为 L 的均匀导热棒, 初始处于温度为 T_0 的孤立状态。从 $t = 0$ 时刻开始, 把导热棒一端和温度为 $2T_0$ 的热库接触, 其余部分均保持孤立。求之后导热棒上的温度变化。

解答: 在导热棒上建立坐标系 $x \in [0, L]$, 我们需要计算导热棒温度 $T(x, t)$ 在 $x \in [0, L], t \geq 0$ 范围内的解。

不管如何, 对于文字描述的物理问题, 标准的流程是先写出方程、边界条件和初始条件。

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a\nabla^2 T = 0, \quad (10.57)$$

$$T|_{x=0} = 2T_0, \quad (10.58)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}|_{x=L} = 0, \quad (10.59)$$

$$T|_{t=0} = T_0 \quad (10.60)$$

这虽然不直接是一个零边界条件问题, 但我们很容易看出最终稳态解为 $T = 2T_0$ 。把最终稳态解从 $T(x, t)$ 中拿掉后, 剩下的 $u(x, t) \equiv T(x, t) - 2T_0$ 就会自然地满足零边界条件。也就是说, 把 $T = u + 2T_0$ 代入上面的方程和边界条件, 就有

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\nabla^2 u = 0, \quad (10.61)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad (10.62)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=L} = 0, \quad (10.63)$$

$$u|_{t=0} = -T_0 \quad (10.64)$$

现在可以施展标准的套路了。

套路第一步: 由边界条件(10.62), (10.63)以及一维谐函数的通解(10.46), 我们可以确定该问题的谐函数为

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{(n + \frac{1}{2}) \pi x}{L}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10.65)$$

波数

$$k_n = \frac{(2n + 1) \pi}{2L}. \quad (10.66)$$

套路第 2 步, 令

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \psi_n(x). \quad (10.67)$$

套路第 3 步, 把初始条件分解

$$u(x, 0) = -T_0 = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \psi_n(x). \quad (10.68)$$

这里的

$$q_n = \int_0^L (-T_0) \psi_n(x) dx = -\frac{2T_0 \sqrt{2L}}{(2n + 1) \pi} \quad (10.69)$$

又根据 $u(x, 0) = \sum_n c_n(0) \psi_n(x)$ 可以得到

$$c_n(0) = q_n. \quad (10.70)$$

套路最后一步, 利用热传导方程的谐函数展开系数的通解(10.32) (其中的 $s_n = 0$) 就得到

$$c_n(t) = q_n e^{-ak_n^2 t} = -\frac{2T_0 \sqrt{2L}}{(2n + 1) \pi} e^{-\frac{a(2n+1)^2 \pi^2 t}{4L^2}}. \quad (10.71)$$

最终写到一起, 就是

$$T(x, t) = 2T_0 - \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n + 1} e^{-\frac{a(2n+1)^2 \pi^2 t}{4L^2}} \sin \frac{(n + \frac{1}{2}) \pi x}{L}. \quad (10.72)$$

现在又到了娱乐时间: 上面的结果中令 $t = 0, x = L$ 并利用 $T(L, 0) = T_0$ 可以得到一个熟知的结果:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}. \quad (10.73)$$

令 $t = 0, x = L/2$ 并利用 $T(L/2, 0) = T_0$ 可以得到一个可能你不太熟知的结果:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} \cdots = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \quad (10.74)$$

但是要注意的是, 你不能检验 $x = 0, t = 0$ 的初始条件, 因为这时候边界条件 $T|_{x=0} = 2T_0$ 是和初始条件矛盾的。这个矛盾物理上反映的是当导热棒接触热库时, $x = 0$ 处温度有个跃变, 这是由于傅立叶热传导律的理想化近似导致的 (见第9.4.1节的讨论), 引入弛豫时间的修正就可以做到消除矛盾。当然你也可以就直接接受温度有个跃变这件事情, 避开对 $T(0, 0)$ 到底是多少的讨论。

例题 50: 求解长度为 L 的弦在动力驱动下的横向小振动 $u(x, t)$ ($x \in [0, L]$, $t \in [0, \infty)$):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A \sin \frac{\pi x}{L}, \quad (10.75)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad (10.76)$$

$$u|_{x=L} = 0, \quad (10.77)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad (10.78)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (10.79)$$

这里 a, A 均是已知常量,。

解答: 边界条件对应的谐函数为

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10.80)$$

对应的波数 $k_n = \frac{n\pi}{L}$ 。

令

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \psi_n(x). \quad (10.81)$$

初始条件给出

$$c_n(0) = c'_n(0) = 0, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (10.82)$$

源仅有的非零展开系数为

$$s_1 = A \sqrt{\frac{L}{2}}. \quad (10.83)$$

按照表10.1所列结果, 唯一的非零系数为

$$c_1(t) = d_1 \cos \frac{\pi at}{L} + e_1 \sin \frac{\pi at}{L} + \frac{s_1 L^2}{a^2 \pi^2}. \quad (10.84)$$

容易由(10.82)确定出 $d_1 = -\frac{s_1 L^2}{a^2 \pi^2}$, $e_1 = 0$, 于是求出

$$u(x, t) = \frac{L^2}{a^2 \pi^2} A \left(1 - \cos \frac{\pi a t}{L} \right) \sin \frac{\pi x}{L}. \quad (10.85)$$

10.3.2 高维直角坐标系的諧函数

在高于—维的空间, 对同一个本征值 $-k^2$, 往往对应着不止一个本征矢。这时候本征矢就不是自动正交的了, 那如何选取一组正交的本征矢呢? 也许此时你脑海中浮现出施什么特之类的东西……确实, 最一般的方法就是随便取线性独立的本征矢然后作施密特正交化。不过, 实际上对于一些有明显对称性的高维空间区域, 我们很少这么干。通常我们会根据区域的对称性选择合适的坐标系, 使得区域的边界都成为一系列单坐标的边界。这句话有些抽象, 让我们来看些例子。

对长为 l_1 , 宽为 l_2 的长方形区域, 我们可以建立二维的 x - y 直角坐标系, 使得区域覆盖坐标范围是 $0 \leq x \leq l_1$, $0 \leq y \leq l_2$ 。这时边界条件就可以写成 $\dots|_{x=0} = \dots$, $\dots|_{x=l_1} = \dots$, $\dots|_{y=0} = \dots$, $\dots|_{y=l_2} = \dots$ 。

对半径为 R 的圆区域, 我们可以以圆心为原点建立 r - θ 极坐标系。这样边界条件就可以写成 $\dots|_{r=R} = \dots$ 。

对半径为 R 的球区域, 我们可以以球心为原点建立 r - θ - ϕ 球坐标系。这样边界条件就可以写成 $\dots|_{r=R} = \dots$ 。

对半径为 R , 高为 h 的柱形区域, 我们可以建立 r - θ - z 柱坐标系, 使得区域覆盖的坐标范围是 $r \leq R$; $0 \leq z \leq h$ 。这样边界条件就可以写成 $\dots|_{r=R} = \dots$, $\dots|_{z=0} = \dots$, $\dots|_{z=h} = \dots$ 。

在上面的例子中, 高维区域的边界条件成为了一系列的单坐标边界条件。如果按照“分离变量”的想法, 把同一个本征值 $-k^2$ 对应的本征矢都写成单个坐标的函数的乘积, 那么其中某些坐标的函数有可能本身也是个—维諧函数, 其通常没有本征值简并问题而自动正交。

上面这个说法比较抽象, 我们还是来看一个例子: 对长为 l_1 , 宽为 l_2 的长方形区域, 假设我们考虑一个满足第一类零边界条件的諧函数问题。我们可以建立二维的 x - y 直角坐标系, 使得区域覆盖坐标范围是 $0 \leq x \leq l_1$, $0 \leq y \leq l_2$ 。这时本征值方程和边界条件就可以写成

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -k^2 \psi, \quad (10.86)$$

$$\psi|_{x=0} = \psi|_{x=l_1} = 0; \quad \psi|_{y=0} = \psi|_{y=l_2} = 0. \quad (10.87)$$

我解决问题的方式是直截了当构造出一组正交归一化的諧函数 (既然是“构造”,

就全凭经验，所以并没有什么正向的逻辑流)，它们都具有如下的形式

$$\psi = X(x)Y(y). \quad (10.88)$$

其中 $X(x)$ 满足

$$X'' = -k_x^2 X \quad (10.89)$$

$$X|_{x=0} = X|_{x=l_1} = 0. \quad (10.90)$$

$Y(y)$ 满足

$$Y'' = -k_y^2 Y \quad (10.91)$$

$$Y|_{y=0} = Y|_{y=l_2} = 0. \quad (10.92)$$

容易检验，(10.88)确实满足(10.86)和(10.87)，且

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2. \quad (10.93)$$

当 $X(x)$ 遍历所有满足(10.89)和(10.90)的一维谐函数， $Y(y)$ 遍历素有满足(10.91)和(10.92)的一维谐函数，组合 $X(x)Y(y)$ 就给出了所有满足(10.86)和(10.87)的独立二维谐函数。

思考题：为什么(10.88)形式给出的二维谐函数是完备的，也就是说任意一个满足(10.91)和(10.92)的二维谐函数都可以分解成形如(10.88)的谐函数的线性组合？

这样，当两个谐函数 $X_1(x)Y_1(y)$ 和 $X_2(x)Y_2(y)$ 对应的 $-k^2$ 相同，但 $-k_x^2$ 不同时，两者也是正交的。这是因为 $X_1(x), X_2(x)$ 是(10.89)和(10.90)给出的一维谐函数，且对应不同的（一维）本征值 $(-k_x^2)$ ，于是 $X_1(x)X_2(x)$ 在 $x \in [0, l_1]$ 内积分为零。这样二重积分 $\iint_{\Omega} X_1(x)Y_1(y)X_2(x)Y_2(y)dxdy = \int_0^{l_2} Y_1(y)Y_2(y)dy \int_0^{l_1} X_1(x)X_2(x)dx$ 显然为零。

也就是说，用 (k, k_x) 标记的这些本征矢（当 k 或者 k_x 不同时）自动两两正交——我们的目的达到了。

思考题：具体求解(10.89)和(10.90)给出的所有 X 以及(10.91)和(10.92)给出的所有 Y 。然后验证(10.88)给出的二维谐函数确实自动两两正交。

这样，在直角坐标系，实际上我们已经解决了问题。二维的对应本征值为 $-k^2$ 的谐函数可以写成：

$$[A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x)][C \cos(k_y y) + D \sin(k_y y)] \quad (10.94)$$

的形式。其中 A, B, C, D 为待定常数，可以根据具体的边界条件确定；各个坐标的“分波数” k_x 和 k_y 和总波数 k 之间满足 $k_x^2 + k_y^2 = k^2$ 。

要注意的是对应简并本征值 $-k^2$ 的本征矢子空间里的正交基矢选取具有很大的随意性。所以 (10.94) 并不是正交基矢的唯一选取方式，它只是特别适合被拿来对付长方形区域内的零边界条件问题。对于其他形状的区域（例如圆形区域），单个的 (10.94) 函数通常无法满足零边界条件——虽然理论上它们的线性组合还是可以满足零边界条件，但使用起来太不方便了，所以我们通常会选取其他坐标系来描述諧函数。

看到这里，想必你已经可以自己写出三维长方体区域，甚至更高维的方形区域内的（用直角坐标系描述的）諧函数了。

例题 51: 把一个边长为 $L = 0.2\text{m}$ ，热传导方程参数为 $a = 10^{-4}\text{m}^2/\text{s}$ ，初始温度为 T_0 的均匀正方体金属块投入温度为 $2T_0$ 的热库。估算多久后，正方体的中心（即内部距离各个面都为 $L/2$ 的点）温度达到 $1.5T_0$ 。

解答: 建立三维直角坐标系 x - y - z 使得正方体所在区域 Ω 为满足 $0 \leq x \leq L$; $0 \leq y \leq L$; $0 \leq z \leq L$ 的点集。记立方体内温度为 $T(t, x, y, z)$ ，则

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a\nabla^2 T = 0, \quad (10.95)$$

$$T|_{x=0} = T|_{x=L} = T|_{y=0} = T|_{y=L} = T|_{z=0} = T|_{z=L} = 2T_0, \quad (10.96)$$

$$T|_{t=0} = T_0. \quad (10.97)$$

显然最后的稳定解 $T(t \rightarrow \infty, x, y, z) = 2T_0$ ，所以令 $T = u + 2T_0$ ，代入上面的方程和边界条件，得到

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\nabla^2 u = 0, \quad (10.98)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=L} = u|_{y=0} = u|_{y=L} = u|_{z=0} = u|_{z=L} = 0, \quad (10.99)$$

$$u|_{t=0} = -T_0. \quad (10.100)$$

现在是一个标准的零边界条件问题了。边界条件对应的正交归一化的諧函数为

$$\psi_{n_1, n_2, n_3}(x, y, z) = \left(\frac{2}{L}\right)^{3/2} \sin \frac{n_1 \pi x}{L} \sin \frac{n_2 \pi y}{L} \sin \frac{n_3 \pi z}{L}, \quad n_1, n_2, n_3 \in Z^+, \quad (10.101)$$

对应的波数 k 满足 $k^2 = \frac{(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)\pi^2}{L^2}$ 。

令

$$u(t, x, y, z) = \sum_{n_1, n_2, n_3} \psi_{n_1, n_2, n_3}(x, y, z) c_{n_1, n_2, n_3}(t). \quad (10.102)$$

初始条件(10.100)等价于

$$\sum_{n_1, n_2, n_3} c_{n_1, n_2, n_3}(0) \psi_{n_1, n_2, n_3}(x, y, z) = -T_0 \quad (10.103)$$

由谐函数的正交归一性, 有

$$c_{n_1, n_2, n_3}(0) = \int_{\Omega} (-T_0) \psi_{n_1, n_2, n_3} dV = \begin{cases} -\frac{16\sqrt{2}L^{3/2}}{n_1 n_2 n_3 \pi^3} T_0, & \text{if } n_1, n_2, n_3 \text{ all odd} \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (10.104)$$

从表10.1得知, 对无源的热传导方程,

$$c_{n_1, n_2, n_3}(t) = c_{n_1, n_2, n_3}(0) e^{-ak^2 t} = c_{n_1, n_2, n_3}(0) e^{-\frac{(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)\pi^2 at}{L^2}}. \quad (10.105)$$

代入(10.102), 并考虑到只有 n_1, n_2, n_3 为奇数时系数非零, 就可以令 $n_1 = 2m_1 + 1, n_2 = 2m_2 + 1, n_3 = 2m_3 + 1$, 得到

$$u = -\frac{64T_0}{\pi^3} \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \sum_{m_3=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2m_1+1)\pi x}{L} \sin \frac{(2m_2+1)\pi y}{L} \sin \frac{(2m_3+1)\pi z}{L}}{(2m_1+1)(2m_2+1)(2m_3+1)} e^{-\frac{[(2m_1+1)^2 + (2m_2+1)^2 + (2m_3+1)^2]\pi^2 at}{L^2}}. \quad (10.106)$$

问题等价于, 何时 $u(t, \frac{L}{2}, \frac{L}{2}, \frac{L}{2}) = -\frac{T_0}{2}$, 即要求出使得

$$\sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \sum_{m_3=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1+m_2+m_3}}{(2m_1+1)(2m_2+1)(2m_3+1)} e^{-\frac{[(2m_1+1)^2 + (2m_2+1)^2 + (2m_3+1)^2]\pi^2 at}{L^2}} = \frac{\pi^3}{128}. \quad (10.107)$$

成立的 t 。

问题看起来似乎有些难, 但如果你掌握了 a 的物理意义, 就不难找到突破口: 要使得正方体中心的温度有显著的变化, 经过的时间必须是 $\frac{L^2}{a}$ 的量级。那么很显然地(10.107)左边的 $m_1 = m_2 = m_3 = 0$ 项占绝对主导, 其次是 $(m_1, m_2, m_3) = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ 这三项。忽略其他的项, 就有

$$e^{-\frac{3\pi^2 at}{L^2}} - e^{-\frac{11\pi^2 at}{L^2}} \approx \frac{\pi^3}{128}. \quad (10.108)$$

由于 $e^{-\frac{11\pi^2 at}{L^2}}$ 已经是一个小量修正, 我们先丢弃它得到 $e^{-\frac{3\pi^2 at}{L^2}} \approx \frac{\pi^3}{128}$, 然后近似估算出 $e^{-\frac{11\pi^2 at}{L^2}} \approx \left(\frac{\pi^3}{128}\right)^{11/3}$, 代入(10.108)就得到

$$t \approx \frac{-\ln\left(\frac{\pi^3}{128} + \left(\frac{\pi^3}{128}\right)^{11/3}\right)}{3\pi^2} \frac{L^2}{a} \approx 18.8\text{s}. \quad (10.109)$$

计算机数值求解 (10.107) 得到的结果是 $t \approx 18.8243\text{s}$ 。可见我们的估算还是相当靠谱的。

10.4 第10章习题

习题 115: 设直角坐标系的标量场 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 在椭圆 $x^2 + 2y^2 = 1$ 上的取值均为零。它们在椭圆内部取值不处处为零, 且分别满足

$$\nabla^2 f = -f,$$

以及

$$\nabla^2 g = -2g.$$

那么在椭圆内部的积分

$$\iint_{x^2+2y^2<1} f(x,y)g(x,y)dx dy$$

等于多少?

习题 116: 设在三维空间以原点为球心的单位球内, 球坐标系的非常数函数 $f(r, \theta, \phi)$ 和 $g(r, \theta, \phi)$ 分别满足

$$\nabla^2 f = af,$$

$$\nabla^2 g = bg,$$

a, b 均为实常数。

已知在单位球的表面 (即 $r = 1$ 处) 上, $\frac{\partial f}{\partial r}$ 和 $\frac{\partial g}{\partial r}$ 均处处为零。且已知积分

$$\int_0^1 dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} f(r, \theta, \phi)g(r, \theta, \phi)r^2 \sin \theta d\phi = a + b.$$

那么 $(a - b)^2$ 等于多少?

习题 117: 设方程 $\cot x + x = 0$ 的 (按从小到大排列的) 第 n 个正数解为 α_n 。计算积分

$$\int_0^1 \sin \frac{(\alpha_1 + \alpha_4)x}{2} \sin \frac{(\alpha_1 - \alpha_4)x}{2} \sin \frac{(\alpha_2 + \alpha_3)x}{2} \sin \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)x}{2} dx$$

的值。

习题 118: 两端固定的, 长度为 L 的均匀弦的横向小振动 $u(x, t)$ ($0 \leq x \leq L, t \geq 0$) 满足初始条件:

$$u|_{t=0} = A \sin \frac{\pi x}{L} \cos \frac{2\pi x}{L}.$$

其中 A 是常量, 以及

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

设弦振动方程的波速参数为 a , 则在 $t = \frac{L}{a}$ 时刻, 弦的中点的横向位移 (即 $u(\frac{L}{2}, \frac{L}{a})$) 是 A 的多少倍?

习题 119: 在 $x \in [0, L], t \in [0, \infty)$ 内, 求解有源的热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\tau} \sin \frac{\pi x}{L} e^{-\frac{a\pi^2 t}{L^2}}.$$

边界条件为

$$u|_{x=0} = u|_{x=L} = 0.$$

初始条件为

$$u|_{t=0} = 0.$$

习题 120: 长度为 L 的导热棒一端和温度为 T_0 的热库接触, 并在 $t = 0$ 时刻和热库处于热平衡。从 $t = 0$ 时刻开始, 在导热棒的另一端注入恒定大小为 j 的热流。设已知导热棒的导热系数 λ 和热传导方程参数 a , 求解导热棒上温度 $u(x, t)$ ($0 \leq x \leq L, t \geq 0$)。

习题 121: 两端固定的, 长度为 L 的均匀弦的横向小振动 $u(x, t)$ ($0 \leq x \leq L, t \geq 0$) 满足初始条件:

$$u|_{t=0} = \frac{Ax^3(L-x)^3}{L^6}.$$

其中 A 是常量, 以及

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

设弦振动方程的波速参数为 a , 求解 $u(x, t)$ 。

习题 122: 把一个边长为 $L = 0.2\text{m}$, 热传导方程参数为 $a = 10^{-4}\text{m}^2/\text{s}$, 初始温度为 T_0 的均匀正方体金属块的某一面和 $2T_0$ 的热库接触, 其他面均保持孤立。请估算: 至少要多久后, 正方体所有部位的温度均超过 $1.5T_0$ 。

习题 123: 求解一端固定, 另一端正弦驱动的弦振动 $u(x, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \\ u|_{x=0} &= 0, \\ u|_{x=L} &= A \sin\left(\frac{n\pi a}{L}t\right), \\ u|_{t=0} &= 0, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} &= 0. \end{aligned}$$

这里 $x \in [0, L], t \in [0, \infty)$; A 是已知常量。

(提示: 令 $u(x, t) = v(x, t) + \frac{Ax}{L} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}t\right)$ 转化为零边界条件的问题。)

习题 124: 考虑空气阻力对长度为 L 的均匀柔软弦的横向小振动的影响: 假设单位长度的弦所受的空气阻力和弦的横向位移速度成正比, 弦的振动方程就修正为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

其中的阻尼时间 $\tau \gg \frac{L}{a}$ 为常量。设初始条件为

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= A \sin \frac{\pi x}{L}, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} &= 0 \end{aligned}$$

求解 $u(x, t)$ 。

习题 125: 设 a, b, c 为三个已知的非零实数。计算极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \sum_{m_3=0}^{\infty} \frac{\cos[(2m_1 + 1)ax] \cos[(2m_2 + 1)bx] \cos[(2m_3 + 1)cx]}{(2m_1 + 1)^2 + (2m_2 + 1)^2 + (2m_3 + 1)^2}$$

11. 正交曲面坐标系中的谐函数

从这一章开始，我们以极坐标系，柱坐标系，和球坐标系为例来研究正交曲面坐标系中的谐函数。

如果允许谐函数取复值，直角坐标系的谐函数还可以统一写成 $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ （这里未作归一化）的形式，其中 \mathbf{k} 是波矢，其长度等于波数 k 。所以傅里叶变换的本质是把一个函数按照直角坐标系的谐函数展开。

在这一章的讨论中，我们也会时不时用书写更加方便的复值函数来表示谐函数。唯一要注意的是区域 Ω 内复函数 f, g 的内积的定义是

$$\int_{\Omega} f^{\dagger} g dV. \quad (11.1)$$

也就是说，当你把一个函数 $f(\mathbf{x})$ 按照复值的谐函数 $\psi_1(\mathbf{x}), \psi_2(\mathbf{x}) \dots$ 展开时，展开系数

$$c_n = \int_{\Omega} \psi_n^{\dagger} f dV. \quad (11.2)$$

此外，这时你可以把零边界条件下的 ∇^2 算符看成厄米算符（实对称矩阵当然是厄米矩阵），厄米算符的不同本征值对应的本征矢还是自动正交，所以谐函数正交定理仍然成立。

在求解一般正交曲面坐标系中的数理方程时，我们需要对一些特殊函数进行积分计算归一化系数。下面的定理给出了统一的解决方案。

∇^2 算符的本征函数归一化定理: 设带参量 k 的函数 $\psi(k; \mathbf{x})$ 是区域 Ω 内拉普拉斯算符的本征值为 $-k^2$ 的本征函数: 即对任意 $k > 0$ 以及 $\mathbf{x} \in \Omega$, $\nabla^2 \psi = -k^2 \psi$.

那么对 $k > 0$, 有

$$\int_{\Omega} \psi^2 dV = \frac{1}{2k} \int_{\partial\Omega} \left[(\nabla \psi)_{\perp} \frac{\partial \psi}{\partial k} - \psi \frac{\partial (\nabla \psi)_{\perp}}{\partial k} \right] dS. \quad (11.3)$$

证明: 在方程

$$\nabla^2 \psi = -k^2 \psi, \quad (11.4)$$

两边对参量 k 求偏导, 得到

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial k} = -2k\psi - k^2 \frac{\partial \psi}{\partial k}. \quad (11.5)$$

在(11.4)两边乘以 $\frac{\partial \psi}{\partial k}$, 在(11.5)两边乘以 ψ , 然后相减, 得到:

$$\frac{\partial \psi}{\partial k} \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial k} = 2k\psi^2. \quad (11.6)$$

于是

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \psi^2 dV &= \frac{1}{2k} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \psi}{\partial k} \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial k} \right) dV \\ &= \frac{1}{2k} \int_{\Omega} \nabla \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial k} \nabla \psi - \psi \nabla \frac{\partial \psi}{\partial k} \right) dV \\ &= \frac{1}{2k} \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial \psi}{\partial k} (\nabla \psi)_{\perp} - \psi \frac{\partial (\nabla \psi)_{\perp}}{\partial k} \right] dS \end{aligned} \quad (11.7)$$

当讨论复函数时, 上述定理及证明过程修改如下:

∇^2 算符的本征函数归一化定理 (复内积版本): 设带参量 k 的函数 $\psi(k; \mathbf{x})$ 是区域 Ω 内拉普拉斯算符的本征值为 $-k^2$ 的本征函数: 即对任意 $k > 0$ 以及 $\mathbf{x} \in \Omega$, $\nabla^2 \psi = -k^2 \psi$.

那么对 $k > 0$, 有

$$\int_{\Omega} |\psi|^2 dV = \frac{1}{2k} \int_{\partial\Omega} \left[(\nabla \psi^*)_{\perp} \frac{\partial \psi}{\partial k} - \psi^* \frac{\partial (\nabla \psi)_{\perp}}{\partial k} \right] dS. \quad (11.8)$$

证明: 在方程

$$\nabla^2 \psi = -k^2 \psi, \quad (11.9)$$

两边对参量 k 求偏导, 得到

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial k} = -2k\psi - k^2 \frac{\partial \psi}{\partial k}. \quad (11.10)$$

在(11.9) 两边取共轭并乘以 $\frac{\partial \psi}{\partial k}$, 在(11.10)两边乘以 ψ^* , 然后相减, 得到:

$$\frac{\partial \psi}{\partial k} \nabla^2 \psi^* - \psi^* \nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial k} = 2k|\psi|^2. \quad (11.11)$$

于是

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\psi|^2 dV &= \frac{1}{2k} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \psi}{\partial k} \nabla^2 \psi^* - \psi^* \nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial k} \right) dV \\ &= \frac{1}{2k} \int_{\Omega} \nabla \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial k} \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \frac{\partial \psi}{\partial k} \right) dV \\ &= \frac{1}{2k} \int_{\partial \Omega} \left[\frac{\partial \psi}{\partial k} (\nabla \psi^*)_{\perp} - \psi^* \frac{\partial (\nabla \psi)_{\perp}}{\partial k} \right] dS \end{aligned} \quad (11.12)$$

现在我们做好了一切准备。深呼吸, 准备面对各种坐标系中的谐函数(特殊函数)的挑战吧!

11.1 极坐标系的谐函数

在二维平面上的极坐标系 $r-\theta$ 中, 谐函数 ψ 满足:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = -k^2 \psi. \quad (11.13)$$

我们还是用分离变量的老办法, 选取形如 $\psi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ 的一组独立本征矢。这时(11.13)成为

$$\frac{\Theta''}{\Theta} = -k^2 r^2 - \frac{r(rR')'}{R}. \quad (11.14)$$

由于方程左边是 θ 的函数, 右边是 r 的函数, 两者要恒等只能是等于某个常数 λ 。

先从物理上判断 $\lambda = \frac{\Theta''}{\Theta}$ 的符号。我们使用极坐标的谐函数通常是用来解决圆盘、圆环、扇形、扇环等区域内的零边界数理方程问题。如果是圆盘或者圆环区域, 那么 θ 无边界, 但是任何物理的解必须对 θ 是周期为 2π 的函数。这时的解只能是 $\Theta = A \cos(m\theta) + B \sin(m\theta)$ (m 为整数), 对应的 $\lambda = -m^2 \leq 0$ 。如果是扇形或者扇环区域, 那么对应的 θ 边界处会有零边界条件, Θ 相当于是一个一维的谐函数, 其本征值仍然不能是正的。

因此, 我们总是可以令 $\lambda = -\nu^2$ ($\nu \geq 0$), 取对应的解

$$\Theta = A \cos(\nu\theta) + B \sin(\nu\theta). \quad (11.15)$$

记住, 对圆盘或者圆环而言 ν 必须是整数。

现在来考虑 $R(r)$, 它满足方程:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) R = 0. \quad (11.16)$$

这个方程看似带着两个参数 k, ν , 实际上如果我们把无量纲量 $s \equiv kr$ 作为自变量, 就可以消去对 k 的依赖, 得到

$$\frac{d^2 R}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{dR}{ds} + \left(1 - \frac{\nu^2}{s^2} \right) R = 0. \quad (11.17)$$

方程 (11.17) 称为贝塞尔 (Bessel) 方程。它有两个线性独立的解 $R = J_\nu(s)$ 和 $R = N_\nu(s)$, 其中

第一类贝塞尔函数 $J_\nu(s)$ 的定义:

$$J_\nu(s) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+\nu)!} \left(\frac{s}{2} \right)^{2n+\nu}, \quad (s \geq 0). \quad (11.18)$$

其中 ν 称为贝塞尔函数的阶数, 可以取任意实数。当 $\nu < 0$ 时, 定义域范围要改为 $s > 0$ 。

第二类贝塞尔函数 $N_\nu(s)$ 的定义:

$$N_\nu(s) \equiv \lim_{\alpha \rightarrow \nu} \frac{J_\alpha(s) \cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(s)}{\sin(\alpha\pi)}, \quad (s > 0). \quad (11.19)$$

当 ν 不是整数时, 右边可以跳过取极限的过程令 $\alpha = \nu$ 直接取值。

在定义 (11.18) 中的阶数 ν 不是整数时, $\frac{1}{(n+\nu)!}$ 要理解为 $\frac{1}{\Gamma(n+\nu+1)}$, 并注意当 $n+\nu+1=0, -1, -2, \dots$ 时, $\frac{1}{\Gamma(n+\nu+1)} = 0$ (关于这个结论可以参考第4章末尾习题), 也就是说右边 $n+\nu$ 为负整数的项其实都可以扔掉。当 ν 是整数时, 由于 $2n+\nu \geq n+\nu \geq 0$ 的项才出现, 不存在 s 的负次幂项, 这样就可以去掉 $s \geq 0$ 的限制, 把 J_ν 定义在全复平面上。即整数阶第一类贝塞尔函数可以解析延拓到全复平面上。

撇开这些看起来有些莫名其妙的定义是如何来的不谈，如果你的目的只是求解数理方程，那么你几乎只要知道一件事情：对 $\nu \geq 0$ ， $J_\nu(s)$ 在 $s \in [0, \infty)$ 内都行为良好，而 $N_\nu(s)$ 在 $s = 0$ 处是发散的。这样，对于包含 $r = 0$ 的区域（即 $s = kr = 0$ 物理上能取到的情况），就要排除 $N_\nu(s)$ 这个解。于是我们有下述结论：

圆盘或者扇形等（包含极坐标 $r = 0$ 的）区域内的谐函数通解：

$$\psi = J_\nu(kr) [A \cos(\nu\theta) + B \sin(\nu\theta)], \quad (k > 0, \nu \geq 0) \quad (11.20)$$

其中 A, B 为待定常数。当区域包含所有的 θ 范围（例如圆盘）时， ν 必须取非负整数。

圆环或者扇环等（不包含极坐标 $r = 0$ 的）区域内的谐函数通解：

$$\psi = [CJ_\nu(kr) + DN_\nu(kr)] [A \cos(\nu\theta) + B \sin(\nu\theta)], \quad (k > 0, \nu \geq 0) \quad (11.21)$$

其中 A, B, C, D 为待定常数。当区域包含所有的 θ 范围（例如圆环）时， ν 必须取非负整数。

现在我们可以说既解决了问题（求出了谐函数），又几乎什么都没解决（对 J_ν 和 N_ν 除了莫名其妙的定义之外一无所知）。为了让你有学到了很多的东西的感（错）觉，我决定还是稍微介绍下 J_ν 和 N_ν 这两位新朋友。

11.2 柱函数的性质

我们先来说明第一类和第二类贝塞尔函数都是贝塞尔方程的解。

把定义式 (11.18) 逐项求导两次，得到

$$\frac{d}{ds} J_\nu(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+\nu)!} \frac{2n+\nu}{s} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n+\nu}, \quad (11.22)$$

$$\frac{d^2}{ds^2} J_\nu(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+\nu)!} \frac{(2n+\nu)(2n+\nu-1)}{s^2} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n+\nu}. \quad (11.23)$$

于是

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2 J_\nu(s)}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{dJ_\nu(s)}{ds} + \left(1 - \frac{\nu^2}{s^2}\right) J_\nu(s) \\
 = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+\nu)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n+\nu} \left(\frac{(2n+\nu)(2n+\nu-1)}{s^2} + \frac{2n+\nu}{s^2} - \frac{\nu^2}{s^2}\right) + J_\nu(s) \\
 = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+\nu)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n+\nu} \frac{4n(n+\nu)}{s^2} + J_\nu(s) \\
 = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!(n-1+\nu)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2(n-1)+\nu} + J_\nu(s) \\
 = & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m!(m+\nu)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2m+\nu} + J_\nu(s) \\
 = & 0.
 \end{aligned} \tag{11.24}$$

也就是说, $J_\nu(s)$ 确实是贝塞尔方程 (11.17) 的解。

把上述推导过程的 ν 换成 $-\nu$, 就可以证明 $J_{-\nu}(s)$ 同样是 (11.17) 的解。当 ν 不是整数时, 作为 J_ν 和 $J_{-\nu}$ 的线性组合的 N_ν 当然也是贝塞尔方程的解。又贝塞尔方程的参数都是对于 ν 连续的, 所以 ν 是整数时, N_ν 同样是贝塞尔方程的解。但是, 为什么我取 J_ν 和 N_ν , 而不是直接取 J_ν 和 $J_{-\nu}$ 来作为贝塞尔方程的两个独立的解呢?

问题出在 ν 是整数的情况。

整数阶第一类贝塞尔函数 J_m 满足:

$$J_{-m}(s) \equiv (-1)^m J_m(s). \tag{11.25}$$

也就是说, 当 ν 是整数时, $J_{-\nu}$ 和 J_ν 并不是独立的两个函数。而我们后面会看到, 无论 ν 是否为整数, J_ν 和 N_ν 都是独立的两个函数。实际上, 当 ν 等于整数 m 时, 根据洛彼达法则有

$$N_m = \frac{1}{\pi} \frac{\partial [J_\nu - (-1)^m J_{-\nu}]}{\partial \nu} \Big|_{\nu=m}. \tag{11.26}$$

也就是说, 整数阶 N_m 并不是 J_m 和 J_{-m} 的线性组合, 所以它和 J_m 线性独立这件事情至少不应该使你惊讶。

思考题: 请用定义式 (11.18) 直接证明 (11.25)。

两类贝塞尔函数除了都是贝塞尔方程的解之外, 还满足很多相同的性质, 很多时候没有必要分开来讨论。因此, 我们把 J_ν , N_ν 或者它们的某个固定线性组合 (线性组合系数不能依赖于 ν) 叫做“柱函数”。我们会用抽象的符号 Z_ν 或者 W_ν

来表示阶数为 ν 的柱函数 (不同的字母 Z_ν , W_ν 代表的柱函数中 J_ν 和 N_ν 的线性组合系数可以不同)。除了 J_ν 和 N_ν 本身是柱函数之外, 常见的柱函数还有第一类汉克耳 (Hankel) 函数 $H_\nu^{(1)} \equiv J_\nu + iN_\nu$ 和第二类汉克耳函数 $H_\nu^{(2)} \equiv J_\nu - iN_\nu$ 。

思考题: 对于整数 m 以及 $s > 0$, 证明第二类贝塞尔函数具有和(11.25)类似的性质

$$N_{-m}(s) = (-1)^m N_m(s). \quad (11.27)$$

从而对任何柱函数 Z_ν 以及整数 m , 均有 $Z_{-m}(s) = (-1)^m Z_m(s)$ 。

11.2.1 柱函数的递推公式

直接利用定义(11.18)和(11.19), 可以证明

柱函数的第一条递推性质: 设 Z_ν 为 ν 阶柱函数

$$\frac{d}{ds} [s^\nu Z_\nu(s)] = s^\nu Z_{\nu-1}(s). \quad (11.28)$$

以及

柱函数的第二条递推性质: 设 Z_ν 为 ν 阶柱函数

$$\frac{d}{ds} [s^{-\nu} Z_\nu(s)] = -s^{-\nu} Z_{\nu+1}(s). \quad (11.29)$$

这两条递推关系还能重新组合写成如下的等价形式:

$$Z_{\nu-1}(s) - Z_{\nu+1}(s) = 2Z'_\nu(s), \quad (11.30)$$

$$Z_{\nu-1}(s) + Z_{\nu+1}(s) = \frac{2\nu}{s} Z_\nu(s). \quad (11.31)$$

例题 52: 计算不定积分 $\int s^3 J_0(s) ds$

解答: 根据(11.28), 有 $sJ_0(s) = \frac{d}{ds} (sJ_1(s))$, 于是可以分部积分

$$\begin{aligned} \int s^3 J_0(s) ds &= \int s^2 d(sJ_1(s)) \\ &= s^3 J_1(s) - \int 2s^2 J_1(s) ds \\ &= s^3 J_1(s) - 2s^2 J_2(s) \end{aligned} \quad (11.32)$$

显然, 对非负整数 n, m , 只要 n, m 奇偶性不同, 就能用这个例题的办法计算出不定积分 $\int s^n Z_m(s) ds$ (Z_m 为 m 阶柱函数)。

从定义式 (11.18) 和 (11.19) 很容易验证 $J_{\pm 1/2}$ 和 $N_{\pm 1/2}$ 都是初等函数:

$$J_{1/2}(s) = N_{-1/2}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \sin s, \quad (11.33)$$

$$J_{-1/2}(s) = -N_{1/2}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \cos s. \quad (11.34)$$

再利用递推公式 (11.28) 和 (11.29), 我们可以得到所有的半奇数阶贝塞尔函数都是初等函数的结论。

11.2.2 两类贝塞尔函数在零附近的渐近行为

我们来考虑当 $s \rightarrow 0^+$ 时贝塞尔函数的渐近行为。这是比较容易的, 因为 J_ν 的定义式就是以 s 的幂级数形式出现。

对第一类贝塞尔函数, 我们取(11.18)的最低阶和次低阶项来作为 J_ν 的近似。不过要注意 ν 是负整数时, 最低项要从 $n = -\nu$ 开始算。

J_ν 在 0^+ 处的渐近公式: 当 $s \rightarrow 0^+$ 时,

如果 ν 不是负整数,

$$J_\nu(s) \approx \frac{1}{\nu!} \left(\frac{s}{2}\right)^\nu \left(1 - \frac{s^2}{4(1+\nu)} + \frac{s^4}{32(1+\nu)(2+\nu)}\right), \quad (11.35)$$

如果 ν 是负整数,

$$J_\nu(s) \approx \frac{(-1)^{-\nu}}{(-\nu)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{-\nu} \left(1 - \frac{s^2}{4(1-\nu)} + \frac{s^4}{32(1-\nu)(2-\nu)}\right), \quad (11.36)$$

注意这个结果并不是说 J_ν 在 ν 为负整数处不连续。实际上, 当 $s \rightarrow 0^+$ 且 ν 接近负整数时, (11.35)右边的分母 $\nu!$ 趋向于无穷大, (11.35)右边成为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的不定式。(11.36)只是对该不定式的一个特殊逼近方向的渐近行为做了说明而已。

好吧, 如果你还是用怀疑的目光看着我, 我就只好上图了。请看图11.1并自行理解为什么 $J_\nu(s)$ 对 ν 的连续性和 (11.35)、(11.36)并不产生矛盾。

第二类贝塞尔函数的情况比较复杂, 我们只考虑主导项。

当 $\nu > 0$ 且不是整数时, $J_\nu(s) \sim s^\nu$, $J_{-\nu} \sim s^{-\nu}$, 因此 N_ν 会由 $J_{-\nu}$ 主导:

$$N_\nu(s) \approx -\frac{J_{-\nu}(s)}{\sin(\nu\pi)} \approx -\frac{1}{(-\nu)! \sin(\nu\pi)} \left(\frac{s}{2}\right)^{-\nu}. \quad (11.37)$$

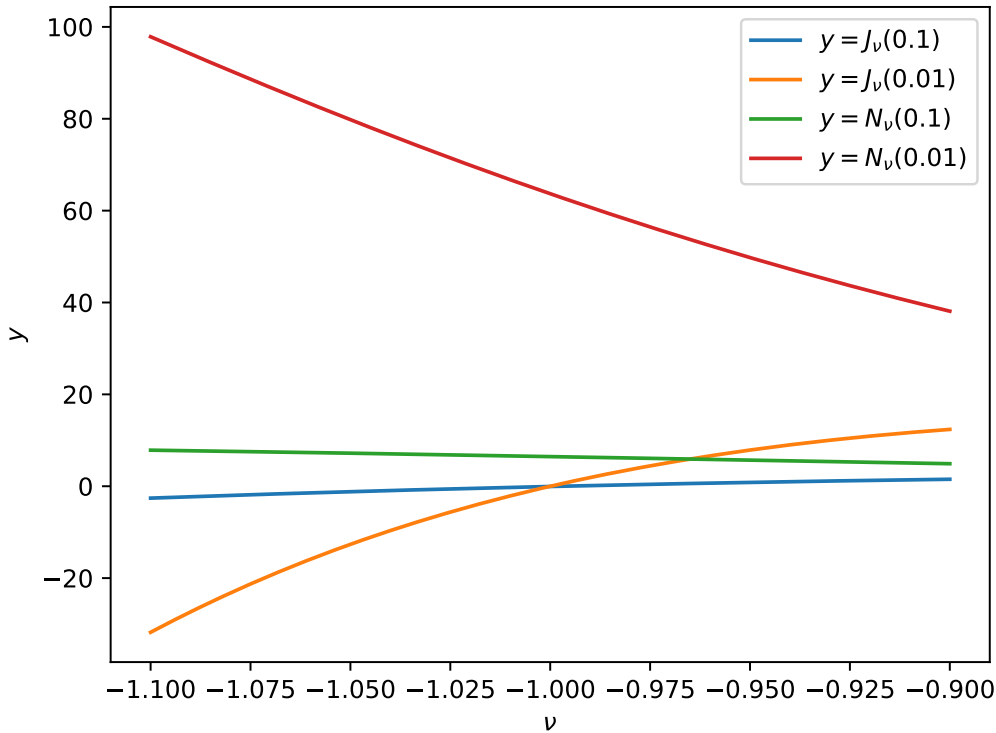


Figure 11.1: $J_\nu(s)$ 和 $N_\nu(s)$ 在 $\nu = -1$ 附近对 ν 的连续性。

利用 Γ 函数互余宗量关系(4.30), $(-\nu)! = \Gamma(1 - \nu) = \frac{\pi}{\sin(\nu\pi)\Gamma(\nu)}$, 上式成为

$$N_\nu(s) \approx -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{s}{2}\right)^{-\nu}. \quad (11.38)$$

当 $\nu < 0$ 且不是整数时, N_ν 就由 J_ν 主导:

$$N_\nu(s) \approx \frac{J_\nu(s) \cos(\nu\pi)}{\sin(\nu\pi)} \approx \frac{\cos(\nu\pi)}{\nu! \sin(\nu\pi)} \left(\frac{s}{2}\right)^\nu. \quad (11.39)$$

利用 Γ 函数互余宗量关系(4.30), $\nu! = \Gamma(1 + \nu) = -\frac{\pi}{\sin(\nu\pi)\Gamma(-\nu)}$, 上式成为

$$N_\nu(s) \approx -\frac{\Gamma(-\nu) \cos(\nu\pi)}{\pi} \left(\frac{s}{2}\right)^\nu. \quad (11.40)$$

通过使用 Γ 函数的互余宗量关系(4.30), 我们得到的 (11.38) 在 ν 趋向于正整数, 以及 (11.40) 在 ν 趋向于负整数时, 都不会变成不定式。所以这两个结果对于正整数和负整数也都是分别适用的。我们只需额外讨论 $\nu = 0$ 的情况。这时我们需要同时保留 J_ν 和 $J_{-\nu}$ 的贡献。利用 (11.26), 有

$$N_0(s) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial [J_\nu(s) - J_{-\nu}(s)]}{\partial \nu} \Big|_{\nu=0} = \frac{2}{\pi} \frac{\partial J_\nu(s)}{\partial \nu} \Big|_{\nu=0}. \quad (11.41)$$

利用最低阶的渐近表达式 $J_\nu \approx \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{s}{2}\right)^\nu$, 以及(4.39), 上式成为:

$$N_0(s) \approx \frac{2}{\pi} \left[\ln \frac{s}{2} - \Gamma'(1) \right] = \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{s}{2} + \gamma \right). \quad (11.42)$$

这里 $\gamma = 0.5772\dots$ 是欧拉常数。

最后总结起来就有

N_ν 在 0^+ 处的渐近公式: 当 $s \rightarrow 0^+$ 时,

如果 $\nu > 0$,

$$N_\nu(s) \approx -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{s}{2}\right)^{-\nu}. \quad (11.43)$$

如果 $\nu = 0$,

$$N_0(s) \approx \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{s}{2} + \gamma \right). \quad (11.44)$$

如果 $\nu < 0$

$$N_\nu(s) \approx -\frac{\Gamma(-\nu) \cos(\nu\pi)}{\pi} \left(\frac{s}{2}\right)^\nu. \quad (11.45)$$

例题 53: 对 $\nu > -1$, $a > 0$, $b > 0$, 证明

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} s \left[J_\nu(as) \frac{d}{ds} J_\nu(bs) - J_\nu(bs) \frac{d}{ds} J_\nu(as) \right] = 0. \quad (11.46)$$

解答: 利用 (11.35), 有

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow 0^+} s \left[J_\nu(as) \frac{d}{ds} J_\nu(bs) - J_\nu(bs) \frac{d}{ds} J_\nu(as) \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} s \left[\frac{1}{\nu!} \left(\frac{as}{2}\right)^\nu \frac{1}{s^{(\nu-1)!}} \left(\frac{bs}{2}\right)^\nu (1 + O(s^2)) - \frac{1}{\nu!} \left(\frac{bs}{2}\right)^\nu \frac{1}{s^{(\nu-1)!}} \left(\frac{as}{2}\right)^\nu (1 + O(s^2)) \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0^+} O(s^{2\nu+2}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

11.2.3 朗斯基 (Wronskian) 行列式

朗斯基 (Wronskian) 行列式定理: 对于同阶的两个柱函数 Z_ν 和 W_ν , $s[Z_\nu(s)W_\nu'(s) - W_\nu(s)Z_\nu'(s)]$ 是和 s 无关的常数。

证明：把贝塞尔方程

$$Z_v''(s) + \frac{1}{s}Z_v'(s) + \left(1 - \frac{v^2}{s^2}\right)Z_v(s) = 0 \quad (11.47)$$

写成等价的形式：

$$(sZ_v'(s))' = -s\left(1 - \frac{v^2}{s^2}\right)Z_v(s). \quad (11.48)$$

同样有

$$(sW_v'(s))' = -s\left(1 - \frac{v^2}{s^2}\right)W_v(s). \quad (11.49)$$

把(11.49)两边乘以 $Z_v(s)$ ，(11.48)两边乘以 $W_v(s)$ ，然后相减，得到：

$$(sW_v'(s))'Z_v(s) - (sZ_v'(s))'W_v(s) = 0. \quad (11.50)$$

上式等价于

$$\frac{d}{ds} [sW_v'(s)Z_v(s) - sZ_v'(s)W_v(s)] = 0. \quad (11.51)$$

证毕。

例题 54: 对所有实数 v 证明恒等式

$$J_v(s)N_v'(s) - N_v(s)J_v'(s) = \frac{2}{\pi s}. \quad (11.52)$$

解答：由 Wronski 行列式定理，可以知道 $s[J_v(s)N_v'(s) - N_v(s)J_v'(s)]$ 是和 s 无关的常数。当 v 不是整数时，根据 N_v 的定义 (11.19) 可以得到

$$s [J_v(s)N_v'(s) - N_v(s)J_v'(s)] = \frac{s [J_{-v}(s)J_v'(s) - J_v(s)J_{-v}'(s)]}{\sin(v\pi)}. \quad (11.53)$$

由于这是个常数，所以可以令 $s \rightarrow 0^+$ 来计算它。利用 (11.35) 即有，

$$\frac{s [J_{-v}(s)J_v'(s) - J_v(s)J_{-v}'(s)]}{\sin(v\pi)} = \frac{2}{\Gamma(1-v)\Gamma(v)\sin(v\pi)} = \frac{2}{\pi}. \quad (11.54)$$

在最后一步我们使用了 Γ 函数的互余宗量关系(4.30)。

两类贝塞尔函数在无穷远处的渐近行为

在贝塞尔方程(11.17)中令 $R = \frac{U}{\sqrt{s}}$, 化简后可以得到

$$U'' + \left(1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{s^2}\right)U = 0. \quad (11.55)$$

我们先来看 $\left|\frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{s^2}\right| \ll 1$ 可以忽略的情况。这时方程成为了 $U'' + U = 0$, 其实数解具有 $U \propto \cos(s + \phi)$ 的形式, 这里的 ϕ 是某待定相位。那么, 贝塞尔方程的解在 $\left|\frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{s^2}\right| \ll 1$ 的情况下具有“无穷远处渐近公式”:

$$J_\nu(s) \approx \frac{A_\nu}{\sqrt{s}} \cos(s + \phi_\nu), \quad s \rightarrow \infty. \quad (11.56)$$

这里的振幅 $A_\nu > 0$ (否则可以通过把相位 ϕ_ν 增加 π 做到)。

要获得 A_ν 和 ϕ_ν 的表达式并不是那么容易的事情——通常是先推导任意阶贝塞尔函数的积分表示 (这比后面会介绍的整数阶贝塞尔函数的积分表示要更复杂), 然后用最陡下降法获得渐近公式, 整个计算过程比较冗长。我们这里尝试用带有一定猜测性质的方法来得出 A_ν 和 ϕ_ν 。

先来看 J_ν 的递推公式(11.28), 令 $s \rightarrow \infty$, 有

$$\frac{d}{ds} \left[A_\nu s^{\nu-1/2} \cos(s + \phi_\nu) \right] \approx A_{\nu-1} s^{\nu-1/2} \cos(s + \phi_{\nu-1}). \quad (11.57)$$

要使上式的主导项 ($\sim s^{\nu-1/2}$) 左右相等, 则必须 $A_\nu = A_{\nu-1}$, $\phi_\nu = \phi_{\nu-1} - \frac{\pi}{2}$ 。满足这个递推式的最简单情况是: $A_\nu = C_1$, $\phi_\nu = -\frac{\nu\pi}{2} + C_2$, 这里的 $C_1 > 0$ 和 C_2 均是和 ν 无关的 (真正定死的) 常数, 也就是说:

$$J_\nu(s) \approx \frac{C_1}{\sqrt{s}} \cos\left(s - \frac{\nu\pi}{2} + C_2\right), \quad s \rightarrow \infty. \quad (11.58)$$

上式有很大的猜测的成分, 所以完全谈不上是一个证明。不过, 我们暂时还顾不上为这个缺憾惋惜, 先确定 C_1, C_2 的值才是当务之急。

在 (11.54) 左边令 $s \rightarrow \infty$, 并利用(11.58), 即有

$$C_1^2 = \frac{2}{\pi}. \quad (11.59)$$

于是,

$$J_\nu(s) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \cos\left(s - \frac{\nu\pi}{2} + C_2\right), \quad s \rightarrow \infty. \quad (11.60)$$

撇开中间我们要了很大一个滑头不说, 我们现在离目标只有一步之遥!

当 $\nu = -1/2$ 时, 方程 (11.55) 严格地成为 $U'' + U = 0$, 所以 (11.60) 将会是严格的等式而非渐近表达式。于是

$$J_{-1/2}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \cos\left(s + \frac{\pi}{4} + C_2\right). \quad (11.61)$$

和(11.34)比较, 立刻得到 $C_2 = -\frac{\pi}{4}$ 。终于大功告成!

利用(11.19)你很容易从 J_ν 的渐近表达式推出 N_ν 的渐近表达式。整理后, 结论如下:

贝塞尔函数在 ∞ 处的渐近公式: 当 $\left|\frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{s^2}\right| \ll 1$ 时

$$J_\nu(s) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \cos\left(s - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (11.62)$$

$$N_\nu(s) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \sin\left(s - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (11.63)$$

现在 J_ν 和 N_ν 是两个独立的函数这件事就很清楚了——我们实际上是在无穷远处取了正交的两个函数分别叫做第一类和第二类贝塞尔函数。

另外, 我们也理解了为什么要定义汉克耳函数, 两类汉克耳函数分别具有如下的渐近形式:

$$H_\nu^{(1)}(s) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi s}} e^{i\left(s - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \quad (11.64)$$

$$H_\nu^{(2)}(s) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi s}} e^{-i\left(s - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \quad (11.65)$$

11.2.4 两类贝塞尔函数的大致图像

根据前面的分析, 两类贝塞尔函数的振荡行为都是从 $s \sim \sqrt{|\nu^2 - \frac{1}{4}|}$ 附近开始, 然后振幅以 $\propto s^{-1/2}$ 的形式衰减, 振荡周期大致是 2π 左右。如果非要给个很粗糙的估算: 两类贝塞尔函数的最大峰值 (即第一个峰顶) 大致分别在 $s \sim \sqrt{|\nu^2 - \frac{1}{4}|} + \frac{\pi}{2}$ 处 (第一类) 和 $s \sim \sqrt{|\nu^2 - \frac{1}{4}|} + \pi$ 处 (第二类) 取到。图11.2和图11.3分别给出了若干个第一类和第二类贝塞尔函数的图像, 和我们预期的行为非常一致。

思考题: 你能大致勾勒出 $J_{100}(s)$ 的函数图像吗?

11.2.5 第一类贝塞尔函数的三个正交定理

下面我们介绍和 J_ν 相关的若干个积分。为此, 我们现介绍一个引理:

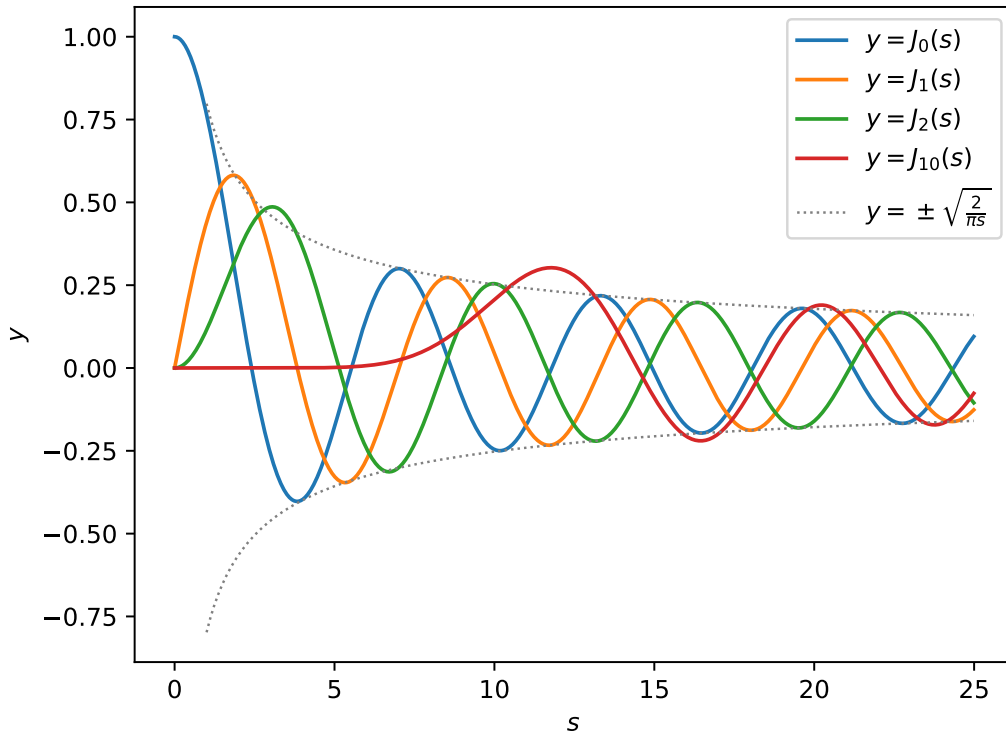


Figure 11.2: 第一类贝塞尔函数 $J_0(s)$, $J_1(s)$, $J_2(s)$, 和 $J_{10}(s)$ 。

柱函数积分引理: 设 Z_ν 为 ν 阶柱函数, $a, b > 0$, 则

$$\frac{d}{ds} \left[sZ_\nu(as) \frac{d}{ds} Z_\nu(bs) - sZ_\nu(bs) \frac{d}{ds} Z_\nu(as) \right] = (a^2 - b^2) s Z_\nu(as) Z_\nu(bs). \quad (11.66)$$

证明: 柱函数 Z_ν 满足贝塞尔方程:

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[x \frac{d}{dx} Z_\nu(x) \right] + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) Z_\nu(x) = 0. \quad (11.67)$$

把 x 换成 bs , 并且两边同乘以 b^2 即有

$$\frac{1}{s} \frac{d}{ds} \left[s \frac{d}{ds} Z_\nu(bs) \right] + \left(b^2 - \frac{\nu^2}{s^2} \right) Z_\nu(bs) = 0. \quad (11.68)$$

两边同乘以 $sZ_\nu(as)$, 得到

$$Z_\nu(as) \frac{d}{ds} \left[s \frac{d}{ds} Z_\nu(bs) \right] + \left(b^2 - \frac{\nu^2}{s^2} \right) s Z_\nu(bs) Z_\nu(as) = 0. \quad (11.69)$$

上述推导过程中如果交换 a 和 b , 就能得到

$$Z_\nu(bs) \frac{d}{ds} \left[s \frac{d}{ds} Z_\nu(as) \right] + \left(a^2 - \frac{\nu^2}{s^2} \right) s Z_\nu(as) Z_\nu(bs) = 0. \quad (11.70)$$

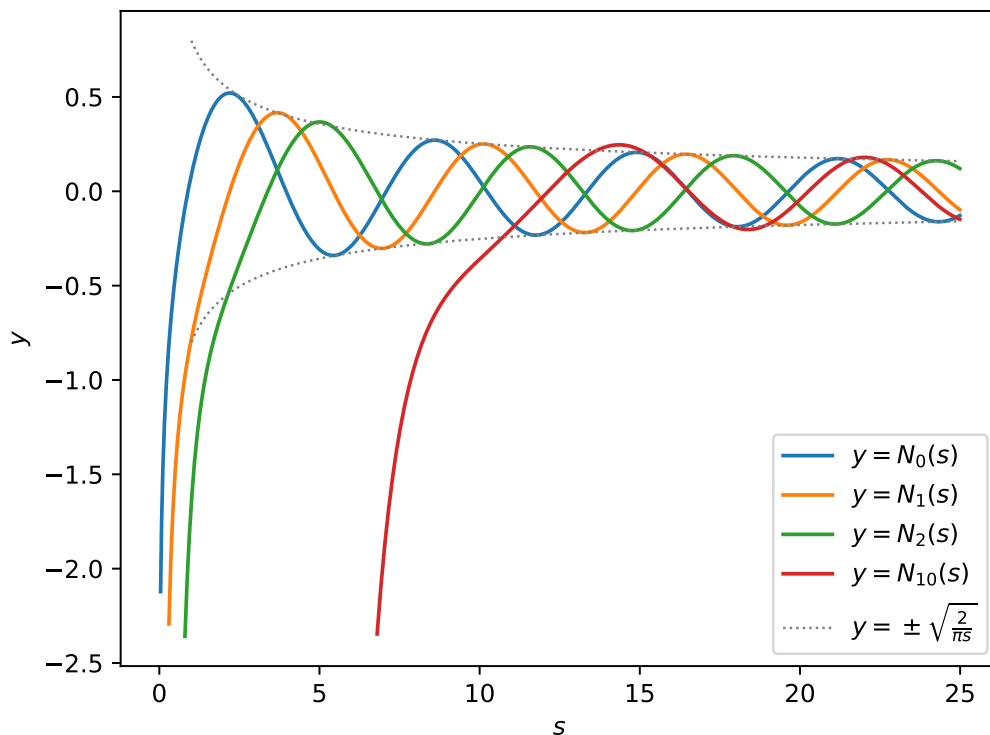


Figure 11.3: 第二类贝塞尔函数 $N_0(s)$, $N_1(s)$, $N_2(s)$, 和 $N_{10}(s)$ 。

(11.69)减去(11.70), 即得证。

下面我们依次介绍 J_ν 的三个积分定理:

第一类贝塞尔函数的第一正交定理: 设 $\nu > -1$, μ_i, μ_j 是 J_ν 从小到大排列的第 i 个和第 j 个正实数根, 则

$$\int_0^1 s J_\nu(\mu_i s) J_\nu(\mu_j s) ds = \delta_{ij} \frac{[J_{\nu+1}(\mu_i)]^2}{2}. \quad (11.71)$$

证明: 先考虑 $i \neq j$ 的情况。令柱函数积分引理(11.66)中的 $a = \mu_i, b = \mu_j$, 并两边从 0 到 1 进行积分。就有

$$0 = (\mu_i^2 - \mu_j^2) \int_0^1 s J_\nu(\mu_i s) J_\nu(\mu_j s) ds. \quad (11.72)$$

注意左边得出积分为零要用到 (11.46)。

于是显然 $\mu_i \neq \mu_j$ 时, $\int_0^1 s J_\nu(\mu_i s) J_\nu(\mu_j s) ds = 0$ 。再考虑 $i = j$ 的情况, 这时令柱函数积分引理(11.66)中的 $a = \mu_i + \varepsilon, b = \mu_i$, 并两边从 0 到 1 积分。保留到 ε 的一阶

小量, 有

$$\varepsilon \mu_i [J'_v(\mu_i)]^2 = 2\mu_i \varepsilon \int_0^1 s J_v(\mu_i s) J_v(\mu_j s) ds. \quad (11.73)$$

两边约去 ε , 有

$$\int_0^1 s J_v(\mu_i s) J_v(\mu_j s) ds = \delta_{ij} \frac{[J'_v(\mu_i)]^2}{2}. \quad (11.74)$$

利用递推公式(11.29), 可以得到 $J'_v(\mu_i) = -J_{v+1}(\mu_i)$ 。证毕。

第一类贝塞尔函数的第二正交定理: 设 $\nu > -1$, λ_i, λ_j 是 J_ν 从小到大排列的第 i 个和第 j 个正实数稳定点 (即 J'_ν 的正实数零点), 则

$$\int_0^1 s J_\nu(\lambda_i s) J_\nu(\lambda_j s) ds = \delta_{ij} \frac{\left(1 - \frac{\nu^2}{\lambda_i^2}\right) [J_\nu(\lambda_i)]^2}{2}. \quad (11.75)$$

在 $\nu = 0$ 时, 还允许取 λ_i, λ_j 为零, 这时右边的不定式 $\frac{\nu^2}{\lambda_i^2}$ 要取零值。

详细的过程和第一正交定理完全类似——除了最后要使用贝塞尔方程把 $J''_\nu(\lambda_i)$ 转化为 $-\left[1 - \frac{\nu^2}{\lambda_i^2}\right] J_\nu(\lambda_i)$ 。就留给读者去完成了。

对无穷大区域, 常用的是下面的

第一类贝塞尔函数的第三正交定理: 设 $\nu > -1$, $k_1, k_2 > 0$, 则

$$\int_0^\infty J_\nu(k_1 r) J_\nu(k_2 r) r dr = \frac{\delta(k_1 - k_2)}{k_1}. \quad (11.76)$$

证明: 设 J_ν 的所有正实数零点按照从小到大排列为 $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots$ 。

对实数 $\frac{k_1}{k_2}$, 总存在两个正整数序列: $p_1 < p_2 < p_3 < \dots$, $q_1 < q_2 < q_3 < \dots$, 使得当 $n \rightarrow \infty$, 分数 $\frac{p_n}{q_n}$ 无限逼近 $\frac{k_2}{k_1}$ 。

利用 (11.62), 可以知道当 N 很大时, J_ν 的第 N 个零点大致是 $N\pi$, 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_{p_n}}{\mu_{q_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \frac{k_2}{k_1}.$$

令 $R_n \equiv \frac{\mu_{q_n}}{k_1}$, $s \equiv \frac{r}{R_n}$, 则根据(11.71)有

$$\int_0^{R_n} J_\nu\left(\frac{\mu_{q_n}}{R_n} r\right) J_\nu\left(\frac{\mu_{p_n}}{R_n} r\right) r dr = R_n^2 \int_0^1 s J_\nu(\mu_{q_n} s) J_\nu(\mu_{p_n} s) ds = R_n^2 \delta_{p_n q_n} \frac{[J_{\nu+1}(\mu_{q_n})]^2}{2}. \quad (11.77)$$

注意到

$$k_1 = \frac{\mu_{q_n}}{R_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n \pi}{R_n}, \quad (11.78)$$

和

$$k_2 = \frac{\mu_{q_n} k_2}{R_n k_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n \pi p_n}{R_n q_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n \pi}{R_n}. \quad (11.79)$$

根据 δ 函数的复合函数规则(5.21), 有

$$\delta(k_1 - k_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n}{\pi} \delta_{p_n q_n}. \quad (11.80)$$

注意 $\delta_{p_n q_n}$ 的函数图像是宽为 1, 高为 1 的“单位面积脉冲”。经过复合函数的变换, 变成了高为 $\frac{R_n}{\pi} \rightarrow \infty$, 宽为 $\frac{\pi}{R_n}$ 的真正脉冲形状函数。

(11.80)也可以写成

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n^2}{\mu_{q_n}} \delta_{p_n q_n} = \pi \frac{\delta(k_1 - k_2)}{k_1}. \quad (11.81)$$

现在可以让(11.77)两边 $n \rightarrow \infty$, 得到

$$\int_0^\infty J_\nu(k_1 r) J_\nu(k_2 r) r dr = \frac{\pi}{2} \frac{\delta(k_1 - k_2)}{k_1} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{q_n} [J_{\nu+1}(\mu_{q_n})]^2. \quad (11.82)$$

最后利用渐近公式(11.62), 知道 $J_{\nu+1}$ 和 J_ν 相位相差 $\frac{\pi}{2}$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{q_n} [J_{\nu+1}(\mu_{q_n})]^2 = \frac{2}{\pi}$ 。于是命题得证。

对具体物理问题中的 J_ν 积分, 这一小节介绍的积分公式实际上可以用(11.3)更快地导出。我之所以如此大费周章, 是为了把结论推广到 $\nu > -1$ 的最一般情形。换句话说, 这(令你窒息的)整节都和是和解数理方程关系不大的次要情节。

11.2.6 整数阶第一类贝塞尔函数的特殊性质

整数阶的第一类贝塞尔函数 J_m ($m \in \mathbb{Z}$) 是全复平面上的解析函数, 所以在这一节中我将默认使用自变量 x (而不是 $s = kr \geq 0$)。

整数阶 J_m 具有一些独特的性质, 最为人所知的莫过于

整数阶第一类贝塞尔函数的积分表示: 设 m 为整数, 则

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} e^{i(x \sin \theta - m\theta)} d\theta. \quad (11.83)$$

这里的 a 可以是任意固定的复数。

证明：由于被积函数的周期为 2π ，显然当 a 的实部变化时右边积分不变。当 a 的虚部变化时，用柯西定理也可以验证积分不变。所以我们只要对任何一个特殊的 a 进行证明。下面我们选择 $a = -\pi$ 。

把 $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x \sin \theta - m\theta)} d\theta$ 进行泰勒展开，其 n 次系数为

$$c_n = \frac{1}{2\pi n!} \int_{-\pi}^{\pi} (i \sin \theta)^n e^{-im\theta} d\theta$$

转化为单位圆上的围道积分：

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi 2^n n!} \oint \left(z - \frac{1}{z}\right)^n \frac{1}{z^m} \frac{1}{iz} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^n k! (n-k)!} (-1)^k z^{n-2k-m-1} dz \end{aligned} \quad (11.84)$$

根据留数定理，仅有的非零项为 $c_{2k+m} = \frac{(-1)^k}{k!(m+k)! 2^{2k+m}}$ ，和 J_m 的级数定义相同。证毕。

把积分式右边用欧拉公式展开，发现虚部为奇函数，积分为零；而实部为偶函数。所以整数阶贝塞尔函数的积分表示还可以写成

$$J_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \theta - m\theta) d\theta. \quad (11.85)$$

贝塞尔函数的也可以看成带参数的函数展开式中的系数：

整数阶第一类贝塞尔函数的母函数公式：

$$e^{\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n. \quad (11.86)$$

证明：

$$\begin{aligned} e^{\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})} &= e^{\frac{xt}{2}} e^{-\frac{x}{2t}} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{xt}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{x}{2t}\right)^k \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \right) t^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n \end{aligned} \quad (11.87)$$

整数阶 J_m 的母函数公式和积分表示有非常紧密的联系。在母函数公式中令 $t = e^{i\theta}$, 即得到

$$e^{ix \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{in\theta}. \quad (11.88)$$

两边乘以 $e^{-im\theta}$ 并从 $-\pi$ 积分至 π , 即得到 J_m 的积分表示。

此外, (11.86) 中令 $x = kr$, $t = \pm i e^{i\theta}$ 就有

$$e^{\pm ikr \cos \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\pm i)^n J_n(kr) e^{in\theta}. \quad (11.89)$$

这个式子把平面直角坐标系的谐函数分解为了极坐标的谐函数的线性组合。对具有旋转对称性的量进行傅里叶变换或逆变换时, 可以考虑用(11.89)进行转换。

利用整数阶 J_m 的积分公式(11.85), 还能推导出 J_m 在无穷远处的渐近公式。当 x 很大时, $\cos(x \sin \theta - m\theta)$ 快速振荡, 对积分无贡献。唯一的例外是 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 附近, $\sin \theta$ 变化停滞, 积分贡献并不消失。令 $\theta = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$, 把 $\sin \theta$ 作二阶近似展开:

$$\begin{aligned} J_m(x) &\approx \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \left[x \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right) - \frac{m}{2} \pi \right] d\varepsilon \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[e^{-i\phi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ix}{2} \varepsilon^2} d\varepsilon \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \left[e^{-i\phi} \int_0^{\infty} e^{\frac{ix}{2} \varepsilon^2} d\varepsilon \right] \end{aligned} \quad (11.90)$$

其中 $\phi = x - \frac{m}{2} \pi$ 。在如图11.4的围道上积分 $\oint e^{\frac{ix}{2} \varepsilon^2} d\varepsilon$, 容易得到

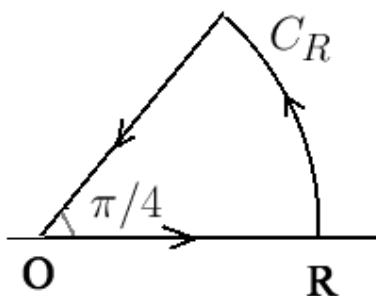


Figure 11.4: 推导 (11.91) 所用的围道

$$\int_0^{\infty} e^{\frac{ix}{2} \varepsilon^2} d\varepsilon = e^{\frac{\pi i}{4}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{2} \varepsilon^2} d\varepsilon = e^{\frac{\pi i}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}. \quad (11.91)$$

结合(11.90)和(11.91) 就可以得到 J_m 在无穷远处的渐近公式 (即 (11.62) 在 v 为整数 m 时的情况)。

对非整数 ν 的情况，实际上也存在一个积分公式并可以从之推导出任意阶 J_ν 在无穷远处的渐近公式 (11.62) (从而弥补我们尚未严格证明(11.62)的缺憾)。我们把这部分的讨论留到习题中。

例题 55: 计算任意非负整数阶贝塞尔函数的 $J_n(t)$ 的拉普拉斯变换 $F_n(p)$ 。

解答: 利用 J_n 的积分表示:

$$\begin{aligned} F_n(p) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dt \int_{-\pi}^\pi e^{i(t \sin \theta - n\theta) - pt} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \frac{e^{-in\theta}}{p - i \sin \theta} d\theta \end{aligned} \quad (11.92)$$

令 $e^{i\theta} = z$, 则 $d\theta = \frac{dz}{iz}$, 积分路径变成单位圆 $|z| = 1$:

$$\begin{aligned} F_n(p) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{z^{-n}}{p - \frac{z-z^{-1}}{2}} \frac{dz}{z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{2}{(2pz - z^2 + 1)z^n} dz \\ &= \text{Res} \left(\frac{2}{(2pz - z^2 + 1)z^n}, 0 \right) + \text{Res} \left(\frac{2}{(2pz - z^2 + 1)z^n}, \alpha \right) \end{aligned} \quad (11.93)$$

这里的 $\alpha = p - \sqrt{p^2 + 1}$, 它和 $\beta = p + \sqrt{p^2 + 1}$ 是 $2pz - z^2 + 1 = 0$ 的两个零点。注意到

$$\frac{2}{(2pz - z^2 + 1)z^n} = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} \frac{1}{z^n} \left(\frac{1}{z - \alpha} - \frac{1}{z - \beta} \right). \quad (11.94)$$

对 $n > 0$, $n = 0$ 分别进行讨论, 可以得到

$$F_n(p) = \frac{(\sqrt{p^2 + 1} - p)^n}{\sqrt{p^2 + 1}}, \quad n \geq 0. \quad (11.95)$$

11.3 极坐标系的数理方程

前面我们稍稍偏了一下题, 讨论了贝塞尔函数的一系列性质。现在言归正传, 回到数理方程的求解。先来看一个经典的圆形薄膜振动的例子。

例题 56: 考虑固定边界的, 半径为 R , 张力系数为 λ , 质量面密度为 σ 的均匀圆形薄膜的横向小振动问题。在 $t = 0$ 时刻的初始位移为 $A \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$ (其中 A 为常量, r 为距离圆盘中心的距离, $0 \leq r \leq R$), 初始速度为零。求解之后薄膜的振动。

解答：取极坐标系，设位移为 $u(r, \theta, t)$ ，写出方程和边界条件：

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u &= 0, \\ u|_{r=R} &= 0, \\ u|_{t=0} &= A \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= 0. \end{aligned} \quad (11.96)$$

这里的波速 $a = \sqrt{\frac{\lambda}{\sigma}}$ 。

我们知道圆盘内的谐函数为 $J_m(kr)[A \cos(m\theta) + B \sin(m\theta)]$ (m 为非负整数)。在这个问题里初始条件是旋转对称的（不依赖于 θ ），所以解也不依赖于 θ 。也就是说，只需要考虑 $m = 0$ 的谐函数¹，也就是

$$\psi \propto J_0(kr).$$

然后考虑边界条件：符合 $J_0(kR) = 0$ 的波数为

$$k_n = \frac{\mu_n}{R}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (11.97)$$

其中 μ_i 是 J_0 的第 i 个正实数根²。

为了计算谐函数的归一化系数，我们需要计算积分：

$$\int_{\Omega} [J_0(k_n r)]^2 dS. \quad (11.98)$$

这里的 Ω 表示 $r \leq R$ 的圆盘区域，面积元 $dS = r dr d\theta$ 。

虽然使用第一类贝塞尔函数的第一正交定理(11.71)可以很快解决问题，但是为了说明在一般情况下如何处理，我还是用普适的归一化定理(11.3)来计算这个积分。取圆盘内的 ∇^2 本征函数族为 $J_0(kr)$ ，根据(11.3)，并注意在边界 $r = R$ 上法向梯度算符是 $\frac{\partial}{\partial r}$ 以及“边界面积元”退化为线元 $dl = R d\theta$ ，就有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [J_0(kr)]^2 dS &= \frac{1}{2k} \int_0^{2\pi} \left[kR (J_0'(kR))^2 - kR J_0(kR) J_0''(kR) - J_0(kR) J_0'(kR) \right] R d\theta. \\ &= \pi R^2 \left[(J_0'(kR))^2 - J_0(kR) J_0''(kR) - \frac{J_0(kR) J_0'(kR)}{kR} \right] \end{aligned} \quad (11.99)$$

令 $k = k_n = \frac{\mu_n}{R}$ ，并注意到 $J_0(kR) = J_0(\mu_n) = 0$ ，以及 $J_0'(kR) = J_0'(\mu_n) = -J_1(\mu_n)$ （这里我用了递推公式(11.29)），即有

$$\int_{\Omega} [J_0(k_n r)]^2 dS = \pi R^2 [J_1(\mu_n)]^2. \quad (11.100)$$

¹根据初始条件的对称性排除 $m \neq 0$ 的谐函数这一步只是为了减小计算量，如果你愿意，你也可以留着对应 $m = 0, 1, 2, \dots$ 的所有谐函数。对 $m \neq 0$ 的谐函数计算展开系数时，你自然会得到零。

²如果你非要看见一些实际的数字才有真实感，我可以告诉你一些数值计算结果： $\mu_1 \approx 2.4048$ ， $\mu_2 \approx 5.5201$ ， $\mu_3 \approx 8.6537$ ， $\mu_4 \approx 11.7915$ ， $\mu_5 \approx 14.9309$ ，...

于是正交归一化的谐函数为

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{\pi R J_1(\mu_n)}} J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11.101)$$

令

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \psi_n. \quad (11.102)$$

利用初始位移, 得到

$$\begin{aligned} c_n(0) &= \int_{\Omega} A \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] \psi_n dS \\ &= \frac{A}{\sqrt{\pi R J_1(\mu_n)}} \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) \\ &= \frac{2\sqrt{\pi} A}{R J_1(\mu_n)} \int_0^R r dr \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) \\ &= \frac{2\sqrt{\pi} A R}{\mu_n^2 J_1(\mu_n)} \int_0^{\mu_n} x dx \left(1 - \frac{x^2}{\mu_n^2} \right) J_0(x) \\ &= \frac{2\sqrt{\pi} A R}{\mu_n^2 J_1(\mu_n)} \left[x J_1(x) \left(1 - \frac{x^2}{\mu_n^2} \right) + \frac{2}{\mu_n^2} x^2 J_2(x) \right] \Big|_0^{\mu_n} \\ &= \frac{4\sqrt{\pi} A R J_2(\mu_n)}{\mu_n^2 J_1(\mu_n)} \\ &= \frac{8\sqrt{\pi} A R}{\mu_n^3} \end{aligned} \quad (11.103)$$

在最后一步, 我们利用了递推公式(11.31), 即 $J_2(\mu_n) = J_0(\mu_n) + J_2(\mu_n) = \frac{2}{\mu_n} J_1(\mu_n)$ 。再利用初始速度得到 $c'_n(0) = 0$, 然后根据无源的波动方程的系数通解就可以得到

$$c_n(t) = \frac{8\sqrt{\pi} A R}{\mu_n^3} \cos \frac{\mu_n a t}{R}. \quad (11.104)$$

最后得到

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8A}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)} J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) \cos \frac{\mu_n a t}{R}. \quad (11.105)$$

思考题: (11.105) 中会不会发生某个分母中的 $J_1(\mu_n) = 0$ 的情况?

我们再来看一个热传导问题:

例题 57: 有孤立的, 半径为 R 的均匀圆形金属薄片。初态 $t = 0$ 时刻金属片上距离中心 r 处的温度为

$$T(r) = T_0 \left(1 + \frac{r^2}{R^2} \right).$$

已知金属片质量密度为 ρ , 导热系数为 λ , 单位质量比热为 c 。求 $t \geq 0$ 时圆盘上各点的温度。

解答: 写出方程, 边界条件和初始条件:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \nabla^2 T = 0, \quad (11.106)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = 0, \quad (11.107)$$

$$T|_{t=0} = T_0 \left(1 + \frac{r^2}{R^2} \right). \quad (11.108)$$

其中 $a = \frac{\lambda}{\rho c}$ 。容易积分算出金属片的平均温度为 $\frac{3}{2}T_0$ ——这也是金属片最后的稳定温度。为了避免对 $k = 0$ (即谐函数展开系数 $\propto e^{-ak^2t}$ 不会衰减) 情况的讨论, 我总是喜欢先把这个常数减掉。也就是令 $T = u + \frac{3}{2}T_0$ 。这样 u 和 T 满足相同的方程和边界条件, 但是不同的初始条件:

$$u|_{t=0} = T_0 \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{1}{2} \right). \quad (11.109)$$

和上个例题类似, 初始条件不依赖于 θ , 因此我们使用谐函数 $J_0(k_n r)$ 来对 u 进行展开。区别现在的边界条件不同, 对应的波数

$$k_n = \frac{\lambda_n}{R}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11.110)$$

其中 λ_i 是 J'_0 的第 i 个正实数零点³, 也就是 J_1 的第 i 个正实数零点。(这是因为根据递推公式(11.29)有 $J'_0 = -J_1$)。

为了计算谐函数的归一化系数, 在上一题给出的结论(11.99)中令 $k = k_n$, 并注意到 $J'_0(kR) = J'_0(\lambda_n) = 0$, 以及 $J''_0(kR) = J''_0(\lambda_n) = -J_0(\lambda_n)$ (这是根据 J_0 满足的贝塞尔方程以及 $J'_0(\lambda_n) = 0$ 得到的), 就有

$$\int_{\Omega} [J_0(k_n r)]^2 dS = \pi R^2 [J_0(\lambda_n)]^2. \quad (11.111)$$

这里的 Ω 表示 $r \leq R$ 的圆盘区域, 面积元 $dS = r dr d\theta$ 。

于是正交归一化的谐函数为

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{\pi R J_0(\lambda_n)}} J_0 \left(\frac{\lambda_n r}{R} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11.112)$$

³如果你喜欢看到一些具体的数字, 那么数值计算的结果为: $\lambda_1 = 3.8317$, $\lambda_2 = 7.0156$, $\lambda_3 = 10.1735$, $\lambda_4 = 13.3237$, $\lambda_5 = 16.4706, \dots$

令

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \psi_n. \quad (11.113)$$

根据初始条件(11.109)有

$$\begin{aligned} c_n(0) &= \int_{\Omega} T_0 \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{1}{2} \right) \psi_n dS \\ &= \frac{T_0}{\sqrt{\pi R} J_0(\lambda_n)} \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta J_0 \left(\frac{\lambda_n r}{R} \right) \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{2\sqrt{\pi} T_0}{R J_0(\lambda_n)} \int_0^R r dr J_0 \left(\frac{\lambda_n r}{R} \right) \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{2\sqrt{\pi} T_0 R}{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n)} \int_0^{\lambda_n} x J_0(x) \left(\frac{x^2}{\lambda_n^2} - \frac{1}{2} \right) dx \\ &= \frac{2\sqrt{\pi} T_0 R}{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n)} \left[x J_1(x) \left(\frac{x^2}{\lambda_n^2} - \frac{1}{2} \right) - \frac{2}{\lambda_n^2} x^2 J_2(x) \right] \Big|_0^{\lambda_n} \\ &= -\frac{4\sqrt{\pi} T_0 R}{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n)} J_2(\lambda_n) \\ &= \frac{4\sqrt{\pi} T_0 R}{\lambda_n^2} \end{aligned} \quad (11.114)$$

在最后一步我们利用了递推公式(11.31), 即 $J_2(\lambda_n) + J_0(\lambda_n) = \frac{2}{\lambda_n} J_1(\lambda_n) = 0$ 。

根据无源的热传导方程的谐函数展开系数通解, 有 $c_n(t) = c_n(0) e^{-a\lambda_n^2 t}$, 于是最后

$$u = 4T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n)} J_0 \left(\frac{\lambda_n r}{R} \right) e^{-\frac{a\lambda_n^2 t}{R^2}}. \quad (11.115)$$

也就是

$$T = \left[\frac{3}{2} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n)} J_0 \left(\frac{\lambda_n r}{R} \right) e^{-\frac{a\lambda_n^2 t}{R^2}} \right] T_0. \quad (11.116)$$

有趣的是, 令 $r = R$, $t = 0$, 可以得到:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} = \frac{1}{8}. \quad (11.117)$$

其实任意阶贝塞尔函数的正实数零点(或者正实数极值点)的平方倒数之和、四次方倒数之和、六次方倒数之和等都有简捷的算法, 由于和本书主题无关就不详细介绍了, 有兴趣的读者可以自己思考一下。

我们再来看一个涉及非整数阶贝塞尔函数的例子。

例题 58: 求解一个张角为 α ($0 < \alpha < 2\pi$), 半径为 R , 边界固定的均匀扇形薄膜的横向小振动。设薄膜的张力系数为 λ , 面质量密度为 σ ; 初始的横向位移和初始速度均已知。

解答: 建立极坐标系 (r, θ) 使得薄膜所在区域 Ω 为 $0 \leq \theta \leq \alpha; 0 \leq r \leq R$, 写出方程、边界条件和初始条件:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u = 0, \quad (11.118)$$

$$u|_{\theta=0} = 0, \quad (11.119)$$

$$u|_{\theta=\alpha} = 0, \quad (11.120)$$

$$u|_{r=R} = 0, \quad (11.121)$$

$$u|_{t=0} = f(r, \theta), \quad (11.122)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g(r, \theta). \quad (11.123)$$

这里的 $a = \sqrt{\frac{\lambda}{\sigma}}$, $f(r, \theta)$ 和 $g(r, \theta)$ 均为已知函数。

区域内的谐函数具有 $J_\nu(kr)[A \cos(\nu\theta) + B \sin(\nu\theta)]$ ($\nu \geq 0$) 的形式。根据边界条件 (11.119) 和 (11.120), 可以进一步确定谐函数具有 $\propto J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(kr) \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha}$ 的形式。然后根据边界条件 (11.121) 可以确定谐函数具有

$$\propto J_{\frac{n\pi}{\alpha}}\left(\frac{\mu_{nm}r}{R}\right) \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha}, \quad n, m = 1, 2, 3, \dots \quad (11.124)$$

的形式, 这里 μ_{nm} 是 $J_{\frac{n\pi}{\alpha}}$ 的第 m 个正实数零点, 对应的波数 $k = \frac{\mu_{nm}}{R}$ 。

为了确定归一化系数, 我们对 ∇^2 的本征函数族 $J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(kr) \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha}$ 应用归一化定理 (11.3), 有

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(kr) \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha} \right]^2 dS \\ &= \frac{1}{2k} \int_0^\alpha kR \left\{ \left[J'_{\frac{n\pi}{\alpha}}(kR) \right]^2 - J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(kR) J''_{\frac{n\pi}{\alpha}}(kR) - \frac{J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(kR) J'_{\frac{n\pi}{\alpha}}(kR)}{kR} \right\} \sin^2 \frac{n\pi\theta}{\alpha} R d\theta \\ &= \frac{\alpha R^2}{4} \left\{ \left[J'_{\frac{n\pi}{\alpha}}(kR) \right]^2 - J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(kR) J''_{\frac{n\pi}{\alpha}}(kR) - \frac{J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(kR) J'_{\frac{n\pi}{\alpha}}(kR)}{kR} \right\} \end{aligned} \quad (11.125)$$

注意在上述计算中, 扇形的两条直边上被积函数都为零所以没有写出来。

现在令(11.125)中的 $k = \frac{\mu_{nm}}{R}$, 并考虑到 $J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(kR) = J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\mu_{nm}) = 0$, 就有

$$\int_{\Omega} \left[J_{\frac{n\pi}{\alpha}}\left(\frac{\mu_{nm}r}{R}\right) \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha} \right]^2 dS = \frac{\alpha R^2}{4} \left[J'_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\mu_{nm}) \right]^2 \quad (11.126)$$

利用递推公式 (11.29) 并考虑到 $J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\mu_{nm}) = 0$, 就可得出

$$J'_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\mu_{nm}) = -J_{\frac{n\pi}{\alpha}+1}(\mu_{nm}). \quad (11.127)$$

于是

$$\int_{\Omega} \left[J_{\frac{n\pi}{\alpha}} \left(\frac{\mu_{nm}r}{R} \right) \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha} \right]^2 dS = \frac{\alpha R^2}{4} \left[J_{\frac{n\pi}{\alpha}+1}(\mu_{nm}) \right]^2 \quad (11.128)$$

(当然, 你也可以用第一类贝塞尔函数的第一正交定理得到这个结果)

于是正交归一化的谐函数

$$\psi_{nm}(r, \theta) = \frac{2}{\sqrt{\alpha R} J_{\frac{n\pi}{\alpha}+1}(\mu_{nm})} J_{\frac{n\pi}{\alpha}} \left(\frac{\mu_{nm}r}{R} \right) \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha}. \quad (11.129)$$

于是根据无源的波动方程的谐函数展开系数的通解, 可以写出:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_{nm} \cos \frac{a\mu_{nm}t}{R} + B_{nm} \sin \frac{a\mu_{nm}t}{R} \right) \psi_{nm} \quad (11.130)$$

根据初始条件可以确定

$$A_{nm} = \int_{\Omega} f \psi_{nm} dS; \quad B_{nm} = \frac{R}{a\mu_{nm}} \int_{\Omega} g \psi_{nm} dS. \quad (11.131)$$

再看涉及第二类贝塞尔函数的一个问题。

例题 59: 如图 11.5, 一根外半径为 R_{out} , 内半径为 R_{in} 的无限长的均匀材质空心圆柱。外表面和温度为 T_0 的热库接触。在 $t = 0$ 时刻空心圆柱处于热平衡, 温度为 T_0 。在 $t > 0$ 时, 从内表面处处都注入热流 j 。已知材质的导热系数为 λ , 质量密度为 ρ , 单位质量比热为 c 。计算该空心圆柱各处的温度。

解答: 取空心圆柱的圆心建立 $r-\theta$ 极坐标系 (实际是柱坐标系, 但因为 z 方向的对称性, 所以只要考虑一个圆环截面上的温度)。温度 $T(r, t)$ (根据对称性, 显然 T 不依赖于 θ) 满足:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a\nabla^2 T = 0, \quad (11.132)$$

$$T|_{r=R_{\text{out}}} = T_0, \quad (11.133)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_{\text{in}}} = -\frac{j}{\lambda}, \quad (11.134)$$

$$T|_{t=0} = T_0. \quad (11.135)$$

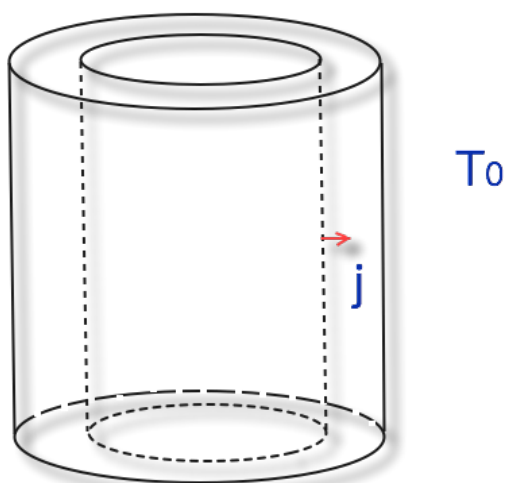


Figure 11.5: 例题 59 图

其中 $a = \frac{\lambda}{\rho c}$.

我们先来求稳态解（如果存在的话）。

当达到温度梯度不再变化的稳恒状态时，因为外表面温度已经固定，所有位置的温度将保持恒定。那么流入的热流将不再积累，直接穿过空心圆柱流出外表面。这时，根据能量守恒，距离中心轴为 r 处的热流为

$$\frac{j(2\pi R_{\text{in}})}{2\pi r}, \quad (11.136)$$

即

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{jR_{\text{in}}}{\lambda r}. \quad (11.137)$$

对 r 积分，并利用(11.133)，求出稳态解：

$$T|_{t \rightarrow \infty} = T_0 - \frac{jR_{\text{in}}}{\lambda} \ln \frac{r}{R_{\text{out}}}. \quad (11.138)$$

设

$$T(r, t) = T_0 - \frac{jR_{\text{in}}}{\lambda} \ln \frac{r}{R_{\text{out}}} + u(r, t). \quad (11.139)$$

则 u 满足

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - a\nabla^2 u &= 0, \\ u|_{r=R_{\text{out}}} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R_{\text{in}}} &= 0, \\ u|_{t=0} &= \frac{jR_{\text{in}}}{\lambda} \ln \frac{r}{R_{\text{out}}}. \end{aligned} \quad (11.140)$$

现在是标准的零边界条件问题了。在环形区域 Ω (满足 $R_{\text{in}} \leq r \leq R_{\text{out}}$ 的区域) 内, 满足和 θ 无关的的谐函数是 $AJ_0(kr) + BN_0(kr)$ 。两个边界条件为

$$AJ_0(kR_{\text{out}}) + BN_0(kR_{\text{out}}) = 0, \quad (11.141)$$

$$AJ'_0(kR_{\text{in}}) + BN'_0(kR_{\text{in}}) = 0. \quad (11.142)$$

也就是允许的波数为

$$N_0(kR_{\text{out}})J'_0(kR_{\text{in}}) = J_0(kR_{\text{out}})N'_0(kR_{\text{in}}), \quad (11.143)$$

的所有正实数解 k_1, k_2, k_3, \dots 。

这样, 满足对称性和边界条件的谐函数

$$\psi_n \propto [N_0(k_n R_{\text{out}})J_0(k_n r) - J_0(k_n R_{\text{out}})N_0(k_n r)], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11.144)$$

为了求出归一化系数, 考虑 ∇^2 的本征函数族 $Z_0(kr)$, 这里的柱函数

$$Z_0(s) \equiv N_0(k_n R_{\text{out}})J_0(s) - J_0(k_n R_{\text{out}})N_0(s), \quad (11.145)$$

对本征函数族 $Z_0(kr)$ 应用归一化定理 (11.3), 有

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [Z_0(kr)]^2 dS \\ &= \frac{1}{2k} \int_0^{2\pi} kR_{\text{out}} \left\{ [Z'_0(kR_{\text{out}})]^2 - Z_0(kR_{\text{out}})Z''_0(kR_{\text{out}}) - \frac{Z_0(kR_{\text{out}})Z'_0(kR_{\text{out}})}{kR_{\text{out}}} \right\} R_{\text{out}} d\theta \\ & \quad - \frac{1}{2k} \int_0^{2\pi} kR_{\text{in}} \left\{ [Z'_0(kR_{\text{in}})]^2 - Z_0(kR_{\text{in}})Z''_0(kR_{\text{in}}) - \frac{Z_0(kR_{\text{in}})Z'_0(kR_{\text{in}})}{kR_{\text{in}}} \right\} R_{\text{in}} d\theta \\ &= \pi R_{\text{out}}^2 \left\{ [Z'_0(kR_{\text{out}})]^2 - Z_0(kR_{\text{out}})Z''_0(kR_{\text{out}}) - \frac{Z_0(kR_{\text{out}})Z'_0(kR_{\text{out}})}{kR_{\text{out}}} \right\} \\ & \quad - \pi R_{\text{in}}^2 \left\{ [Z'_0(kR_{\text{in}})]^2 - Z_0(kR_{\text{in}})Z''_0(kR_{\text{in}}) - \frac{Z_0(kR_{\text{in}})Z'_0(kR_{\text{in}})}{kR_{\text{in}}} \right\} \quad (11.146) \end{aligned}$$

令 $k = k_n$, 并注意到 $Z_0(k_n R_{\text{out}}) = 0$ (按 Z_0 定义), $Z'_0(k_n R_{\text{in}}) = 0$ (按(11.143)要求), 以及根据贝塞尔方程:

$$Z''_0(kR_{\text{in}}) + \frac{1}{kR_{\text{in}}} Z'_0(kR_{\text{in}}) + Z_0(kR_{\text{in}}) = 0$$

结合 $Z'_0(k_n R_{in}) = 0$ 就可以得到的 $Z''_0(k R_{in}) = -Z_0(k_n R_{in})$, (11.146) 就成为

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} [\mathbf{N}_0(k_n R_{out}) \mathbf{J}_0(k_n r) - \mathbf{J}_0(k_n R_{out}) \mathbf{N}_0(k_n r)]^2 dS \\
&= \pi R_{out}^2 [Z'_0(k_n R_{out})]^2 - \pi R_{in}^2 [Z_0(k_n R_{in})]^2 \\
&= \pi R_{out}^2 [\mathbf{N}_0(k_n R_{out}) \mathbf{J}'_0(k_n R_{out}) - \mathbf{J}_0(k_n R_{out}) \mathbf{N}'_0(k_n R_{out})]^2 \\
&\quad - \pi R_{in}^2 [\mathbf{N}_0(k_n R_{out}) \mathbf{J}_0(k_n R_{in}) - \mathbf{J}_0(k_n R_{out}) \mathbf{N}_0(k_n R_{in})]^2 \\
&= \frac{4}{\pi k_n^2} - \pi R_{in}^2 \left(\frac{\mathbf{J}_0(k_n R_{out})}{\mathbf{J}'_0(k_n R_{in})} \right)^2 [\mathbf{N}'_0(k_n R_{in}) \mathbf{J}_0(k_n R_{in}) - \mathbf{J}'_0(k_n R_{in}) \mathbf{N}_0(k_n R_{in})]^2 \\
&= \frac{4}{\pi k_n^2} \left[1 - \left(\frac{\mathbf{J}_0(k_n R_{out})}{\mathbf{J}'_0(k_n R_{in})} \right)^2 \right] \\
&= \frac{4}{\pi k_n^2} \left[1 - \left(\frac{\mathbf{J}_0(k_n R_{out})}{\mathbf{J}_1(k_n R_{in})} \right)^2 \right] \tag{11.147}
\end{aligned}$$

在上述计算过程中我们用到了朗斯基行列式(11.52), k_n 满足的方程(11.143), 以及贝塞尔函数的递推公式 $\mathbf{J}'_0 = -\mathbf{J}_1$ (见(11.29))。

于是谐函数为

$$\psi_n = \mathcal{N}_n [\mathbf{N}_0(k_n R_{out}) \mathbf{J}_0(k_n r) - \mathbf{J}_0(k_n R_{out}) \mathbf{N}_0(k_n r)], \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{11.148}$$

这里的归一化系数 \mathcal{N}_n 满足

$$\mathcal{N}_n^2 = \frac{\pi k_n^2}{4 \left[1 - \left(\frac{\mathbf{J}_0(k_n R_{out})}{\mathbf{J}_1(k_n R_{in})} \right)^2 \right]}. \tag{11.149}$$

令

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \psi_n. \tag{11.150}$$

或者说, 其实可以直接按照无源的热传导方程谐函数展开系数的通解写出

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) e^{-ak_n^2 t} \psi_n. \tag{11.151}$$

这里的 $c_n(0)$ 根据初始条件确定:

$$\begin{aligned}
c_n(0) &= \int_{\Omega} \left(\frac{j R_{in}}{\lambda} \ln \frac{r}{R_{out}} \right) \psi_n dS \\
&= \int_{R_{in}}^{R_{out}} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \mathcal{N}_n [\mathbf{N}_0(k_n R_{out}) \mathbf{J}_0(k_n r) - \mathbf{J}_0(k_n R_{out}) \mathbf{N}_0(k_n r)] \frac{j R_{in}}{\lambda} \ln \frac{r}{R_{out}} \\
&= \frac{2\pi j R_{in} \mathcal{N}_n}{\lambda} \int_{R_{in}}^{R_{out}} [\mathbf{N}_0(k_n R_{out}) \mathbf{J}_0(k_n r) - \mathbf{J}_0(k_n R_{out}) \mathbf{N}_0(k_n r)] \left(\ln \frac{r}{R_{out}} \right) r dr \\
&= \frac{2\pi j R_{in} \mathcal{N}_n}{k_n^2 \lambda} \int_{k_n R_{in}}^{k_n R_{out}} [\mathbf{N}_0(k_n R_{out}) \mathbf{J}_0(x) - \mathbf{J}_0(k_n R_{out}) \mathbf{N}_0(x)] \left(\ln \frac{x}{k_n R_{out}} \right) x dx
\end{aligned}$$

其中被积分函数 $[N_0(k_n R_{\text{out}}) J_0(x) - J_0(k_n R_{\text{out}}) N_0(x)] \left(\ln \frac{x}{k_n R_{\text{out}}} \right) x$ 存在原函数

$$F(x) \equiv N_0(k_n R_{\text{out}}) J_0(x) - J_0(k_n R_{\text{out}}) N_0(x) + x [N_0(k_n R_{\text{out}}) J_1(x) - J_0(k_n R_{\text{out}}) N_1(x)] \ln \frac{x}{k_n R_{\text{out}}}. \quad (11.152)$$

或者根据 $J_1(x) = -J_0'(x)$, 还可以写成

$$F(x) \equiv N_0(k_n R_{\text{out}}) J_0(x) - J_0(k_n R_{\text{out}}) N_0(x) + x [J_0(k_n R_{\text{out}}) N_0'(x) - N_0(k_n R_{\text{out}}) J_0'(x)] \ln \frac{x}{k_n R_{\text{out}}}. \quad (11.153)$$

于是利用(11.143), 就有

$$F(k_n R_{\text{in}}) = N_0(k_n R_{\text{out}}) J_0(k_n R_{\text{in}}) - J_0(k_n R_{\text{out}}) N_0(k_n R_{\text{in}}), \quad (11.154)$$

以及显然的

$$F(k_n R_{\text{out}}) = 0. \quad (11.155)$$

这样

$$c_n(0) = \frac{2\pi j R_{\text{in}} \mathcal{N}_n}{k_n^2 \lambda} [F(k_n R_{\text{out}}) - F(k_n R_{\text{in}})] = \frac{2\pi j R_{\text{in}} \mathcal{N}_n}{k_n^2 \lambda} [J_0(k_n R_{\text{out}}) N_0(k_n R_{\text{in}}) - N_0(k_n R_{\text{out}}) J_0(k_n R_{\text{in}})] \quad (11.156)$$

最后全部写到一起的表达式是:

$$\begin{aligned} T(r, t) = & T_0 - \frac{j R_{\text{in}}}{\lambda} \ln \frac{r}{R_{\text{out}}} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2 j R_{\text{in}} [J_1(k_n R_{\text{in}})]^2 [J_0(k_n R_{\text{out}}) N_0(k_n R_{\text{in}}) - N_0(k_n R_{\text{out}}) J_0(k_n R_{\text{in}})]}{2\lambda \left\{ [J_1(k_n R_{\text{in}})]^2 - [J_0(k_n R_{\text{out}})]^2 \right\}} \\ & \times e^{-ak_n^2 t} [N_0(k_n R_{\text{out}}) J_0(k_n r) - J_0(k_n R_{\text{out}}) N_0(k_n r)] \end{aligned} \quad (11.157)$$

在上面这个例子中, 我们必须把 $AJ_0(kr) + BN_0(kr)$ 看成一个整体来处理, 而不能分别给 $J_0(kr)$ 和 $N_0(kr)$ 配上独立的随时间演化的系数。这是因为无论是单独的 $J_0(kr)$ 还是单独的 $N_0(kr)$ 都无法满足全部的零边界条件, 因此并不算是独立的谐函数。

再进一步思考, 如果初始条件并不具有旋转对称性, 那么所有形如

$$[AJ_m(kr) + BN_m(kr)] [C \cos(m\theta) + D \sin(m\theta)], \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (11.158)$$

的谐函数都有可能出现。这时候，边界条件只能用于确定 A, B 的比例，而无法确定 C, D 的比例，该如何处理呢？其实，你大可不必惊慌。之所以边界条件无法确定 C, D 的比例，是因为 $\cos(m\theta)$ 和 $\sin(m\theta)$ 都分别独立地满足（周期性）边界条件，也就是说，其实你可以把

$$[AJ_m(kr) + BN_m(kr)] \cos(m\theta)$$

和

$$[AJ_m(kr) + BN_m(kr)] \sin(m\theta)$$

当成两个独立的谐函数成分，分别给它们配上依赖于时间的系数就可以了。当然，我们是人为地选取 $\cos(m\theta)$ 和 $\sin(m\theta)$ 这两个满足周期性边界条件、而且在 $[0, 2\pi)$ 互相正交的函数。但是，一定要注意这种选取方式并不唯一（本质上是因为当本征值简并时，对应同一本征值的本征矢构成一个线性子空间，在里面选取正交的本征矢具有很大的任意性）。例如，我也可以选取

$$[AJ_m(kr) + BN_m(kr)] [\cos(m\theta) + \sin(m\theta)]$$

和

$$[AJ_m(kr) + BN_m(kr)] [\cos(m\theta) - \sin(m\theta)]$$

作为两个独立的谐函数。当然，这看起来有点自找麻烦。更为常用的一种选择是选取

$$[AJ_m(kr) + BN_m(kr)] e^{im\theta}$$

和

$$[AJ_m(kr) + BN_m(kr)] e^{-im\theta}$$

作为两个独立的谐函数——这时候一定要注意使用复内积，否则这两个函数将不具有正交性。另外， $m = 0$ 时，

$$[AJ_m(kr) + BN_m(kr)] e^{\pm im\theta}$$

将退化为同一个函数。不过，这并不是哪里出了问题：本来 $m = 0$ 时，在(11.158)中也只有 $\cos(m\theta)$ 对应一个谐函数，恒为零的 $\sin(m\theta)$ 并不需要考虑。你可能还是有点疑惑，用 $e^{\pm im\theta}$ 比淳朴地使用 $\cos(m\theta)$ 和 $\sin(m\theta)$ （除了能够秀复变函数知识之外）到底好在哪里？这里的好处在于，我可以放开 $m \geq 0$ 的限制，直接统一用一个表达式

$$[AJ_m(kr) + BN_m(kr)] e^{im\theta}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (11.159)$$

来覆盖所有的谐函数⁴。这样，你计算系数时就不必很麻烦地分 $\cos(m\theta)$ 和 $\sin(m\theta)$ 两种情况讨论了。

请看下面的例子：

例题 60: 在极坐标 (r, θ) 内，求解满足 $R_{\text{in}} \leq r \leq R_{\text{out}}$ 的环形区域 Ω 内的波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a\nabla^2 u = 0, \quad (11.160)$$

$$u|_{r=R_{\text{in}}} = 0, \quad (11.161)$$

$$u|_{r=R_{\text{out}}} = 0, \quad (11.162)$$

$$u|_{t=0} = f(r, \theta), \quad (11.163)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g(r, \theta). \quad (11.164)$$

这里的 f, g 均为已知函数，且对区域内任意 r, θ 满足 $f(r, \theta + 2\pi) = f(r, \theta), g(r, \theta + 2\pi) = g(r, \theta)$ 。

解答: 满足边界条件的谐函数具有 $[AJ_m(kr) + BN_m(kr)] \cos(m\theta)$ 和 $[AJ_m(kr) + BN_m(kr)] \sin(m\theta)$ 的形式。根据边界条件，这里的 $k > 0$ 必须满足

$$AJ_m(kR_{\text{in}}) + BN_m(kR_{\text{in}}) = 0, \quad (11.165)$$

$$AJ_m(kR_{\text{out}}) + BN_m(kR_{\text{out}}) = 0, \quad (11.166)$$

要使非零解 (A, B) 存在，就有

$$J_m(kR_{\text{in}})N_m(kR_{\text{out}}) = J_m(kR_{\text{out}})N_m(kR_{\text{in}}). \quad (11.167)$$

我们把方程(11.167)的所有正实数解记作 $k_{m1}, k_{m2}, k_{m3}, \dots$ ，这样，我们考虑的(未归一化的)谐函数为

$$[N_m(k_{mn}R_{\text{out}})J_m(k_{mn}r) - J_m(k_{mn}R_{\text{out}})N_m(k_{mn}r)] \cos(m\theta), \quad m = 0, 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots$$

和

$$[N_m(k_{mn}R_{\text{out}})J_m(k_{mn}r) - J_m(k_{mn}R_{\text{out}})N_m(k_{mn}r)] \sin(m\theta), \quad m = 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots$$

不过，这样计算系数时还要分类讨论，书写起来有些麻烦。所以我决定采用

$$\Psi_{mn}(r, \theta) \equiv \mathcal{N}_{mn} [N_m(k_{mn}R_{\text{out}})J_m(k_{mn}r) - J_m(k_{mn}R_{\text{out}})N_m(k_{mn}r)] e^{im\theta}, \quad m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+.$$

⁴由于 $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$ 和 $N_{-m}(x) = (-1)^m N_m(x)$ ，所以当你把 J_m 和 N_m 中的指标 $-m$ 换成 m 时，至多带来一个常数因子。

(11.168)

的形式，这里的 \mathcal{N}_{mn} 是待定的归一化系数。注意现在我允许 m 取负整数值。这组谐函数在复内积的意义下是正交的：

$$\int_{R_{\text{in}}}^{R_{\text{out}}} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \Psi_{mn}^*(r, \theta) \Psi_{m'n'}(r, \theta) = \delta_{mm'} \delta_{nn'}. \quad (11.169)$$

其中当 $m \neq m'$ ，正交性可以直接对 θ 积分验证；当 $m = m'$ 但 $n \neq n'$ 时，正交性是由谐函数正交定理直接保证的。

当 $m = m'$ 且 $n = n'$ 时，我们可以利用 (11.169) 来计算归一化因子 \mathcal{N}_{mn} 。

对固定的 m, n ，定义柱函数

$$Z_m(x) \equiv N_m(k_{mn}R_{\text{out}}) J_m(x) - J_m(k_{mn}R_{\text{out}}) N_m(x). \quad (11.170)$$

取 ∇^2 的本征函数族为 $Z_m(kr)e^{im\theta}$ ，根据复内积版本的归一化定理 (11.8)，有

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |Z_m(kr)|^2 dS \\ &= \frac{1}{2k} \int_0^{2\pi} kR_{\text{out}} \left\{ [Z'_m(kR_{\text{out}})]^2 - Z_m(kR_{\text{out}})Z''_m(kR_{\text{out}}) - \frac{Z_m(kR_{\text{out}})Z'_m(kR_{\text{out}})}{kR_{\text{out}}} \right\} R_{\text{out}} d\theta \\ & \quad - \frac{1}{2k} \int_0^{2\pi} kR_{\text{in}} \left\{ [Z'_m(kR_{\text{in}})]^2 - Z_m(kR_{\text{in}})Z''_m(kR_{\text{in}}) - \frac{Z_m(kR_{\text{in}})Z'_m(kR_{\text{in}})}{kR_{\text{in}}} \right\} R_{\text{in}} d\theta \\ &= \pi R_{\text{out}}^2 \left\{ [Z'_m(kR_{\text{out}})]^2 - Z_m(kR_{\text{out}})Z''_m(kR_{\text{out}}) - \frac{Z_m(kR_{\text{out}})Z'_m(kR_{\text{out}})}{kR_{\text{out}}} \right\} \\ & \quad - \pi R_{\text{in}}^2 \left\{ [Z'_m(kR_{\text{in}})]^2 - Z_m(kR_{\text{in}})Z''_m(kR_{\text{in}}) - \frac{Z_m(kR_{\text{in}})Z'_m(kR_{\text{in}})}{kR_{\text{in}}} \right\} \end{aligned} \quad (11.171)$$

令 $k = k_{mn}$ ，则根据 Z_m 的定义有 $Z_m(kR_{\text{out}}) = 0$ 以及根据 k_{mn} 满足的方程 (11.167) 有 $Z_m(kR_{\text{in}}) = 0$ ，(11.171) 成为

$$\int_{\Omega} |Z_m(k_{mn}r)|^2 dS = \pi R_{\text{out}}^2 [Z'_m(k_{mn}R_{\text{out}})]^2 - \pi R_{\text{in}}^2 [Z'_m(k_{mn}R_{\text{in}})]^2. \quad (11.172)$$

由此可以得到 Ψ_{mn} 的归一化系数

$$\mathcal{N}_{mn} = \frac{1}{\sqrt{\pi R_{\text{out}}^2 [Z'_m(k_{mn}R_{\text{out}})]^2 - \pi R_{\text{in}}^2 [Z'_m(k_{mn}R_{\text{in}})]^2}}. \quad (11.173)$$

根据无源的波动方程谐函数展开系数的通解，就有

$$u(r, \theta, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [A_{mn} \cos(ak_{mn}t) + B_{mn} \sin(ak_{mn}t)] \Psi_{mn}(r, \theta). \quad (11.174)$$

其中 A_{mn}, B_{mn} 是待定系数。根据初始条件可以得到

$$f(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \Psi_{mn}(r, \theta). \quad (11.175)$$

以及

$$g(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} ak_{mn} B_{mn} \Psi_{mn}(r, \theta). \quad (11.176)$$

于是由谐函数的正交归一化特点, 有

$$A_{mn} = \int_{\Omega} \Psi_{mn}^*(r, \theta) f(r, \theta) dS. \quad (11.177)$$

和

$$B_{mn} = \frac{1}{ak_{mn}} \int_{\Omega} \Psi_{mn}^*(r, \theta) g(r, \theta) dS. \quad (11.178)$$

11.4 柱坐标系的谐函数和数理方程

在柱坐标系 (r, θ, z) 中, 谐函数方程是

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -k^2 \psi. \quad (11.179)$$

当零边界条件可以写成单坐标的零边界条件时, 我们仍然可以通过直接构造的方式写出柱坐标系的谐函数:

柱坐标系的谐函数通解:

$$\psi = [AJ_{\nu}(k_{2D}r) + BN_{\nu}(k_{2D}r)] [C \cos(\nu\theta) + D \sin(\nu\theta)] [E \cos(k_z z) + F \sin(k_z z)], \quad (11.180)$$

这里 $\nu \geq 0; k_z \geq 0; k_{2D} \geq 0; A, B, C, D, E, F$ 为待定系数。当区域包含 $r = 0$ 时 (实心圆柱或者扇柱), 要去掉 N_{ν} 的项, 即 B 必须为零。当 θ 可以取到任意值 (圆柱或者空心圆柱) 时, ν 必须取非负整数值。

谐函数的波数 k 满足

$$k^2 = k_{2D}^2 + k_z^2. \quad (11.181)$$

我们用一个例题来展示上述谐函数的应用:

例题 61: 一个半径为 R , 高为 h 的均匀金属圆柱体, 其热传导方程参数为 a 。一开始金属块的温度为 T_0 , 在 $t = 0$ 时刻把金属块放入温度为 $2T_0$ 的热库中, 计算之后金属块的温度变化。

解答：建立柱坐标系 (r, θ, z) 使得金属块所在区域 Ω 的坐标范围为 $0 \leq r \leq R$, $0 \leq z \leq h$ 。显然金属块的温度 T 和 θ 无关。令 $u(r, z, t) = T(r, z, t) - 2T_0$ 。则 u 满足

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\nabla^2 u = 0, \quad (11.182)$$

$$u|_{r=R} = 0 \quad (11.183)$$

$$u|_{z=0} = 0 \quad (11.184)$$

$$u|_{z=h} = 0 \quad (11.185)$$

$$u|_{t=0} = -T_0 \quad (11.186)$$

考虑到对称性以及边界条件，选取的谐函数

$$\psi_{nm} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi h R J_1(\mu_n)}} J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) \sin \frac{m\pi z}{h}, \quad n, m = 1, 2, 3, \dots \quad (11.187)$$

这里的 μ_n 是 J_0 的第 n 个正实数零点。对应的波数 k 满足

$$k^2 = \frac{\mu_n^2}{R^2} + \frac{m^2 \pi^2}{h^2}. \quad (11.188)$$

而且我悄悄偷了个懒，直接用第一类贝塞尔函数的第一正交定理(11.71)给出了归一化系数。

根据无源的热传导方程的谐函数展开系数 $c_{nm}(t)$ 的通解，可以令

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm}(0) e^{-a\left(\frac{\mu_n^2}{R^2} + \frac{m^2 \pi^2}{h^2}\right)t} \psi_{nm}. \quad (11.189)$$

利用初始条件，这里的

$$\begin{aligned} c_{nm}(0) &= \int_{\Omega} (-T_0) \psi_{nm} dV \\ &= -\frac{\sqrt{2}T_0}{\sqrt{\pi h R J_1(\mu_n)}} \int_0^R (2\pi r) dr \int_0^h dz J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) \sin \frac{m\pi z}{h} \end{aligned} \quad (11.190)$$

先对 z 积分，仅当 m 为奇数 $2l+1$ ($l=0, 1, 2, \dots$) 时，上述积分才可能非零

$$c_{n,2l+1}(0) = -\frac{4\sqrt{2}hT_0}{\sqrt{\pi}(2l+1)R J_1(\mu_n)} \int_0^R r dr J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right). \quad (11.191)$$

作变量替换 $x = \frac{\mu_n}{R}r$ ，并考虑到 $xJ_0(x)$ 的原函数为 $xJ_1(x)$ ，就有

$$c_{n,2l+1}(0) = -\frac{4\sqrt{2}hT_0R}{\sqrt{\pi}(2l+1)\mu_n}. \quad (11.192)$$

最后写到一起

$$T(r, z, t) = T_0 \left[2 - \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)\mu_n J_1(\mu_n)} e^{-a\left(\frac{\mu_n^2}{R^2} + \frac{(2l+1)^2 \pi^2}{h^2}\right)t} J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) \sin \frac{(2l+1)\pi z}{h} \right].$$

思考题：一般在求解圆柱内问题时，要特别注意需要讨论 $k_{2D} = 0$ （问题具有和 r, θ 无关的对称性，退化为一维的 z 的函数）和 $k_z = 0$ （问题具有和 z 无关的对称性，退化为二维极坐标情形）的可能性。在上面的例题里，为什么我们没有考虑这两种情况？

11.5 球面谐函数

11.5.1 边界消失的后果

在球坐标 (r, θ, ϕ) 里固定 $r = 1$ ，就得到单位球面：这是一个二维空间。

球面是个很特殊的二维区域——它没有边界。也就是说，所有边界积分的贡献都消失了。这就造成一个很有趣的事情：只要在整个球面上是 ∇^2 的本征函数，就一定是谐函数，因为你根本没法跟我说：嘿，这个本征函数在边界上不满足零边界条件，所以……

但是不知道你是否意识到一个问题：归一化定理(11.3)右边的边界积分是零（因为根本就没有边界），但是左边的积分又大于零，产生了明显的矛盾！你是不是开始迷惑了呢？请别着急往下阅读，自己想想哪里出了问题。

如果你试图强行寻找球面的边界，那么你是为了自圆其说而走上了歧路。球面上的坐标 (θ, ϕ) 都存在边界。不过，这仅仅是一种人为选择：无论是 θ 的边界，还是 ϕ 的边界，都不对应球面上任何特殊的点。接受过足够数学训练的你应该不难想清楚：南极、北极、经线、纬线都是人为画上去的，都不是地球表面的边界。

当你反复推敲，排除一切不可能之后，剩下唯一的可能就是真相：在一个有限无边界的区域内，并不存在连续依赖于波数 k 的本征函数族。

11.5.2 单位球面上的谐函数

单位球面上的谐函数 ψ 满足：

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} = -k^2 \psi. \quad (11.194)$$

对此，我先直接给出结论：

单位球面上谐函数: 在单位球面上, 当且仅当波数平方 $k^2 = \ell(\ell+1)$, $\ell = 0, 1, 2, \dots$ 时存在谐函数。对每个 ℓ , 存在 $2\ell+1$ 个本征值简并的谐函数: $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ ($-\ell \leq m \leq \ell$)。这里的“球面谐函数” $Y_{\ell m}$ 定义为:

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}} \left[\sin^m \theta \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \right)^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta \right] e^{im\phi}. \quad (11.195)$$

球面谐函数是正交归一化的:

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) Y_{\ell' m'}(\theta, \phi) = \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'}. \quad (11.196)$$

表11.1给出了球面谐函数的一些具体的例子:

Table 11.1: 低阶的若干个球面谐函数

ℓ	m	$Y_{\ell m}(\theta, \phi)$
0	0	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$
1	0	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$
1	± 1	$\mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi}$
2	0	$\sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1)$
2	± 1	$\mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\phi}$
2	± 2	$\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}$
3	0	$\sqrt{\frac{7}{16\pi}} \cos \theta (5 \cos^2 \theta - 3)$
3	± 1	$\mp \sqrt{\frac{21}{64\pi}} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) e^{\pm i\phi}$
3	± 2	$\sqrt{\frac{105}{32\pi}} \sin^2 \theta \cos \theta e^{\pm 2i\phi}$
3	± 3	$\mp \sqrt{\frac{35}{64\pi}} \sin^3 \theta e^{\pm 3i\phi}$
4	0	$\sqrt{\frac{9}{256\pi}} (35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3)$
4	± 1	$\mp \sqrt{\frac{45}{64\pi}} \sin \theta (7 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) e^{\pm i\phi}$
4	± 2	$\sqrt{\frac{45}{128\pi}} \sin^2 \theta (7 \cos^2 \theta - 1) e^{\pm 2i\phi}$
4	± 3	$\mp \sqrt{\frac{315}{64\pi}} \sin^3 \theta \cos \theta e^{\pm 3i\phi}$
4	± 4	$\sqrt{\frac{315}{512\pi}} \sin^4 \theta e^{\pm 4i\phi}$

球面上的 ∇^2 算符的本征值只允许取离散值这件事情我们已经预告过了, 所以至少不应该让你惊讶。

球谐函数的正交性也是容易得到的：对 $\ell \neq \ell'$ ，谐函数正交定理保证了 $Y_{\ell m}$ 和 $Y_{\ell' m'}$ 正交。对不同的 $m \neq m'$ ，直接对 ϕ 积分即可证明 $Y_{\ell m}$ 和 $Y_{\ell' m'}$ 正交。

所以，最后让你惊讶的可能是如此复杂的一个定义式，竟然既满足方程(11.194)，又是归一化的。

为了证明这两点，要先介绍几个简单的引理作为铺垫：

用数学归纳法容易得到：

乘积多重导数公式： 设 f, g 为 x 的函数，

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} f^{(k)} g^{(n-k)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (11.197)$$

其中 $f^{(k)}$ 表示 f 的 k 重导数。

设 $\rho(x)$ 是另一个给定的函数，令 $y = \int \frac{dx}{\rho(x)}$ 并对变量 y 应用乘积的多重导数公式可以得到：

推广的乘积多重导数公式： 设 ρ, f, g 为 x 的函数，则

$$\left(\rho \frac{d}{dx}\right)^n (fg) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \left[\left(\rho \frac{d}{dx}\right)^k f\right] \left[\left(\rho \frac{d}{dx}\right)^{n-k} g\right]. \quad (11.198)$$

记算符 $\hat{d} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta}$ ，利用上面的定理，很容易验证：

$$\hat{d} \sin^2 \theta = 2 \cos \theta; \quad (11.199)$$

$$\hat{d}^2 \sin^2 \theta = -2; \quad (11.200)$$

$$\hat{d}^n \sin^2 \theta = 0, \quad n = 3, 4, 5, \dots; \quad (11.201)$$

$$\hat{d} \cos \theta = -1; \quad (11.202)$$

$$\hat{d} \sin^m \theta = m \sin^{m-2} \theta \cos \theta, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots; \quad (11.203)$$

$$\hat{d}(\sin^m \theta \cos \theta) = m \sin^{m-2} \theta - (m+1) \sin^m \theta, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (11.204)$$

现在可以开始证明 $Y_{\ell m}$ 是单位球面上归一化的谐函数了。记

$$N_{\ell m} := \frac{1}{2^\ell \ell!} \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}}; \quad (11.205)$$

$$\Psi_{\ell m}(\theta) := \sin^m \theta \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta}\right)^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta. \quad (11.206)$$

则我们需要证明

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{d}{d\theta} \Psi_{\ell m} \right] + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Psi_{\ell m} = 0. \quad (11.207)$$

以及

$$\int_0^\pi [\Psi_{\ell m}(\theta)]^2 \sin \theta d\theta = \frac{1}{2\pi N_{\ell m}^2} = 4^\ell (\ell!)^2 \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \frac{2}{2\ell+1}. \quad (11.208)$$

证明: 令 $\hat{d} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta}$, 在恒等式 $\sin^2 \theta \hat{d} \sin^{2\ell} \theta = 2\ell \cos \theta \sin^{2\ell} \theta$ 两边作用 $\hat{d}^{\ell+m}$, 得到

$$\begin{aligned} & \sin^2 \theta \hat{d}^{\ell+m+1} \sin^{2\ell} \theta + 2(\ell+m) \cos \theta \hat{d}^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta - (\ell+m)(\ell+m-1) \hat{d}^{\ell+m-1} \sin^{2\ell} \theta \\ &= 2\ell \cos \theta \hat{d}^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta - 2\ell(\ell+m) \hat{d}^{\ell+m-1} \sin^{2\ell} \theta. \end{aligned} \quad (11.209)$$

稍作整理得到

$$\sin^2 \theta \hat{d}^{\ell+m+1} \sin^{2\ell} \theta + 2m \cos \theta \hat{d}^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta + (\ell+m)(\ell-m+1) \hat{d}^{\ell+m-1} \sin^{2\ell} \theta = 0. \quad (11.210)$$

两边同乘以 $\sin^m \theta$, 得到

$$\begin{aligned} & \sin^{m+2} \theta \hat{d}^{\ell+m+1} \sin^{2\ell} \theta + 2m \sin^m \theta \cos \theta \hat{d}^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta \\ &+ (\ell+m)(\ell-m+1) \sin^m \theta \hat{d}^{\ell+m-1} \sin^{2\ell} \theta = 0. \end{aligned} \quad (11.211)$$

上式可以写成

$$\begin{aligned} & \sin^2 \theta \hat{d} \left[\sin^m \theta \hat{d}^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta \right] + m \sin^m \theta \cos \theta \hat{d}^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta \\ &+ (\ell+m)(\ell-m+1) \sin^m \theta \hat{d}^{\ell+m-1} \sin^{2\ell} \theta = 0. \end{aligned} \quad (11.212)$$

两边作用 \hat{d} , 得到

$$\begin{aligned} & \hat{d} \left\{ \sin^2 \theta \hat{d} \left[\sin^m \theta \hat{d}^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta \right] \right\} + m^2 \sin^{m-2} \theta \hat{d}^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta - m(m+1) \sin^m \theta \hat{d}^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta \\ &+ m \sin^m \theta \cos \theta \hat{d}^{\ell+m+1} \sin^{2\ell} \theta + (\ell+m)(\ell-m+1) m \sin^{m-2} \theta \cos \theta \hat{d}^{\ell+m-1} \sin^{2\ell} \theta \\ &+ (\ell+m)(\ell-m+1) \sin^m \theta \hat{d}^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta = 0. \end{aligned} \quad (11.213)$$

利用前面的方程(11.210), 把上式蓝色的第二行替换掉, 得到:

$$\begin{aligned} & \hat{d} \left\{ \sin^2 \theta \hat{d} \left[\sin^m \theta \hat{d}^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta \right] \right\} + m^2 \sin^{m-2} \theta \hat{d}^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta - m(m+1) \sin^m \theta \hat{d}^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta \\ &- 2m^2 \sin^{m-2} \theta \hat{d}^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta + 2m^2 \sin^m \theta \hat{d}^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta \\ &+ (\ell+m)(\ell-m+1) \sin^m \theta \hat{d}^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta = 0. \end{aligned} \quad (11.214)$$

把同类项都写到一起就得到了最后的结果

$$\hat{d} \left\{ \sin^2 \theta \hat{d} \left[\sin^m \theta \hat{d}^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta \right] \right\} + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \sin^m \theta \hat{d}^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta = 0. \quad (11.215)$$

即(11.207)得证。

下面我们转入对(11.208)的证明:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi [\Psi_{\ell m}(\theta)]^2 \sin \theta d\theta &= \int_0^\pi \sin^{2m} \theta \left[\left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \right)^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta \right] \sin \theta d\theta \\ &= \int_{-1}^1 (1-x^2)^m \left[\frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (1-x^2)^\ell \right]^2 dx \end{aligned} \quad (11.216)$$

在最后一步我们做了变量替换 $x = \cos \theta$ 。

分部积分 $\ell+m$ 次, 注意 $1-x^2$ 在端点总是消失, 就得到

$$\begin{aligned} \int_0^\pi [\Psi_{\ell m}(\theta)]^2 \sin \theta d\theta &= (-1)^{\ell+m} \int_{-1}^1 (1-x^2)^\ell \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} \left[(1-x^2)^m \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (1-x^2)^\ell \right] dx \\ &= \frac{(2\ell)!(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \int_{-1}^1 (1-x^2)^\ell dx \end{aligned} \quad (11.217)$$

注意蓝色部分之所以为常数, 是因为 $(1-x^2)^m \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (1-x^2)^\ell$ 是 $\ell+m$ 次多项式, 求导 $\ell+m$ 次后只有最高次幂有非零贡献。

最后, 做变量替换 $t = \frac{1+x}{2}$, 得到

$$\begin{aligned} \int_0^\pi [\Psi_{\ell m}(\theta)]^2 \sin \theta d\theta &= \frac{2^{2\ell+1}(2\ell)!(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \int_0^1 t^\ell (1-t)^\ell dt \\ &= \frac{2^{2\ell+1}(2\ell)!(\ell+m)! [\Gamma(\ell+1)]^2}{(\ell-m)! \Gamma(2\ell+2)} \\ &= \frac{2^{2\ell+1}(2\ell)!(\ell+m)! (\ell!)^2}{(\ell-m)! (2\ell+1)!} \\ &= 4^\ell (\ell!)^2 \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \frac{2}{2\ell+1} \end{aligned} \quad (11.218)$$

11.5.3 球面谐函数的对称性

我们把从原点到单位球面上的 (θ, ϕ) 点的单位矢量记作 \mathbf{n} , 并把 $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ 简记为 $Y_{\ell m}(\mathbf{n})$ 。在单位球面上的积分

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi f(\theta, \phi)$$

我们就简记作

$$\int f(\mathbf{n}) d^2\mathbf{n}.$$

在这一小节, 我们讨论 $Y_{\ell m}(\mathbf{n})$ 的各种对称性质。

球面谐函数的宇称性质: 对相反的两个方向, 有

$$Y_{\ell m}(\mathbf{n}) = (-1)^\ell Y_{\ell m}(-\mathbf{n}). \quad (11.219)$$

证明: 如果 \mathbf{n} 对应 (θ, ϕ) , 则 $-\mathbf{n}$ 对应 $(\pi - \theta, \pi + \phi)$ 。

$$\begin{aligned} & Y_{\ell m}(\pi - \theta, \pi + \phi) \\ &= N_{\ell m} \left\{ \sin^m(\pi - \theta) \left[\frac{1}{\sin(\pi - \theta)} \frac{d}{d(\pi - \theta)} \right]^{\ell+m} \sin^{2\ell}(\pi - \theta) \right\} e^{im(\pi + \phi)} \\ &= N_{\ell m} \left\{ \sin^m \theta \left(-\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \right)^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta \right\} (-1)^m e^{im\phi} \\ &= (-1)^{\ell+2m} N_{\ell m} \left[\sin^m \theta \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \right)^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta \right] e^{im\phi} \\ &= (-1)^\ell Y_{\ell m}(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (11.220)$$

$Y_{\ell m}$ 和 $Y_{\ell, -m}$ 之间的关系:

$$Y_{\ell, -m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{\ell, m}^*(\theta, \phi). \quad (11.221)$$

证明: 把 $Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) = N_{\ell, m} \Psi_{\ell m}(\theta) e^{-im\phi}$ 在单位球面上展开:

$$Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) = \sum_{\ell', m'} c_{\ell' m'} Y_{\ell' m'}(\theta, \phi).$$

两边同乘以 $Y_{\ell' m'}^*$ 并在单位球面上积分, 得到

$$c_{\ell' m'} = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi Y_{\ell' m'}^*(\theta, \phi) Y_{\ell m}^*(\theta, \phi).$$

即

$$c_{\ell' m'} = N_{\ell' m'} N_{\ell m} \int_0^\pi \Psi_{\ell' m'}(\theta) \Psi_{\ell m}(\theta) \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi e^{-i(m'+m)\phi}.$$

显然, 当 $m' + m \neq 0$ 时上式为零。当 $m' = -m$, 但 $\ell \neq \ell'$ 时, $\Psi_{\ell m}(\theta) \cos m\phi$ 和 $\Psi_{\ell' m'}(\theta) \cos m\phi$ 都是单位球面上的谐函数, 且它们对应不同的 k_{2D}^2 (即 $\ell(\ell+1)$ 和 $\ell'(\ell'+1)$), 根据一般正交定理, 上式的积分仍为零。

因此我们只需要计算 $c_{\ell, -m}$ 。剩下的计算和证明 $\Psi_{\ell m}$ 归一化积分时的过程几乎完全

相同:

$$\begin{aligned}
c_{\ell,-m} &= 2\pi N_{\ell m} N_{\ell,-m} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \Psi_{\ell m}(\theta) \Psi_{\ell,-m}(\theta) \\
&= 2\pi N_{\ell m} N_{\ell,-m} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \right)^{\ell-m} \sin^{2\ell} \theta \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \right)^{\ell+m} \sin^{2\ell} \theta \\
&= 2\pi N_{\ell m} N_{\ell,-m} \int_{-1}^1 \frac{d^{\ell-m}}{dx^{\ell-m}} (x^2-1)^\ell \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (x^2-1)^\ell dx \\
&= 2\pi N_{\ell m} N_{\ell,-m} (-1)^{\ell+m} \int_{-1}^1 (x^2-1)^\ell \frac{d^{2\ell}}{dx^{2\ell}} (x^2-1)^\ell dx \\
&= 2\pi N_{\ell m} N_{\ell,-m} (-1)^m (2\ell)! \int_{-1}^1 (1-x^2)^\ell dx \\
&= 2\pi N_{\ell m} N_{\ell,-m} (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \frac{1}{2\pi N_{\ell m}^2} \\
&= (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \frac{N_{\ell,-m}}{N_{\ell m}} \\
&= (-1)^m
\end{aligned} \tag{11.222}$$

三个球面谐函数乘积积分的对称性: 单位球面上的积分

$$\int Y_{\ell_1 m_1}(\mathbf{n}) Y_{\ell_2 m_2}(\mathbf{n}) Y_{\ell_3 m_3}(\mathbf{n}) d^2 \mathbf{n}$$

非零, 则必须下列三个条件均满足:

- (1). $m_1 + m_2 + m_3 = 0$;
- (2). 以 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 为三条边可以构成三角形, 即 $|\ell_1 - \ell_2| \leq \ell_3 \leq \ell_1 + \ell_2$;
- (3). $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3$ 是偶数。

证明:

$$Y_{\ell_1 m_1}(\mathbf{n}) Y_{\ell_2 m_2}(\mathbf{n}) Y_{\ell_3 m_3}(\mathbf{n}) \propto \Psi_{\ell_1 m_1}(\theta) \Psi_{\ell_2 m_2}(\theta) \Psi_{\ell_3 m_3}(\theta) e^{i(m_1+m_2+m_3)\phi}.$$

如果 $m_1 + m_2 + m_3 \neq 0$, 则对 ϕ 积分已经是零。

下面考虑 $m_1 + m_2 + m_3 = 0$ 的情况, 如果 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 不能构成三角形, 不妨设 $\ell_1 >$

$\ell_2 + \ell_3$, 则运用分部积分的技巧:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\pi \Psi_{\ell_1 m_1}(\theta) \Psi_{\ell_2 m_2}(\theta) \Psi_{\ell_3 m_3}(\theta) \sin \theta d\theta \\
 &= \int_{-1}^1 \left[\frac{d^{\ell_1+m_1}}{dx^{\ell_1+m_1}} (x^2-1)^{\ell_1} \right] \left[\frac{d^{\ell_2+m_2}}{dx^{\ell_2+m_2}} (x^2-1)^{\ell_2} \right] \left[\frac{d^{\ell_3+m_3}}{dx^{\ell_3+m_3}} (x^2-1)^{\ell_3} \right] dx \\
 &= (-1)^{\ell_1+m_1} \int_{-1}^1 (x^2-1)^{\ell_1} \frac{d^{\ell_1+m_1}}{dx^{\ell_1+m_1}} \left\{ \left[\frac{d^{\ell_2+m_2}}{dx^{\ell_2+m_2}} (x^2-1)^{\ell_2} \right] \left[\frac{d^{\ell_3+m_3}}{dx^{\ell_3+m_3}} (x^2-1)^{\ell_3} \right] \right\} dx \\
 &= 0 \tag{11.223}
 \end{aligned}$$

我先来对上的计算过程做些说明: 第 k 次 ($k=1, 2, \dots, \ell_1+m_1$) 分部积分得到的积分上下限贡献是

$$(-1)^{k-1} \left[\frac{d^{\ell_1+m_1-k}}{dx^{\ell_1+m_1-k}} (x^2-1)^{\ell_1} \right] \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \left\{ \left[\frac{d^{\ell_2+m_2}}{dx^{\ell_2+m_2}} (x^2-1)^{\ell_2} \right] \left[\frac{d^{\ell_3+m_3}}{dx^{\ell_3+m_3}} (x^2-1)^{\ell_3} \right] \right\} \Big|_{-1}^1$$

注意到三个被求导函数总计含有 $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3$ 个 (x^2-1) 的因子。因为总计求导次数 $(\ell_1+m_1-k) + (k-1) + (\ell_2+m_2) + (\ell_3+m_3) = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 - 1 < \ell_1 + \ell_2 + \ell_3$, 所以至少有一个 (x^2-1) 的因子未被求导。所以上式结果为零。

另外, 最后一步的结果是根据蓝色部分是次数低于 ℓ_1+m_1 次的多项式, 求导 ℓ_1+m_1 次后显然为零。

最后来看 $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3$ 必须为偶数这个条件: 根据

$$Y_{\ell_1 m_1}(-\mathbf{n}) Y_{\ell_2 m_2}(-\mathbf{n}) Y_{\ell_3 m_3}(-\mathbf{n}) = (-1)^{\ell_1+\ell_2+\ell_3} Y_{\ell_1 m_1}(\mathbf{n}) Y_{\ell_2 m_2}(\mathbf{n}) Y_{\ell_3 m_3}(\mathbf{n}),$$

显然若 $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3$ 为奇数时, 积分在 \mathbf{n} 和 $-\mathbf{n}$ 处两两抵消, 结果为零。

那么, 当三个条件都得到满足时, 三个球面谐函数乘积积分是否结果一定非零呢? 答案是肯定的, 但是这种积分的计算涉及到 3- j 符号 (three- j symbol) (或者高等量子力学中的 Clebsch-Gordan 系数) 等高级的内容, 我们就不深入讨论了。(如果写一本续集可以考虑……)

我们下面来看一个和原子跃迁规则密切相关的一个问题。

例题 62: $\cos \theta Y_{7,4}(\theta, \phi)$ 可以写成哪些 (同样以 θ, ϕ 为宗量的) 球谐函数的线性组合?

解答: 根据 $Y_{1,0} \propto \cos \theta$, 以及正交归一化关系(11.196), 问题等价于: 对哪些 ℓ, m , 单位球面上的积分

$$\int Y_{\ell m}^*(\mathbf{n}) Y_{1,0}(\mathbf{n}) Y_{7,4}(\mathbf{n}) d^2 \mathbf{n}$$

非零。

根据 (11.221), 问题又等价于: 对哪些 ℓ, m , 单位球面上的积分

$$\int Y_{\ell,-m}(\mathbf{n})Y_{1,0}(\mathbf{n})Y_{7,4}(\mathbf{n})d^2\mathbf{n}$$

非零。

根据三个球面谐函数乘积积分的对称性, 可以得到 $m = 4$, 以及 $\ell = 6$ 或 8 。即最后结论是可以写成 $Y_{8,4}$ 和 $Y_{6,4}$ 的线性组合。

11.6 勒让德多项式

如果要研究的问题具有球对称性, 我们只要使用 $Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ 就行了。你当然能意识到我不可能从此就和你讨论一个常数函数。所以至少我会考虑更复杂一点的问题。例如, 有一个特殊的点 (比如除了球之外还有个点电荷之类的问题), 或者有个特殊的平面 (比如除了球之外还有个圆环之类的问题)。在这些情况下, 我可以过特殊点或者垂直于特殊平面作直线并取为 z 轴方向, 问题就具有绕 z 轴旋转不变性——也就是不依赖于球坐标系的 ϕ 坐标。这时需要考虑的球面谐函数具有 $Y_{\ell 0}$ (即 $m = 0$) 的形式。

观察表 11.1 你不难发现, $Y_{\ell 0}(\theta, \phi)$ 除了其实并不依赖于 ϕ 之外, 它好像还是 $\cos \theta$ 的 ℓ 次多项式。其实, 你可以把“好像”两个字去掉, 而且这个结论非常容易证明。利用 $Y_{\ell m}$ 的定义 (11.195), 就有

$$Y_{\ell 0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2\ell+1)}{4\pi}} \frac{1}{2^\ell \ell!} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \right)^\ell \sin^{2\ell} \theta. \quad (11.224)$$

令 $x \equiv \cos \theta$, 则 $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} = -\frac{d}{dx}$ 。上式就成为

$$\sqrt{\frac{4\pi}{(2\ell+1)}} Y_{\ell 0}(\theta, \phi) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \left(\frac{d}{dx} \right)^\ell (x^2 - 1)^\ell. \quad (11.225)$$

上式右边是 x 的 2ℓ 次多项式的 ℓ 次导函数, 显然就是 x 的 ℓ 次多项式。这个多项式是很有名的**勒让德多项式** (Legendre Polynomial), 通常记作 $P_\ell(x)$ 。也就是说我们有

罗巨格 (Rodrigues) 公式:

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \left(\frac{d}{dx} \right)^\ell (x^2 - 1)^\ell. \quad (11.226)$$

这个结果是罗巨格在他的博士学位论文中提出来的。当时勒让德多项式已经熟为人知，不过是通过另一种方式定义的（见(11.230)）。

现在(11.225)就可以写成：

球谐函数和勒让德多项式的关系：

$$P_\ell(\cos \theta) = \sqrt{\frac{4\pi}{(2\ell+1)}} Y_{\ell 0}(\theta, \phi). \quad (11.227)$$

或者说，具有绕 z 轴旋转对称性的球面谐函数可以写为 $\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} P_\ell(\cos \theta)$ 。这已经是正交归一化的函数组了，所以在单位球面上积分：

$$\int_0^\pi \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} P_\ell(\cos \theta) \sqrt{\frac{2\ell'+1}{4\pi}} P_{\ell'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \delta_{\ell\ell'}. \quad (11.228)$$

作变量替换 $x = \cos \theta$ 并完成对 ϕ 的积分，整理后就有

勒让德多项式正交归一化公式：

$$\int_{-1}^1 P_\ell(x) P_{\ell'}(x) dx = \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'}. \quad (11.229)$$

你并不必纠结(11.226)和(11.227)到底哪个是（较简明的）定义，哪个是（推导出来的）定理。对已经掌握了(11.195)的我们来说，这些结论都十分简单，无所谓选哪个作为定义。事实上，很多时候勒让德函数是直接用在 $x = 1$ 处的直接展开式定义的：

勒让德多项式在 $x = 1$ 处的展开式：

$$P_\ell(x) = \sum_{k=0}^{\ell} \frac{(\ell+k)!}{(k!)^2(\ell-k)!} \left(\frac{x-1}{2}\right)^k. \quad (11.230)$$

作变量替换 $t = x - 1$ ，则 $(x^2 - 1)^\ell = t^\ell(t+2)^\ell$ 。把 $(t+2)^\ell$ 直接按二项式定理展开后，不难证明 (11.230) 和 (11.226) 的等价性。具体过程如下：

证明：令 $t = x - 1$ ，按照罗巨格公式，

$$\begin{aligned}
 P_\ell(x) &= \frac{1}{2^\ell \ell!} \left(\frac{d}{dt} \right)^\ell \left[t^\ell (t+2)^\ell \right]. \\
 &= \frac{1}{2^\ell \ell!} \left(\frac{d}{dt} \right)^\ell \left[t^\ell \sum_{k=0}^{\ell} \frac{\ell!}{k!(\ell-k)!} t^k 2^{\ell-k} \right]. \\
 &= \frac{1}{2^\ell \ell!} \left(\frac{d}{dt} \right)^\ell \left[\sum_{k=0}^{\ell} \frac{\ell!}{k!(\ell-k)!} t^{\ell+k} 2^{\ell-k} \right]. \\
 &= \frac{1}{2^\ell \ell!} \sum_{k=0}^{\ell} \frac{\ell!}{k!(\ell-k)!} \frac{(\ell+k)!}{k!} t^k 2^{\ell-k}. \\
 &= \sum_{k=0}^{\ell} \frac{(\ell+k)!}{(k!)^2 (\ell-k)!} \left(\frac{t}{2} \right)^k. \tag{11.231}
 \end{aligned}$$

这种直接计算的方法当然毫无乐趣可言，所以我就不一一重复了。勒让德多项式在 $x = -1$ 和 $x = 0$ 处的展开结果分别如下。

勒让德多项式在 $x = -1$ 处的展开式：

$$P_\ell(x) = \sum_{k=0}^{\ell} \frac{(-1)^{\ell-k} (\ell+k)!}{(k!)^2 (\ell-k)!} \left(\frac{x+1}{2} \right)^k. \tag{11.232}$$

偶数阶勒让德多项式在 $x = 0$ 处的展开式：

$$P_{2n}(x) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} [2(n+k)]!}{(n+k)!(n-k)!(2k)!} x^{2k}. \tag{11.233}$$

奇数阶勒让德多项式在 $x = 0$ 处的展开式：

$$P_{2n+1}(x) = \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} [2(n+k+1)]!}{(n+k+1)!(n-k)!(2k+1)!} x^{2k+1}. \tag{11.234}$$

根据这些展开式，奇数阶的勒让德多项式只包含奇数次幂，所以是奇函数。偶数阶勒让德多项式只包含偶数次幂，所以是偶函数。表11.2列出了具体的几个低阶勒让德多项式供参考。

上面这些展开式也给出了 $P_\ell(1) = 1$ ， $P_\ell(-1) = (-1)^\ell$ ， $P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2}$ ，以及显然的 $P_{2n+1}(0) = 0$ 等等。

利用(11.230)，我们还可以证明

Table 11.2: 低阶的若干个勒让德多项式

ℓ	$P_\ell(x)$
0	1
1	x
2	$\frac{3x^2-1}{2}$
3	$\frac{5x^3-3x}{2}$
4	$\frac{35x^4-30x^2+3}{8}$
5	$\frac{63x^5-70x^3+15x}{8}$

勒让德函数的母函数定理:

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2xt}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(x)t^\ell, \quad |t| < |x \pm \sqrt{x^2-1}|. \quad (11.235)$$

证明:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+t^2-2xt}} &= \frac{1}{(1-t)\sqrt{1-\frac{2(x-1)t}{(1-t)^2}}} \\ &= \frac{1}{1-t} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \left(-\frac{2(x-1)t}{(1-t)^2}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^k(k!)^2} (x-1)^k t^k (1-t)^{-2k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^k(k!)^2} (x-1)^k t^k \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2k-1}{n} (-t)^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2k+n)!}{2^k(k!)^2 n!} (x-1)^k t^{n+k} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\ell} \frac{(\ell+k)!}{(k!)^2(\ell-k)!} \left(\frac{x-1}{2}\right)^k t^\ell \end{aligned} \quad (11.236)$$

利用(11.230)即证毕。

勒让德多项式的母函数定理两边对 t 求导就能得到

勒让德多项式的递推关系:

$$(2\ell+1)xP_\ell(x) = (\ell+1)P_{\ell+1}(x) + \ell P_{\ell-1}(x), \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \quad (11.237)$$

证明: 勒让德函数的母函数定理(11.235)两边对 t 求导, 得到

$$\frac{x-t}{(1-2xt+t^2)^{3/2}} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell P_{\ell}(x)t^{\ell-1}. \quad (11.238)$$

即

$$(x-t) \sum_{\ell=0}^{\infty} P_{\ell}(x)t^{\ell} = (1-2xt+t^2) \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell P_{\ell}(x)t^{\ell-1}. \quad (11.239)$$

两边比较 t^{ℓ} 的系数即得证。

勒让德多项式的母函数定理两边对 x 求导, 并结合上面的递推公式, 就能得到

勒让德多项式的微分递推关系:

$$(2\ell+1)P_{\ell}(x) = P'_{\ell+1}(x) - P'_{\ell-1}(x), \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \quad (11.240)$$

证明: 勒让德函数的母函数定理(11.235)两边对 x 求导, 得到

$$\frac{t}{(1-2xt+t^2)^{3/2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P'_{\ell}(x)t^{\ell}. \quad (11.241)$$

即

$$t \sum_{\ell=0}^{\infty} P_{\ell}(x)t^{\ell} = (1-2xt+t^2) \sum_{\ell=0}^{\infty} P'_{\ell}(x)t^{\ell}. \quad (11.242)$$

两边比较 $t^{\ell+1}$ 的系数, 有

$$P_{\ell}(x) = P'_{\ell+1}(x) - 2xP'_{\ell}(x) + P'_{\ell-1}(x). \quad (11.243)$$

(11.237)两边对 x 求导, 有

$$(2\ell+1)P_{\ell}(x) + (2\ell+1)xP'_{\ell}(x) = (\ell+1)P'_{\ell+1}(x) + \ell P'_{\ell-1}(x). \quad (11.244)$$

(11.243) 两边乘以 $\ell + \frac{1}{2}$, 减去(11.244), 即得证。

由 $Y_{\ell 0}$ 满足的球面谐函数的微分方程 (参考(11.207)), 可以直接得到

勒让德多项式满足的微分方程:

$$[(1-x^2)P'_{\ell}(x)]' = -\ell(\ell+1)P_{\ell}(x). \quad (11.245)$$

对初次接触勒让德多项式的你来说，上面讨论的这些性质也许一时间很难消化。我们先来看一些例题。

例题 63: 计算积分

$$\int_{-1}^1 x^8 P_7(x) dx$$

解答: 被积分函数是奇函数，所以结果为零。

例题 64: 计算积分

$$\int_{-1}^1 x^5 P_7(x) dx$$

解答: 由于 x^5 可以写成 $P_5(x), P_4(x), P_3(x) \dots$ 的线性组合，而这些多项式都和 $P_7(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上正交，所以结果为零。

例题 65: 计算积分

$$\int_{-1}^1 x P_5(x) P_6(x) dx$$

解答: 利用(11.237)，有

$$x P_5(x) = \frac{6}{11} P_6(x) + \frac{5}{11} P_4(x)$$

然后利用正交归一化性质(11.229)，有

$$\int_{-1}^1 x P_5(x) P_6(x) dx = \frac{6}{11} \int_{-1}^1 [P_6(x)]^2 dx + \frac{5}{11} \int_{-1}^1 P_6(x) P_4(x) dx = \frac{12}{143} + 0 = \frac{12}{143}$$

例题 66: 计算积分

$$\int_0^1 P_7'(x) P_6(x) dx$$

解答: 利用(11.240)，有

$$P_7'(x) = 13P_6(x) + P_5'(x).$$

$P_5'(x)$ 为四次多项式, 可以写成 $P_4(x), P_3(x), \dots$ 的线性组合, 这些多项式都和 $P_6(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上正交, 所以

$$\int_{-1}^1 P_5'(x)P_6(x)dx = 0.$$

因此

$$\int_{-1}^1 P_7'(x)P_6(x)dx = \int_{-1}^1 13 [P_6(x)]^2 dx = 2.$$

因为 $P_7'(x)P_6(x)$ 是偶函数, 所以

$$\int_0^1 P_7'(x)P_6(x)dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_7'(x)P_6(x)dx = 1.$$

例题 67: 把 x^n ($n \geq 0, n \in \mathbb{Z}, -1 \leq x \leq 1$) 展开成

$$x^n = \sum_{\ell=0}^n c_{\ell} P_{\ell}(x)$$

计算系数 c_{ℓ} 。

解答: 根据 $P_{\ell}(x)$ 的正交归一性以及罗巨格公式, 分部积分 ℓ 次, 得到:

$$\begin{aligned} c_{\ell} &= \frac{2\ell+1}{2} \int_{-1}^1 P_{\ell}(x)x^n dx \\ &= \frac{2\ell+1}{2^{\ell+1}\ell!} \int_{-1}^1 x^n \frac{d^{\ell}}{dx^{\ell}}(x^2-1)^{\ell} dx \\ &= \frac{(2\ell+1)n!}{2^{\ell+1}\ell!(n-\ell)!} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\ell} x^{n-\ell} dx \end{aligned} \quad (11.246)$$

显然当 $n-\ell$ 为奇数时, $c_{\ell} = 0$ 。

当 $n-\ell$ 为偶数时, 设 $n-\ell = 2k$, 并做变量替换 $t = x^2$:

$$\begin{aligned} c_{\ell} &= \frac{(2\ell+1)n!}{2^{\ell+1}\ell!(n-\ell)!} \int_0^1 (1-t)^{\ell} t^{k-\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{(2\ell+1)(2k+\ell)! \Gamma(\ell+1) \Gamma(k+\frac{1}{2})}{2^{\ell+1}\ell!(2k)! \Gamma(\ell+k+\frac{3}{2})} \\ &= \frac{(2\ell+1)(2k+n)! \Gamma(\frac{n-\ell+1}{2})}{2^{\ell+1}(2k)! \Gamma(\frac{n+\ell+3}{2})} \\ &= \frac{2^{\ell}(2\ell+1)(\ell+k)!(\ell+2k)!}{k!(2\ell+2k+1)!} \end{aligned} \quad (11.247)$$

因此最后得到:

$$x^n = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{2^{n-2k}(2n-4k+1)(n-k)!n!}{k!(2n-2k+1)!} P_{n-2k}(x). \quad (11.248)$$

我们最后再介绍一个和勒让德多项式相关的重要（但和本书主干内容也许并不那么相关的）结果，

球面谐函数的加法公式: 设 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ 为任意两个方向，则

$$P_\ell(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\mathbf{n}_1) Y_{\ell m}(\mathbf{n}_2), \quad (11.249)$$

这里的 $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2$ 是 \mathbf{n}_1 和 \mathbf{n}_2 的夹角的余弦。它可以用 \mathbf{n}_1 的坐标 (θ_1, ϕ_1) 和 \mathbf{n}_2 的坐标 (θ_2, ϕ_2) 明确地表示出来：

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2). \quad (11.250)$$

我们把这个定理的证明放到下一章（见(12.30)）。

11.7 球坐标系的谐函数和数理方程

我们现在把二维的球面上的谐函数推广到三维的球坐标系。为此，我们必须先介绍球贝塞尔函数。

把自由度 r 重新纳入之后，令谐函数为 $\Psi(r, \theta, \phi) = f(r)Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ ，则由 $\nabla^2 \Psi = -k^2 \Psi$ 得到：

$$f'' + \frac{2}{r}f' + \left(k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right)f = 0$$

容易验证这个方程的两个线性无关解是 $(kr)^{-1/2}J_{\ell+1/2}(kr)$ 和 $(kr)^{-1/2}N_{\ell+1/2}(kr)$ （见本章习题中类贝塞尔方程的通解）。

我们把这两个函数重新写为 $j_\ell(kr)$ 和 $n_\ell(kr)$ ，其中

第一类球贝塞尔函数的定义:

$$j_\ell(x) := \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\ell+1/2}(x), \quad \ell \in \mathbb{Z}. \quad (11.251)$$

以及

第二类球贝塞尔函数的定义:

$$n_\ell(x) := \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{\ell+1/2}(x), \quad \ell \in \mathbb{Z}. \quad (11.252)$$

于是对球坐标系的谐函数有如下结论

实心球（包含 $r = 0$ 的）区域内的谐函数通解:

$$\psi \propto j_\ell(kr) Y_{\ell m}(\theta, \phi). \quad (11.253)$$

对应的波数为 k 。这里 $\ell = 0, 1, 2, \dots$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell$ 。

空心球（不包含 $r = 0$ 的）区域内的谐函数通解:

$$\psi = [A j_\ell(kr) + B n_\ell(kr)] Y_{\ell m}(\theta, \phi). \quad (11.254)$$

对应的波数为 k 。这里 A, B 是待定系数, $\ell = 0, 1, 2, \dots$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell$ 。

由于半奇数阶贝塞尔函数是初等函数, 所以球贝塞尔函数其实都是初等函数, 列出常用的几个低阶球贝塞尔函数如下:

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad (11.255)$$

$$j_1(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{x^2}; \quad (11.256)$$

$$j_2(x) = \frac{3 \sin x - 3x \cos x - x^2 \sin x}{x^3}; \quad (11.257)$$

$$n_0(x) = -\frac{\cos x}{x}, \quad (11.258)$$

$$n_1(x) = -\frac{\cos x + x \sin x}{x^2}. \quad (11.259)$$

$$n_2(x) = \frac{x^2 \cos x - 3 \cos x - 3x \sin x}{x^3}. \quad (11.260)$$

用贝塞尔函数的递推公式(11.29) 以及 j_0 和 n_0 的表达式, 容易得到:

球贝塞尔函数的初等表达式:

$$j_l(x) = (-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\sin x}{x}; \quad (11.261)$$

$$n_l(x) = -(-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\cos x}{x}. \quad (11.262)$$

下面我们来看一些球贝塞尔函数的具体应用的例子。

例题 68: 把 $e^{i\lambda x}$ ($-1 \leq x \leq 1$ 为变量, λ 为任意实数参量) 展开成级数:

$$e^{i\lambda x} = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{\ell}(\lambda) P_{\ell}(x).$$

试计算展开系数 $c_{\ell}(\lambda)$ 的显式表达式。

解答: 利用前面得到过的结果(11.248), 有

$$\begin{aligned} e^{i\lambda x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \lambda^n}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{i^n \lambda^n 2^{n-2k} (2n-4k+1)(n-k)! n!}{n! k! (2n-2k+1)!} P_{n-2k}(x) \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{\ell} (2\ell+1) P_{\ell}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^{\ell+2k} (\ell+k)!}{k! (2\ell+2k+1)!} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^{\ell} P_{\ell}(x) \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\ell+k+\frac{3}{2})} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\ell+2k+\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^{\ell} j_{\ell}(\lambda) P_{\ell}(x) \end{aligned} \quad (11.263)$$

在最后得到的结果

$$e^{i\lambda x} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^{\ell} j_{\ell}(\lambda) P_{\ell}(x), \quad (11.264)$$

里, 令 $\lambda = kr$, $x = \cos \theta$, 则得到

$$e^{ikr \cos \theta} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^{\ell} j_{\ell}(kr) P_{\ell}(\cos \theta). \quad (11.265)$$

这相当于把波矢沿 z 轴方向的平面波写成了 k 相同的一堆球坐标系谐函数的线性组合 (由轴对称性显然 $m \neq 0$ 的项不会出现)。这是 (简并) 谐函数的不同的基之间的互相转化。

例题 69: 把一个半径为 R , 温度为 T_0 的均匀实心金属球放到温度为 $T_1 > T_0$ 的热库中。已知金属球的导热系数为 λ , 质量密度为 ρ , 单位质量比热为 c 。问金属球的球心多久之后温度可以达到 $\frac{T_0+T_1}{2}$ 。

解答: 建立球坐标系使得金属球所在区域为 $r \leq R$ 。

显然稳恒态温度为 T_1 。问题中球的温度 $T(r)$ 具有球对称性, 因此可以令 $u(r) =$

$T(r) - T_1$, 则

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\nabla^2 u = 0, \quad (11.266)$$

$$u|_{r=R} = 0, \quad (11.267)$$

$$u|_{t=0} = T_0 - T_1. \quad (11.268)$$

其中 $a = \frac{\lambda}{\rho c}$ 。根据问题对称性只能取 $\ell = m = 0$ 的谐函数: $j_0(kr) = \frac{\sin kr}{kr}$ 。又根据零边界条件, 可以得到

$$k = \frac{n\pi}{R}, n = 1, 2, \dots$$

所以设

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\sin \frac{n\pi r}{R}}{\frac{n\pi r}{R}} e^{-\frac{n^2 \pi^2 a t}{R^2}}.$$

令 $t = 0$, 得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\sin \frac{n\pi r}{R}}{\frac{n\pi r}{R}} = T_0 - T_1, \quad 0 \leq r \leq R$$

利用谐函数正交定理 (或者直接观察) 可以写出

$$c_n = \frac{2n\pi(T_0 - T_1)}{R^2} \int_0^R \left(\sin \frac{n\pi r}{R} \right) r dr = 2(-1)^{n+1}(T_0 - T_1).$$

当 $r = 0$ 时,

$$u(0, t) = 2(T_0 - T_1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-\frac{n^2 \pi^2 a t}{R^2}}$$

当 $T(0, t)$ 达到 $\frac{T_0 + T_1}{2}$, 也就是当 $u(0, t)$ 达到 $\frac{T_0 - T_1}{2}$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-\frac{n^2 \pi^2 a t}{R^2}} = \frac{1}{4}. \quad (11.269)$$

根据 a 的物理意义, 我们知道上述方程的解必须满足 $at \sim R^2$, 那么(11.269)左边 $n = 1$ 项占主导, 就近似可以得到

$$e^{-\frac{\pi^2 a t}{R^2}} \approx \frac{1}{4}.$$

由这个结果又可以近似估算出 $n = 2$ 项大约为 $-\frac{1}{4^4}$ 。为了获得更好的精度, 我们把 $n = 2$ 项的 (大约) 贡献算进去, 就有

$$t \approx -\frac{R^2}{\pi^2 a} \ln \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^4} \right) = 0.1389 \frac{R^2}{a}.$$

这和计算机给出的数值解 $0.138785 \frac{R^2}{a}$ 非常接近。

例题 70: 内半径为 0.1m, 外半径为 0.2m 的均匀空心球。其材质的热传导方程参数为 $a = 10^{-4}\text{m}^2\text{s}^{-1}$; 其初始温度为 0°C 。把它投入一个标准大气压下的 一大锅沸水中, 经过多少秒之后内壁温度可以到达 99°C ? (结果请至少精确到秒)

解答: 记 $T_0 = 100^\circ\text{C}$, $R = 0.1\text{m}$, 并令 $u = T - T_0$ (即去除稳定解), 则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - a\nabla^2 u &= 0, \\ u|_{r=2R} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R} &= 0, \\ u|_{t=0} &= -T_0, \end{aligned} \tag{11.270}$$

由对称性知道可以把 u 展开为 $j_0(kr)e^{-ak^2t}$ 和 $n_0(kr)e^{-ak^2t}$ 的线性组合。而

$$j_0(kr) = \frac{\sin(kr)}{kr}; n_0(kr) = -\frac{\cos(kr)}{kr},$$

的线性组合要满足 $r = 2R$ 处为零, $r = R$ 处对 r 的偏导数为零, 只有下述可能性:

$$\frac{\sin \frac{\mu_i(r-2R)}{R}}{r},$$

μ_i 是按从小到大排列的第 i 个满足

$$\tan \mu + \mu = 0$$

的正实数根。

现在令

$$u = \sum_i c_i \frac{\sin \frac{\mu_i(r-2R)}{R}}{r} e^{-\frac{a\mu_i^2 t}{R^2}},$$

根据初始条件

$$\sum_i c_i \frac{\sin \frac{\mu_i(r-2R)}{R}}{r} = -T_0$$

剩下的问题就是用上面的等式, 计算正交展开的系数 c_i 。

根据谐函数的正交定理

$$\int_R^{2R} \frac{\sin \frac{\mu_i(r-2R)}{R}}{r} \frac{\sin \frac{\mu_j(r-2R)}{R}}{r} r^2 dr = \delta_{ij} \mathcal{N}_i,$$

其中 \mathcal{N}_i 是需要花点精力计算的归一化因子:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_i &= \int_R^{2R} \sin^2 \frac{\mu_i(r-2R)}{R} dr \\ &= \frac{R}{2} \left(1 - \frac{\sin 2\mu_i}{2\mu_i} \right) \\ &= \frac{R}{2} \left(1 - \frac{2 \tan \mu_i}{2\mu_i(1 + \tan^2 \mu_i)} \right) \\ &= \frac{R(2 + \mu_i^2)}{2(1 + \mu_i^2)}.\end{aligned}$$

于是根据初始条件进行投影得到:

$$\begin{aligned}c_i &= -\frac{T_0}{\mathcal{N}_i} \int_R^{2R} \frac{\sin \frac{\mu_i(r-2R)}{R}}{r} r^2 dr \\ &= \frac{T_0}{\mathcal{N}_i} \frac{R}{\mu_i} \left[r \cos \frac{\mu_i(r-2R)}{R} \Big|_R^{2R} - \int_R^{2R} \cos \frac{\mu_i(r-2R)}{R} dr \right] \\ &= \frac{T_0}{\mathcal{N}_i} \frac{R}{\mu_i} \left[(2 - \cos \mu_i)R - \frac{R}{\mu_i} \sin \frac{\mu_i(r-2R)}{R} \Big|_R^{2R} \right] \\ &= \frac{T_0}{\mathcal{N}_i} \frac{R}{\mu_i} \left[(2 - \cos \mu_i)R - \frac{R}{\mu_i} \sin \mu_i \right] \\ &= \frac{2T_0R^2}{\mathcal{N}_i\mu_i} \\ &= \frac{4T_0R(1 + \mu_i^2)}{\mu_i(2 + \mu_i^2)}\end{aligned}$$

最后结果就是

$$T = T_0 \left[1 + 4 \sum_i \frac{(1 + \mu_i^2)}{\mu_i(2 + \mu_i^2)} \frac{R}{r} \sin \frac{\mu_i(r-2R)}{R} e^{-\frac{a\mu_i^2 t}{R^2}} \right].$$

取其衰减最慢的一项作为近似, 在内壁 $r = R$:

$$1 - \frac{4(1 + \mu_1^2) \sin \mu_1}{\mu_1(2 + \mu_1^2)} e^{-\frac{a\mu_1^2 t}{R^2}} \approx 0.99$$

于是我们需要明确地求出 μ_1 。

为了求解

$$\tan \mu + \mu = 0$$

简单地画 $y = \tan \mu$ 和 $y = -\mu$ 的图, 并观察交点分布, 可以判断 $\frac{\pi}{2} < \mu_1 < \pi$ 。

不妨设 $\mu_1 = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$ ($0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$), 则可以得到

$$\tan \varepsilon = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \varepsilon}.$$

作为粗略的近似,我们先忽略右边的 ε , 求出零阶近似解: $\varepsilon \approx \arctan \frac{2}{\pi} = 0.5669$.

然后把零阶近似解代入到右边求出一阶近似解: $\varepsilon \approx \arctan \frac{1}{\frac{\pi}{2}+0.567} = 0.43755$.

再迭代一次得到二阶近似: $\varepsilon \approx \arctan \frac{1}{\frac{\pi}{2}+0.43755} = 0.46198$.

再迭代一次, 得到三阶近似: $\varepsilon \approx \arctan \frac{1}{\frac{\pi}{2}+0.46198} = 0.45719$.

再迭代一次, 得到四阶近似: $\varepsilon \approx \arctan \frac{1}{\frac{\pi}{2}+0.46198} = 0.45811$.

反正都迭代那么多次也不在乎多一次了: $\varepsilon \approx \arctan \frac{1}{\frac{\pi}{2}+0.45811} = 0.45793$.

再迭代一次反正也不会死人: $\varepsilon \approx \arctan \frac{1}{\frac{\pi}{2}+0.45793} = 0.45796$.

这样我们得到 $\mu_1 \approx \frac{\pi}{2} + \varepsilon \approx 2.02876$.

于是由

$$\frac{4(1 + \mu_1^2) \sin \mu_1}{\mu_1(2 + \mu_1^2)} e^{-\frac{a\mu_1^2 t}{R^2}} \approx 0.01$$

可以反解出

$$t = \frac{R^2}{a\mu_1^2} \ln \frac{400(1 + \mu_1^2) \sin \mu_1}{\mu_1(2 + \mu_1^2)} \approx 1.214 \frac{R^2}{a} = 121.4s$$

在本节的最后, 我们来研究一下球贝塞尔函数的递推公式, 极限行为和归一化问题。首先根据定义容易得到

$$\frac{d}{dx} [x^{\ell+1} j_{\ell}(x)] = x^{\ell+1} j_{\ell-1}(x) \quad (11.271)$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-\ell} j_{\ell}(x)] = -x^{-\ell} j_{\ell+1}(x) \quad (11.272)$$

或者等价地

$$j_{\ell-1}(x) + j_{\ell+1}(x) = \frac{2\ell+1}{x} j_{\ell}(x) \quad (11.273)$$

$$\ell j_{\ell-1}(x) - (\ell+1) j_{\ell+1}(x) = (2\ell+1) j'_{\ell}(x) \quad (11.274)$$

显然, 这些递推公式对第二类球贝塞尔函数也成立。

两类贝塞尔函数的极限行为有所不同, 在 $x \rightarrow 0$ 时,

$$j_{\ell}(x) = \frac{1}{(2\ell+1)!!} x^{\ell} \left[1 - \frac{x^2}{2(2\ell+3)} + \frac{x^4}{8(2\ell+3)(2\ell+5)} - \frac{x^6}{48(2\ell+3)(2\ell+5)(2\ell+7)} + \dots \right] \quad (11.275)$$

$$n_{\ell}(x) = -(2\ell-1)!! x^{-\ell-1} \left[1 + \frac{x^2}{2(2\ell-1)} + \frac{x^4}{8(2\ell-1)(2\ell-3)} + \frac{x^6}{48(2\ell-1)(2\ell-3)(2\ell-5)} + \dots \right] \quad (11.276)$$

这里的双阶乘符号 $(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)(2n-3)\dots\cdot 3\cdot 1$, $(2n)!! = 2n(2n-2)(2n-4)\dots\cdot 4\cdot 2$, 并约定 $0!! = (-1)!! = 1$ 。

对应于第一类贝塞尔函数的三个正交定理, 我们有如下类似的结论。

第一类球贝塞尔函数的第一正交定理: 设 μ_i, μ_j 是 j_ℓ 从小到大排列的第 i 个和第 j 个正实数根, 则

$$\int_0^1 s^2 j_\ell(\mu_i s) j_\ell(\mu_j s) ds = \delta_{ij} \frac{[j_{\ell+1}(\mu_i)]^2}{2}. \quad (11.277)$$

第一类球贝塞尔函数的第二正交定理: 设 μ_i, μ_j 是 j_ℓ 从小到大排列的第 i 个和第 j 个正实数极值点, 则

$$\int_0^1 s^2 j_\ell(\mu_i s) j_\ell(\mu_j s) ds = \delta_{ij} \frac{\left(1 - \frac{\ell(\ell+1)}{\mu_i^2}\right) [j_\ell(\mu_i)]^2}{2}. \quad (11.278)$$

第一类球贝塞尔函数的第三正交定理: 设 k_1, k_2 均为正数, 则

$$\int_0^\infty j_\ell(k_1 r) j_\ell(k_2 r) r^2 dr = \frac{\pi}{2k_1^2} \delta(k_1 - k_2). \quad (11.279)$$

这里的 (11.277) 和 (11.279) 都可以把 j_ℓ 转化为 $J_{\ell+1/2}$ 简单证明。(11.278) 可以使用谐函数的归一化定理(11.8)以及 ℓ 阶球贝塞尔函数满足的微分方程 $y'' + \frac{2}{x}y' + \left(1 - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\right)y = 0$ 来证明。

11.8 第11章习题

习题 126: 证明: 类贝塞尔方程

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1-2\alpha}{x} \frac{dy}{dx} + \left(\beta^2 \gamma^2 x^{2\gamma-2} + \frac{\alpha^2 - v^2 \gamma^2}{x^2} \right) y = 0$$

在 $x > 0$ 范围内有两个线性无关解: $x^\alpha J_\nu(\beta x^\gamma)$ 和 $x^\alpha N_\nu(\beta x^\gamma)$.

习题 127: 对任意实数 ν , 证明 J_ν 和 $J_{\nu+1}$ 的正实数零点是相间分布的。也就是说, J_ν 的两个相邻的正实数零点间有且仅有一个 $J_{\nu+1}$ 的零点, 反之亦然。

提示: 用递推公式以及罗尔定理。

习题 128: 已知 $\nu > -1$, $\mu > 0$, 且 $J_\nu(\mu) = 0$ 。计算积分

$$\int_0^1 s [J_{\nu+1}(\mu s)]^2 ds.$$

提示: $s = s^{\nu+1} s^{-\nu}$.

习题 129: 计算 $J_2(x)$ 的所有正实数零点 μ_1, μ_2, \dots 的平方倒数和

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_i^2}$$

以及四次方倒数和

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_i^4}.$$

提示: 在 $\frac{8J_2(x)}{x^2} = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\mu_i^2}\right)$ 两边比较对应项系数。

习题 130: 设函数 $f(x) = x^\alpha J_m(x)$ (这里的 α 为实数, m 为非负整数) 在 $x = \mu$ 和 $x = \nu$ 均取到极值, 且 $\mu > \nu > 0$ 。请证明

$$\int_0^1 x J_m(\mu x) J_m(\nu x) dx = 0.$$

提示: 用谐函数正交定理。

习题 131: 对 $m \geq 0, r \geq 0$ 以及实数 t , 证明

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{k^2 + m^2} t) \cos(kr)}{\sqrt{k^2 + m^2}} dk = \begin{cases} \frac{\pi}{2} J_0(m\sqrt{t^2 - r^2}), & \text{if } t > r \\ 0, & \text{if } |t| < r \\ -\frac{\pi}{2} J_0(m\sqrt{t^2 - r^2}), & \text{if } t < -r \end{cases} \quad (11.280)$$

提示: 由于被积量为 t 的奇函数, 不妨只讨论 $t > 0$ 的情况。做变量替换 $k \rightarrow m \sinh u$, 并考虑闭合围道 $R + i\pi \rightarrow i\pi \rightarrow 0 \rightarrow R \rightarrow R + i\pi$ ($R \rightarrow \infty$) 上的积分。

注意为了保证 $R \rightarrow R + i\pi$ 上积分趋向于零: 当 $t < r$ 时要选取被积函数为 $e^{imt \cosh z + imr \sinh z} - e^{imr \sinh z - imt \cosh z}$ (这时容易验证 $0 \rightarrow i\pi$ 上积分也为零); 当 $t > r$ 时要选取被积函数为 $e^{imt \cosh z + imr \sinh z} + e^{imt \cosh z - imr \sinh z}$, 这时计算 $0 \rightarrow i\pi$ 上的积分要用到 (11.83)。

习题 132: 计算不定积分

$$\int x [J_\nu(x)]^2 dx.$$

提示: 利用(11.125), 或者在 (11.66)中令 $a = 1, b = 1 + \varepsilon$ 并令 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 。

习题 133: 对 $\mu^2 \neq \nu^2$, 计算不定积分

$$\int \frac{J_\mu(x) J_\nu(x)}{x} dx.$$

提示: 利用贝塞尔方程。

习题 134: 证明: 对 $\nu > 0$, 证明:

$$\int_0^{\infty} \frac{[J_\nu(x)]^2}{x} dx = \frac{1}{2\nu}.$$

提示: 利用上一题结论, 并令 $\mu \rightarrow \nu$ 。

习题 135: 计算不定积分

$$\int \frac{dx}{x \{ [J_\nu(x)]^2 + [N_\nu(x)]^2 \}}.$$

提示: 利用朗斯基行列式。

习题 136: 对 $s > 0$, 证明任意阶的第一类贝塞尔函数的积分表示

$$J_\nu(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\nu\theta - s \sin \theta) d\theta - \frac{\sin(\nu\pi)}{\pi} \int_0^\infty e^{-s \sinh t - \nu t} dt.$$

提示: 考虑如图 11.6 中的围道上的 $e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})} z^{-\nu-1}$ 的积分; 做变量替换 $t = \frac{s}{2}$, 把得到的表达式中的 $e^{-\frac{s^2}{4t}}$ 级数展开, 最后用 (4.104) 得到展开系数中的 Γ 函数。

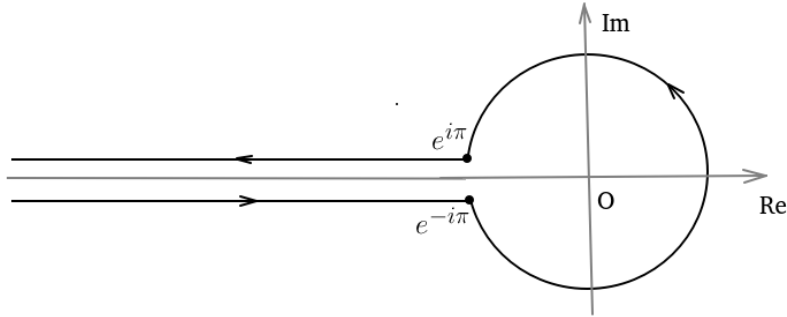


Figure 11.6: 题 136 图

习题 137: 利用上一题的结论推导任意阶第一类贝塞尔函数在无穷远处的渐近公式。

习题 138: 对 $\nu > -1$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ 证明

$$\int_0^\infty J_\nu(x) e^{ix \sin \varphi} dx = \frac{e^{i\nu\varphi}}{\cos \varphi}. \quad (11.281)$$

(这个结论非常有用, 如令 $\varphi = 0$ 就能导出 $\int_0^\infty J_\nu(x) dx = 1$, 又如令 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ 就能计算 $\int_0^\infty J_\nu(x) \sin \frac{x}{2} dx$, 等等。)

提示:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})} z^{-\nu-1} dz,$$

其中围道 C 如图 11.6 所示。

然后通过交换积分次序的方法证明

$$\int_0^\infty J_\nu(x) e^{(i \sin \varphi - \varepsilon)x} dx = \frac{e^{i\nu\varphi}}{\cos \varphi}.$$

这里添加的 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 是为了改善积分收敛性 (这个技巧在下一章还会用到)。

在证明的过程中要注意: 围道两个端点被割线分离, 不能直接应用留数定理, 而需要回到最初证明洛朗定理那样 (见(3.6)) 把 $\frac{1}{z-\alpha}$ (这里的 α 是被积函数的奇点) 进行几何级数展开。

证明的最后一步要用到 $e^{iv\varphi}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上按正交基 $e^{im\varphi}$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 的展开。

习题 139: 一个半径为 R , 周边固定的均匀圆形薄膜, 其横向小振动的波速参数为 a 。一开始薄膜各处均处于静止, 横向小位移为

$$u|_{t=0} = A \frac{r}{R} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \cos \theta,$$

这里的 (r, θ) ($0 \leq r \leq R$) 是以薄膜中心为原点建立的极坐标, A 为常量。请计算之后薄膜的横向小振动 $u(r, \theta, t)$ 。

习题 140: 有一个半径为 $R = 0.1\text{m}$, 材质的热传导方程参数为 $a = 10^{-4}\text{m}^2\text{s}^{-1}$ 的孤立、均匀薄圆盘。初始时刻上半个圆盘 (极坐标 $0 \leq \theta < \pi$) 的温度为 400K , 下半个圆盘 (极坐标 $\pi \leq \theta < 2\pi$) 的温度为 300K 。经过一分钟之后, 上半圆盘的最高边缘, 即 $r = R, \theta = \frac{\pi}{2}$ 处, 温度是多少? (请计算至少精确到 1K)

习题 141: $\sin \theta e^{i\phi} Y_{4,2}(\theta, \phi)$ 可以写成哪几个 (同样以 θ, ϕ 为宗量的) 球面谐函数的线性组合?

习题 142: $\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{7,3}(\theta, \phi)$ 可以写成哪几个 (同样以 θ, ϕ 为宗量的) 球面谐函数的线性组合?

习题 143: 计算

$$\left[Y_{5,1} \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right) \right]^2 + \left[Y_{5,2} \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right) \right]^2 + \left[Y_{5,3} \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right) \right]^2 + \left[Y_{5,4} \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right) \right]^2$$

的值。

习题 144: 计算积分

$$\int_0^1 x^2 P_6(x) P_8(x) dx.$$

习题 145: 计算积分

$$\int_{-1}^1 P_\ell(x) \ln(1-x) dx$$

习题 146: 计算勒让德函数的导函数 $P'_{100}(1)$ 的值。

习题 147: 限定 ℓ 为整数, 计算极限

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{[J_0(\ell)]^2 + [N_0(\ell)]^2}{[P_{2\ell}(0)]^2}.$$

习题 148: 证明: ℓ 阶勒让德多项式的所有 ℓ 个零点都在区间 $(-1, 1)$ 内。

习题 149: 设非负整数 $m \leq n$, 证明

$$P_m(x)P_n(x) = \sum_{k=0}^m \frac{(2n-2m+4k+1)D_k D_{m-k} D_{n-m+k}}{(2n+2k+1)D_{n+k}} P_{n-m+2k}(x),$$

其中 $D_\ell \equiv \frac{(2\ell)!}{(\ell!)^2}$. 特别地, 当 $m=1$ 时, 该公式退化为(11.237). 当 $m=2$ 时, 对 $n \geq 2$ 有下述递推公式:

$$P_2(x)P_n(x) = \frac{3n(n-1)}{2(2n+1)(2n-1)} P_{n-2}(x) + \frac{n(n+1)}{(2n+3)(2n-1)} P_n(x) + \frac{3(n+1)(n+2)}{2(2n+1)(2n+3)} P_{n+2}(x). \quad (11.282)$$

习题 150: 证明

$$n_\ell(x) = (-1)^{\ell+1} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-\ell-1/2}(x).$$

习题 151: 证明

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell (2\ell+1) [j_\ell(x)]^2 = \frac{\sin(2x)}{2x}. \quad (11.283)$$

习题 152: 铀块里的中子数密度 $n(\mathbf{x}, t)$ 除了随机扩散行为 (类似于固体中热传导) 之外, 还存在自我增殖现象, 具体满足的方程是:

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D \nabla^2 n = \beta n. \quad (11.284)$$

这里的常量 D 是扩散率, β 是净增殖率. 计算球形铀块的零界半径 (即内部 n 稳定不变时铀块的最小半径).

习题 153: 一个半径为 R 的孤立均匀金属球, 导热系数为 λ , 单位体积比热为 c . 记 r 为到球心的距离, 一开始 $t=0$ 时刻球内各处的温度为 $T(r) = T_0 \left(1 + \frac{r}{R}\right)$. 计算球内各处温度随时间的变化.

习题 154: 一个半径为 R 的孤立均匀半球, 其材质的导热系数为 λ , 单位体积比热为 c . 记一开始 $t=0$ 时刻球内各处的温度为 $T|_{t=0} = T_0 \frac{z^2}{R^2}$, 这里 z 是到底面的距离. 计算球内各处温度随时间的变化.

习题 155: 因为简并本征值的本征矢量空间的基的选取是任意的, 所以同样的 k 对应的不同坐标系的谐函数可以互相线性表示出来. 对直角坐标系和球坐标系而言, (11.265)给出了轴对称的情况. 请利用球面谐函数的加法公式把这个结果推广到任意的平面波:

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} i^\ell Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{x}}) j_\ell(kr), \quad (11.285)$$

其中 $r = |\mathbf{x}|$, $\hat{\mathbf{x}}$ 和 $\hat{\mathbf{k}}$ 分别是 \mathbf{x} 和 \mathbf{k} 方向的单位矢量.

习题 156: 设 $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ 为两个长度和方向均固定的三维矢量, \mathbf{x}_1 和 \mathbf{x}_2 是两个长度固定, 互相夹角也固定的随机三维矢量。证明: $e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_1} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_2}$ 的期待值为

$$\langle e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_1} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_2} \rangle = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell (2\ell + 1) P_\ell(\hat{\mathbf{k}}_1 \cdot \hat{\mathbf{k}}_2) P_\ell(\hat{\mathbf{x}}_1 \cdot \hat{\mathbf{x}}_2) j_\ell(k_1 x_1) j_\ell(k_2 x_2), \quad (11.286)$$

这里 $k_1 \equiv |\mathbf{k}_1|$, $\hat{\mathbf{k}}_1 \equiv \frac{\mathbf{k}_1}{k_1}$; 其余几个符号类似定义。

12. 非零边界条件和格林函数方法

我们现在来集中讨论当边界条件不是零（齐次）边界条件时如何求解数理方程。一个总体的思路是“把边界条件齐次化”：寻找一个满足边界条件（但不满足初始条件）的特解，减去这个特解后边界条件就转化为齐次的了。

对热传导方程问题，我们通常是求出稳态解作为满足方程和边界条件的特解。前面已经介绍过很多个例子了。下面我们来分别讨论泊松方程和波动方程。

12.1 非零边界条件的泊松方程问题

对于泊松方程，求解的思路是先寻找一个满足泊松方程，但不满足边界条件的特解。减去特解之后，问题转化为求解满足非零边界条件的无源泊松方程 $\nabla^2\Psi = 0$ 。也就是求拉普拉斯算符的本征值为零（ $k = 0$ ）的本征函数。我们可以预先找好这样的本征函数的一族通解，然后通过线性叠加来得到满足要求的非零边界条件。

$k = 0$ 的拉普拉斯算符本征函数往往可以通过**对谐函数的通解取 $k \rightarrow 0^+$ 极限**或者**对谐函数的通解取虚宗量**获得。

12.1.1 取 $k \rightarrow 0^+$ 极限的方法

先看谐函数取 $k = 0^+$ 极限的方法。在极坐标系中，对圆盘或者扇形区域内谐函数的通解

$$J_\nu(kr) [A \cos(\nu\theta) + B \sin(\nu\theta)], \quad (\nu \geq 0)$$

取 $k \rightarrow 0^+$ 的极限，忽略归一化系数（我们下面给出的结果都不做归一化），就得到

在圆盘或者扇形区域内 $k = 0$ 的拉普拉斯算符本征函数:

$$r^\nu [A \cos(\nu\theta) + B \sin(\nu\theta)], \quad (\nu \geq 0) \quad (12.1)$$

对要求满足周期性边界条件的圆盘, ν 必须取整数。

用同样的方法, 可以得到:

在圆环或者扇环区域内 $k = 0$ 的拉普拉斯算符本征函数:

$$[Ar^\nu + Br^{-\nu}] [C \cos(\nu\theta) + D \sin(\nu\theta)], \quad (\nu > 0) \quad (12.2)$$

以及 ($\nu = 0$ 时的情况)

$$A + B \ln r \quad (12.3)$$

对要求满足周期性边界条件的圆环, ν 必须取整数 (包含 $\nu = 0$ 时的 $A + B \ln r$ 解)。

从这一节开始, 由于不再受零边界条件的限制, 我们也考虑不封闭的区域。一般我们假设物理量在无穷远处不能发散, 所以当考虑一个圆外部的区域时, 有

在圆的外部区域内 $k = 0$ 的拉普拉斯算符本征函数:

$$r^{-m} [A \cos(m\theta) + B \sin(m\theta)], \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (12.4)$$

对球坐标系的谐函数取 $k \rightarrow 0^+$ 的极限可以获得如下的结果:

在实心球区域内 $k = 0$ 的拉普拉斯算符本征函数:

$$r^\ell Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \quad (12.5)$$

在空心球区域内 $k = 0$ 的拉普拉斯算符本征函数:

$$[Ar^\ell + Br^{-\ell-1}] Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \quad (12.6)$$

在球外部区域内 $k = 0$ 的拉普拉斯算符本征函数:

$$r^{-\ell-1} Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \quad (12.7)$$

直角坐标系的谐函数通解 $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ 如果取 $k \rightarrow 0^+$ 只能得到常数。这说明, 用 $k \rightarrow 0^+$ 方法获得的 $k = 0$ 的拉普拉斯算符本征函数可能是不完备的。

12.1.2 取虚宗量方法

对二维直角坐标系的谐函数通解 $\cos(k_x x) \cos(k_y y)$, 我们可以让 $k_x = b, k_y = ib$ (即取虚宗量), 使得 $k^2 = k_x^2 + k_y^2 = 0$, 从而获得 $k = 0$ 的本征函数 $\cos(bx) \cosh(by)$ 。在直角坐标系这样形式的 $k = 0$ 的拉普拉斯算符本征函数当然可以写出很多, 例如 $\sin(bx) \sinh(by)$, $\cosh(bx) \sin(by)$, $\sin(ax) \cos(by) \cosh(\sqrt{a^2 + b^2} z)$ 等等。

在柱坐标系, 可以对谐函数通解 $J_\nu(k_{2D} r) \cos(\nu\theta) \cos(k_z z)$ 取 k_z 为虚宗量获得 $k = 0$ 的拉普拉斯算符本征函数 $J_\nu(br) \cos(\nu\theta) \cosh(bz)$, 也可以取 k_{2D} 为虚宗量获得 $k = 0$ 的拉普拉斯算符本征函数 $J_\nu(ibr) \cos(\nu\theta) \cos(bz)$ 等。

特别地, 虚宗量的贝塞尔函数有专门的符号来表示:

第一类虚宗量贝塞尔函数 I_ν 的定义:

$$I_\nu(x) \equiv i^{-\nu} J_\nu(ix) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}. \quad (12.8)$$

在定义前面额外多乘了个 $i^{-\nu}$ 是为了让结果总是为实数。这里的虚数单位 i 都要理解为 $e^{\frac{\pi}{2}i}$ 。我之所以偷懒写成 i , 是为了让表达式看起来更简短好记一些。

如果直接 (并且不严谨地) 把贝塞尔函数的无穷远处渐近公式(11.62)应用到虚宗量的情形, 可以粗略地估算出 $I_\nu(x)$ 在无穷远处 ($x \rightarrow \infty$) 的渐近行为大概是

$$I_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cosh x \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}. \quad (12.9)$$

对整数阶的 I_m ($m \in \mathbb{Z}$), 容易从级数表达式直接验证它有和 J_m 类似的性质:

$$I_{-m}(x) = I_m(x), \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (12.10)$$

你可能期待我如法炮制一个 $N_\nu(ix)$ 之类的, 具有 $\sim \sinh x$ 渐近行为的第二类虚宗量贝塞尔函数, 但这个方案并不理想。因为首先 x 很大时 $\sinh x$ 和 $\cosh x$ 几乎是相同的, 而且同样在 $x \rightarrow \infty$ 时发散。我们在物理问题中往往会对“在无穷远处趋于零”的解具有特别的兴趣, 所以其实我希望“第二类虚宗量贝塞尔函数”具有类似于 $\sim e^{-x}$ 的渐近行为。文献中常用的定义是这样的——

第二类虚宗量贝塞尔函数 K_ν 的定义:

$$K_\nu(x) \equiv \frac{\pi}{2} \lim_{\alpha \rightarrow \nu} \frac{I_{-\alpha}(x) - I_\alpha(x)}{\sin(\alpha\pi)}. \quad (12.11)$$

当 ν 不是整数时, 上式右边直接可以跳过取极限的过程令 $\alpha = \nu$ 。

这个定义中的 $\frac{\pi}{2}$ 因子可能是因为历史原因加上去的。撇开这个令人不十分愉快的可能是历史遗留的问题不谈, 我们来理解下为什么 K_ν 具有 e^{-x} 的无穷远处渐近行为。因为贝塞尔函数连续依赖于 ν , 我们只需要讨论当 ν 不是整数时的情况。

根据汉克耳函数的定义, 容易得出

$$e^{\frac{(\nu+1)\pi}{2}i} H_\nu^{(1)}(x) = \frac{e^{\frac{\nu\pi}{2}i} J_{-\nu}(x) - e^{-\frac{\nu\pi}{2}i} J_\nu(x)}{\sin(\nu\pi)}. \quad (12.12)$$

把 x 换成 ix (这里的 i 仍然要理解为 $e^{i\pi/2}$), 就有

$$e^{\frac{(\nu+1)\pi}{2}i} H_\nu^{(1)}(ix) = \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin(\nu\pi)}. \quad (12.13)$$

于是我们得到了 (当 x 是实数时) $K_\nu(x)$ 和 $H_\nu^{(1)}(x)$ 的关系:

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} e^{\frac{(\nu+1)\pi}{2}i} H_\nu^{(1)}(ix). \quad (12.14)$$

利用 $H^{(1)}$ 的渐近表达式(11.64), 就有 (当 $x \rightarrow +\infty$ 时)

$$K_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \quad (12.15)$$

我们感兴趣的通常是 $\nu \geq 0$ 的情形: 因为 K_ν 里包含了第二类贝塞尔函数的成分, 所以它在 $x=0^+$ 处是发散的。而 I_ν 显然在 $x=0^+$ 处是有限的。这样我们就能根据解在 $x=0^+$ 的性质和 $x=+\infty$ 处的性质选择 I_ν , K_ν 或者它们的线性组合。例如, 在圆柱内部, 我们会使用 I_m ; 在无限长的圆柱外部, 我们会使用 K_m ($m=0,1,2,\dots$)。有限长的圆柱的外部是比较复杂的区域, 往往无法简单地用我们上面讨论的函数解决问题。

为了让你有更直观的印象, 图12.1和图12.2分别给出了 I_ν 和 K_ν 的几个例子。

从贝塞尔函数的性质, 可以很直接地得到虚宗量贝塞尔函数的性质。例如虚宗量贝塞尔函数满足的递推公式

$$\frac{d}{dx} [x^\nu I_\nu(x)] = x^\nu I_{\nu-1}(x); \quad \frac{d}{dx} [x^{-\nu} I_\nu(x)] = x^{-\nu} I_{\nu+1}(x). \quad (12.16)$$

和

$$\frac{d}{dx} [x^\nu K_\nu(x)] = -x^\nu K_{\nu-1}(x); \quad \frac{d}{dx} [x^{-\nu} K_\nu(x)] = -x^{-\nu} K_{\nu+1}(x). \quad (12.17)$$

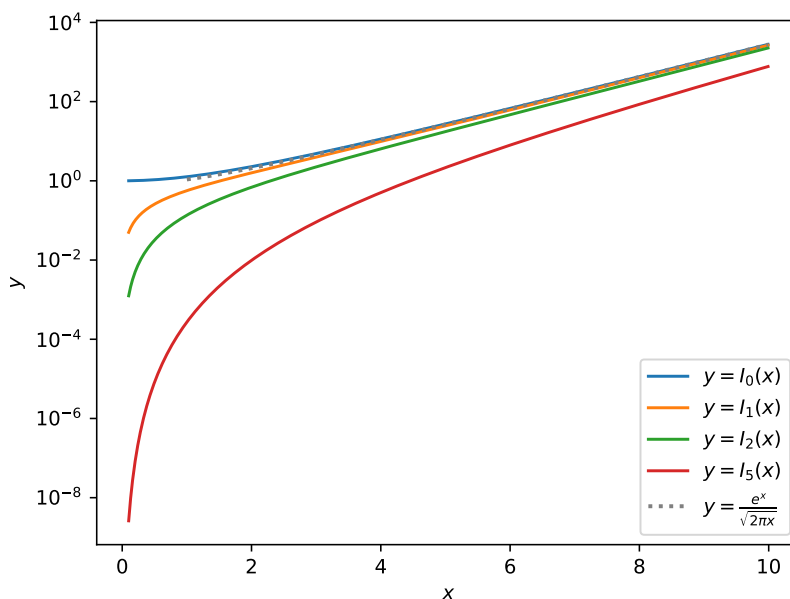


Figure 12.1: 第一类虚宗量贝塞尔函数的例子

以及 ν 阶虚宗量贝塞尔函数满足的微分方程:

$$\frac{d^2}{dx^2}f + \frac{1}{x} \frac{d}{dx}f + \left(-1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)f = 0, \quad (12.18)$$

这里的 f 可以是 I_ν , K_ν 或者它们的线性组合。

12.1.3 非齐次边界条件泊松方程求解举例

我们现在已经掌握了很多 $k=0$ 的拉普拉斯算符本征函数, 把这些函数进行线性组合, 就有可能找到满足边界条件的特解。我们来看几个例子。

例题 71: 把一个不带电的半径为 R 的金属球放进场强为 E 的匀强电场中, 求金属球表面的电荷密度分布。

解答: 取匀强电场方向为 z 轴建立球坐标系。

感应电荷在球外和球内产生的电势 u 必须满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u = 0, \quad r \neq R$$

因为感应电荷总量为零, 显然球心处 $u=0$ 。由此容易看出感应电荷在球内产生的电势为

$$u(r, \theta) = Er \cos \theta, \quad r < R$$

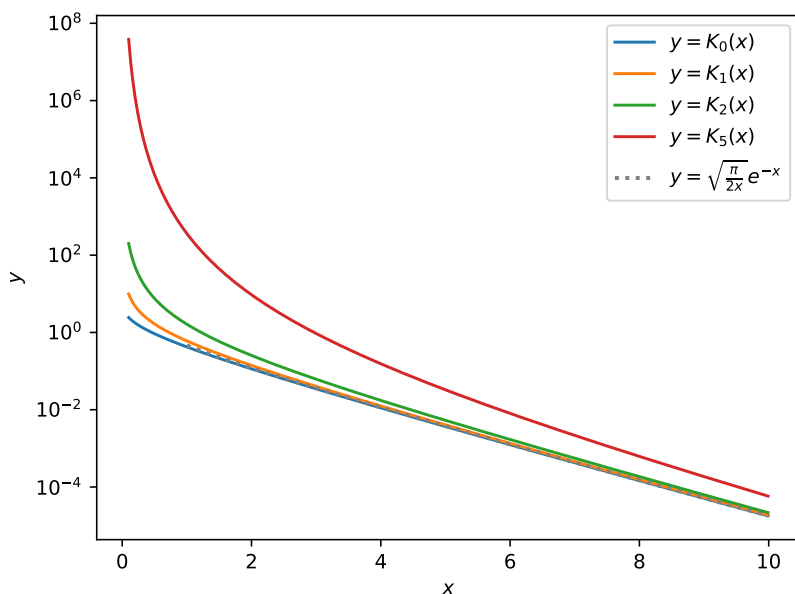


Figure 12.2: 第二类虚宗量贝塞尔函数的例子

这恰好是(12.5)中取 $\ell = 1, m = 0$ 的特殊情况。

由在球面上电势连续，以及感应电荷产生的电势在无穷远处为零的条件，得出感应电荷在球外产生的电势为

$$u(r, \theta) = E \frac{R^3}{r^2} \cos \theta, \quad r > R$$

(其他 $r^{-l-1} Y_{lm}(\theta, \phi)$ 形式的成分会导致球面内外 u 对 θ 的依赖性不同，所以都不出现)。

于是根据高斯定律，感应电荷面密度为

$$\sigma = \epsilon_0 \left(\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R-0} - \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R+0} \right) = 3\epsilon_0 E \cos \theta.$$

例题 72: 在半径为 R 的接地金属球外距离球心 a 处放置一个点电荷 Q ，计算静电平衡后空间的电势分布。

解答: 如图，以球心为原点建立球坐标系，并选取 z 轴方向使得点电荷 Q 在正 z 轴上。

设所有感应电荷产生的电势为 u 。由于感应电荷都在金属球表面上，所以在球外和

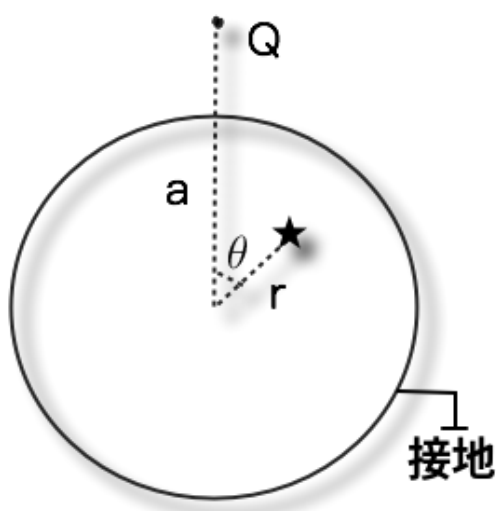


Figure 12.3: 例题 72 图

球内的区域 u 满足无源的泊松方程,

$$\nabla^2 u = 0, \quad \forall r \neq R. \quad (12.19)$$

根据(12.5), 在球内 u 可以分解成 $r^\ell Y_{\ell,m}(\theta, \phi)$ 的线性组合;

$$u|_{r < R} = \sum_{\ell,m} c_{\ell m} r^\ell Y_{\ell m}(\theta, \phi). \quad (12.20)$$

根据 (12.7), 在球外 u 可以分解成 $r^{-\ell-1} Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ 的线性组合。

$$u|_{r > R} = \sum_{\ell,m} d_{\ell m} r^{-\ell-1} Y_{\ell m}(\theta, \phi). \quad (12.21)$$

面电荷密度只能造成电场的突变, 无法造成电势的突变, 所以 (12.20) 和 (12.21) 在 $r \rightarrow R$ 时的极限必须相同, 也就是:

$$\sum_{\ell,m} c_{\ell m} R^\ell Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \sum_{\ell,m} d_{\ell m} R^{-\ell-1} Y_{\ell m}(\theta, \phi). \quad (12.22)$$

由于 $Y_{\ell m}$ 是完备的正交归一化函数组, 所以上式左右两边 $Y_{\ell m}$ 的系数必须相同。即

$$d_{\ell m} = c_{\ell m} R^{2\ell+1}. \quad (12.23)$$

静电平衡后, 在球内的总电势为零。也就是感应电荷在球内产生的 u 和点电荷 Q 在球内产生的电势恰好符号相反, 互相抵消:

$$u|_{r < R} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta}}. \quad (12.24)$$

根据勒让德多项式的母函数定理：

$$\begin{aligned}
 u|_{r < R} &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\theta}} \\
 &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0a\sqrt{1+\left(\frac{r}{a}\right)^2-2\frac{r}{a}\cos\theta}} \\
 &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0a}\sum_{\ell=0}^{\infty}P_{\ell}(\cos\theta)\left(\frac{r}{a}\right)^{\ell}. \\
 &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0a}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}Y_{\ell 0}(\theta,\phi)\left(\frac{r}{a}\right)^{\ell}.
 \end{aligned} \tag{12.25}$$

也就是

$$c_{\ell 0} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0a^{\ell+1}}\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}.$$

其余 $c_{\ell m}$ ($m \neq 0$) 均为零。(这显然是因为问题具有绕 z 轴的旋转对称性。)

根据(12.23)，我们可以写出在球外

$$\begin{aligned}
 u|_{r > R} &= -\frac{QR}{4\pi\epsilon_0ar}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}Y_{\ell 0}(\theta,\phi)\left(\frac{R^2}{ar}\right)^{\ell} \\
 &= -\frac{QR}{4\pi\epsilon_0ar}\sum_{\ell=0}^{\infty}P_{\ell}(\cos\theta)\left(\frac{R^2}{ar}\right)^{\ell} \\
 &= -\frac{QR}{4\pi\epsilon_0ar}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R^2}{ar}\right)^2-2\left(\frac{R^2}{ar}\right)\cos\theta}} \\
 &= -\frac{QR}{4\pi\epsilon_0a}\frac{1}{\sqrt{r^2+\frac{R^4}{a^2}-2\frac{R^2}{a}r\cos\theta}}
 \end{aligned} \tag{12.26}$$

因此球外的总电势为

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\theta}} - \frac{QR}{4\pi\epsilon_0a}\frac{1}{\sqrt{r^2+\frac{R^4}{a^2}-2\frac{R^2}{a}r\cos\theta}}. \tag{12.27}$$

想必你已经认出来了，(12.26)和在距离球心 $\frac{R^2}{a}$ 处的电量为 $-\frac{R}{a}Q$ 的镜像电荷产生的电势是相同的。我们现在使用的方法比镜像法复杂，但具有更好的普适性，可以解决更一般的问题。

上面例题解答过程中，如果预先判断问题具有绕 z 轴的旋转对称性，我们实际上可以一开始就设在球内

$$u|_{r < R} = \sum_{\ell=0}^{\infty}c_{\ell}\left(\frac{r}{R}\right)^{\ell}P_{\ell}(\cos\theta). \tag{12.28}$$

在球外

$$u|_{r>R} = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{\ell} \left(\frac{r}{R}\right)^{-\ell-1} P_{\ell}(\cos \theta). \quad (12.29)$$

在具有绕 z 轴对称性时, 只需要讨论勒让德多项式而无须涉及球面谐函数。这样的写法当然实际上并没有改变任何东西, 却在各种文献中非常流行, 可能是因为很多人都觉得勒让德多项式比球面谐函数看上去更亲切吧!

例题 73: 证明球面谐函数的加法公式

$$P_{\ell}(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\mathbf{n}_1) Y_{\ell m}(\mathbf{n}_2), \quad (12.30)$$

解答: 考虑在单位球面上的电荷产生的电势。在单位球内:

$$u(r, \mathbf{n}) = \sum_{\ell, m} c_{\ell m} r^{\ell} Y_{\ell m}(\mathbf{n}), \quad r < 1;$$

在单位球外:

$$u(r, \mathbf{n}) = \sum_{\ell, m} c_{\ell m} r^{-\ell-1} Y_{\ell m}(\mathbf{n}), \quad r > 1.$$

根据高斯定理算出单位球面上的电荷面密度为

$$\sigma(\mathbf{n}) = \epsilon_0 \sum_{\ell, m} (2\ell+1) c_{\ell m} Y_{\ell m}(\mathbf{n}). \quad (12.31)$$

然后考虑球面上 \mathbf{n}_1 处有点电荷的情况:

$$\sigma(\mathbf{n}) = Q \delta(\mathbf{n} - \mathbf{n}_1) = Q \sum_{\ell m} Y_{\ell m}^*(\mathbf{n}_1) Y_{\ell m}(\mathbf{n}). \quad (12.32)$$

注意这里我们是把 $\delta(\mathbf{n} - \mathbf{n}_1)$ 进行了球面谐函数展开, 展开系数为

$$\int d^2\mathbf{n} \delta(\mathbf{n} - \mathbf{n}_1) Y_{\ell m}^*(\mathbf{n}) = Y_{\ell m}^*(\mathbf{n}_1). \quad (12.33)$$

对比(12.31)和(12.32), 可以得到:

$$c_{\ell m} = \frac{Q}{(2\ell+1)\epsilon_0} Y_{\ell m}^*(\mathbf{n}_1).$$

即在球内的电势为

$$u(r, \mathbf{n}_2) = \frac{Q}{(2\ell+1)\epsilon_0} \sum_{\ell m} Y_{\ell m}^*(\mathbf{n}_1) Y_{\ell m}(\mathbf{n}_2) r^{\ell}, \quad r < 1.$$

另一方面, 根据库仑定律直接可以算出 (r, \mathbf{n}_2) 处的电势为

$$u(r, \mathbf{n}_2) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1+r^2-2r\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell} P_{\ell}(\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2)r^{\ell}.$$

比较 r^{ℓ} 的系数, 即得证。

注意如果有一组正交归一化的函数组, 我们总是能把 δ 函数进行类似于(12.32)这样的分解。但是, 要注意这样得到的分解式只在定义正交归一化的时所用的积分区间内成立。例如, 当你写出

$$\delta(x-x') = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{2} P_{\ell}(x)P_{\ell}(x') \quad (12.34)$$

时, 你要注意这个等式只对 $-1 < x' < 1$ 是成立的。因为当你求待定系数 $\delta(x-x') = \sum_{n=0}^{\infty} c_{\ell} P_{\ell}(x)$ 时, 积分

$$c_{\ell} = \frac{2\ell+1}{2} \int_{-1}^1 P_{\ell}(x)\delta(x-x')dx = \frac{2\ell+1}{2} P_{\ell}(x'), \quad (12.35)$$

显然仅当 $-1 < x' < 1$ 时才成立。

例题 74: 一个半径为 R , 高为 h , 导热系数为 λ 的均匀金属圆柱体两端通过和热库保持良好接触保持恒温 T_0 。圆柱面暴露在温度为 $T_1 < T_0$ (近似看成温度不变) 的空气中, 按照牛顿冷却定律散热: 即表面往外的热流密度

$$j = k(T - T_1).$$

这里的 k 是常量, T 是圆柱体表面温度。计算圆柱体内的温度稳定分布。

解答: 建立柱坐标系 (r, θ, z) 使得圆柱体所在区域为 $r \leq R, 0 \leq z \leq h$ 。根据对称性, 不妨设圆柱体内温度稳定分布为 $T(r, z)$, 则

$$\nabla^2 T = 0. \quad (12.36)$$

$$T|_{z=0} = T|_{z=h} = T_0. \quad (12.37)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{k}{\lambda} T\right)|_{r=R} = \frac{kT_1}{\lambda}. \quad (12.38)$$

令 $u(r, z) = T(r, z) - T_0$, 则

$$\nabla^2 u = 0. \quad (12.39)$$

$$u|_{z=0} = u|_{z=h} = 0. \quad (12.40)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{k}{\lambda} u\right)|_{r=R} = \frac{k(T_1 - T_0)}{\lambda}. \quad (12.41)$$

因为在 z 方向上边界条件成为了零边界条件, 我们准备在 z 方向上使用常规的谐函数。这样, 总的 $k^2 = 0$ 的本征函数就只能通过对垂直 z 方向的谐函数取虚宗量获得。考虑到问题绕 z 轴的旋转对称性, 我们用

$$I_0\left(\frac{n\pi}{h}r\right)\sin\frac{n\pi z}{h}$$

来线性组合得到 u 。令

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I_0\left(\frac{n\pi}{h}r\right)\sin\frac{n\pi z}{h}. \quad (12.42)$$

根据边界条件(12.41), 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[\frac{n\pi}{h} I_0'\left(\frac{n\pi}{h}R\right) + \frac{k}{\lambda} I_0\left(\frac{n\pi}{h}R\right) \right] \sin\frac{n\pi z}{h} = \frac{k(T_1 - T_0)}{\lambda}. \quad (12.43)$$

利用 $\sin\frac{n\pi z}{h}$ 的正交性, 容易得到

$$c_n = \frac{2}{h \left[\frac{n\pi}{h} I_0'\left(\frac{n\pi}{h}R\right) + \frac{k}{\lambda} I_0\left(\frac{n\pi}{h}R\right) \right]} \int_0^h \frac{k(T_1 - T_0)}{\lambda} \sin\frac{n\pi z}{h} dz. \quad (12.44)$$

计算积分后, 所有偶数 n 对应的 c_n 均为零。奇数 $n = 2m + 1$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) 对应的系数为

$$c_{2m+1} = \frac{4(T_1 - T_0)}{(2m+1)\pi \left[\frac{(2m+1)\pi\lambda}{hk} I_0'\left(\frac{(2m+1)\pi}{h}R\right) + I_0\left(\frac{(2m+1)\pi}{h}R\right) \right]} \quad (12.45)$$

最后的结果为:

$$T = T_0 + 4(T_1 - T_0) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{I_0\left(\frac{(2m+1)\pi}{h}r\right)\sin\frac{(2m+1)\pi z}{h}}{(2m+1)\pi \left[\frac{(2m+1)\pi\lambda}{hk} I_1\left(\frac{(2m+1)\pi}{h}R\right) + I_0\left(\frac{(2m+1)\pi}{h}R\right) \right]}. \quad (12.46)$$

这里我们利用了虚宗量贝塞尔函数的递推公式 $I_0' = I_1$ 。

12.2 非零边界条件的波动方程问题

对波动方程, 往往并不容易找到这样既满足方程, 又满足给定边界条件的特解。也并不容易找到满足无源方程的一族通解来进行线性迭加。如果实在找不到既满足方程又满足边界条件的特解, 就只能退而求其次, 寻找一个满足边界条件但是不满足方程的特解。把这样的特解从严格解中减去后, 能得到零边界条件, 但是方程就会变为有源的方程, 增加了求解的难度。我们来看这样一个例子:

例题 75: 讨论如何求解最一般的一维波动方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= S(x, t), \\ u|_{x=0} &= f(t), \\ u|_{x=L} &= g(t), \\ u|_{t=0} &= h(x), \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} &= w(x)\end{aligned}\tag{12.47}$$

解答: 先随便构造一个满足边界条件的特解:

$$f(t) + \frac{x}{L}(g(t) - f(t)).$$

令

$$u(x, t) = v(x, t) + f(t) + \frac{x}{L}(g(t) - f(t)).\tag{12.48}$$

则

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= S(x, t) - f''(t) + \frac{x}{L}(g''(t) - f''(t)), \\ v|_{x=0} &= 0, \\ v|_{x=L} &= 0, \\ v|_{t=0} &= h(x) - f(0) - \frac{x}{L}(f(0) - g(0)), \\ \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} &= w(x) - f'(0) - \frac{x}{L}(f'(0) - g'(0)).\end{aligned}\tag{12.49}$$

这是一个标准的零边界条件问题。下面的求解过程从略。

我们看到, 如果(随手写的)特解只满足边界条件而不满足方程, 边界条件齐次化之后会导致方程产生源, 增加求解的难度。不过, 如果运气好, 你也可能找到一个既满足方程, 又满足边界条件的特解。请看下面的例子:

例题 76: 求解一端固定, 另一端正弦驱动的弦振动:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \\ u|_{x=0} &= 0, \\ u|_{x=L} &= A \sin(\omega t), \\ u|_{t=0} &= 0, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} &= 0.\end{aligned}\tag{12.50}$$

这里的 ω 不是 $\frac{\pi}{L}$ 的整数倍。

解答: 考虑如下的满足边界条件又满足方程 (但不满足初始条件) 的特解:

$$A \sin(\omega t) \frac{\sin \frac{\omega x}{a}}{\sin \frac{\omega L}{a}}$$

令

$$u(x, t) = v(x, t) + A \sin(\omega t) \frac{\sin \frac{\omega x}{a}}{\sin \frac{\omega L}{a}},\tag{12.51}$$

则 $v(x, t)$ 满足

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0, \\ v|_{x=0} &= 0, \\ v|_{x=L} &= 0, \\ v|_{t=0} &= 0, \\ \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} &= -A\omega \frac{\sin \frac{\omega x}{a}}{\sin \frac{\omega L}{a}}\end{aligned}\tag{12.52}$$

$v(x, t)$ 显然可以用标准方法求解, 我跳过详细的过程, 直接给出最后的结果

$$u = \frac{A}{\sin \frac{\omega L}{a}} \left\{ \sin(\omega t) \sin \frac{\omega x}{a} + \frac{\omega L}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\operatorname{sinc} \left(\frac{\omega L}{a} + n\pi \right) - \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega L}{a} - n\pi \right) \right] \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi a t}{L} \right\}\tag{12.53}$$

这里的

$$\operatorname{sinc}(x) \equiv \frac{\sin x}{x}.\tag{12.54}$$

如 $\omega = \frac{n\pi a}{L}$, 则会发生共振现象, 你可以对 (12.53) 取极限获得正确的结果, 也可以采用前述(12.48)的方法求解。例如当 $\omega = \frac{\pi a}{L}$ 时, 结果为

$$u = A \left[-\frac{at}{L} \cos \frac{\pi at}{L} \sin \frac{\pi x}{L} - \frac{x}{L} \sin \frac{\pi at}{L} \cos \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{2\pi} \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi at}{L} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 1} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi at}{L} \right] \quad (12.55)$$

右边第一项的振幅正比于 t , 描述的就是发生共振时振幅失控增长的行为。

12.3 格林函数 (Green's Function)

迄今为止, 我们求解数理方程的思路都是把初始条件分解为一系列谐函数, 并利用每个谐函数都是独立演化的特点得到任意时刻的解。

现在我们换一个思路, 很多线性数理方程的问题可以看成“输入-线性处理-输出”的黑盒子程序。这里的重点是: 输出对于输入是线性依赖的。例如, 我们可以把一个点电荷看成输入信号, 它在空间产生的电势看成输出信号。中间的线性处理就是求解泊松方程。

如果我们知道了点电荷对应的输出信号 (显然物理专业的读者必须知道), 那么对任何的空间电荷分布 (输入信号), 我们都可以把它看成很多点电荷 (元输入信号) 的线性叠加, 然后把每个点电荷产生的 (元) 输出信号进行叠加, 就能得到结果。重点是: 在这个计算过程中, 我们跳过了泊松方程的求解。

所以, 我们抽象地定义

格林函数: 线性系统对单位脉冲的响应

可以说, 求解出了一个线性系统的格林函数, 就相当于完全地解决了这个线性系统的任何输入-输出问题。

问题是, 怎么求出线性系统的格林函数呢? 很多时候, 我们仍然要借助谐函数分解 (或者更一般地, 分离变量法) 的计算方法。不过, 一旦求出了格林函数, 之后对同一个线性系统的其他输入信号, 就不必再使用分离变量法计算输出信号了。

如果读者目前还处在“做题”的阶段 (比如本科生在学习《数学物理方法》课程时), 那么通常对同一个线性系统通常只需要求解一次输入-输出问题。这个阶段读者可能还会产生疑惑: 这时候格林函数还有用吗?

确实, 如果你对一个线性系统只准备求解一次输入-输出。那么很多情况下求解格林函数并不比求解原问题简单多少, 就没有必要去绕个圈。但是, 也有些格林函数更容易得到的例外情况, 我们下面就准备介绍这些格林函数。

12.3.1 泊松方程的格林函数

我们对点电荷产生的电势非常了解 (如果你不是物理专业的, 可以参考(9.2)的相关讨论), 具体地说就是:

三维无界泊松方程的格林函数: 三维无边界空间中, 点源泊松方程

$$\nabla^2 u = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (12.56)$$

的解是

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \quad (12.57)$$

任意电荷分布 $\rho(\mathbf{x})$ 可以看成点源的线性组合:

$$\rho(\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{x}_0 \rho(\mathbf{x}_0) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (12.58)$$

所以方程 $\nabla^2 u = \rho(\mathbf{x})$ 的解是格林函数的相同权重叠加:

$$u = \int d^3\mathbf{x}_0 \rho(\mathbf{x}_0) G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0) = \int d^3\mathbf{x}_0 \frac{\rho(\mathbf{x}_0)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}. \quad (12.59)$$

这些都是很平凡的物理常识。

我们也可以考虑有边界的区域内的格林函数问题。例如, 在接地金属球外放置点电荷引起的金属球外空间的电势(12.27) (这包含了感应电荷产生的电势), 也是一个格林函数。在接地金属球外放置任意的电荷分布, 产生的电势 (包含了感应电荷产生的电势) 都可以通过对(12.27)这个格林函数积分获得。

在图9.5中我们展示了如何计算在金属球壳内放置点电荷引起的球内电势 (包含了感应电荷产生的电势)。这个计算结果也是个格林函数。当金属球内有任意的电荷分布时, 可以通过把格林函数积分得到总电势。

12.3.2 热传导方程格林函数 I (瞬时点源)

一维无界热传导问题的格林函数: 一维无边界空间中, 在 x_0 处的初始温度脉冲 (也可看成瞬时点源) 产生的格林函数, 也就是满足

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (12.60)$$

$$u|_{t=0} = \delta(x - x_0) \quad (12.61)$$

的解是

$$G(x, t; x_0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4at}}. \quad (12.62)$$

容易直接把格林函数代入方程证明它满足热传导方程。另外取 $t \rightarrow 0^+$ 的极限也容易证明格林函数趋向于 $\delta(x-x_0)$ 。不过，这个解是怎么得到的呢？

对于无边界的区域，我们可以考虑把所有的谐函数 e^{ikx} ($k \in (-\infty, \infty)$) 进行线性叠加¹。这其实相当于把 u 进行傅里叶变换，或者从一个更加高级的观点来看，在傅里叶空间求解热传导方程。在傅里叶空间 $u(k, t)$ （现在我按照物理学家的习惯，不区分物理量在位置空间和傅里叶空间的符号）满足如下的方程和初始条件：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + ak^2 u = 0, \quad (12.63)$$

$$u|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx_0} \quad (12.64)$$

对固定的 k ，这实际上是给定初条件的常微分方程。容易解出

$$u(k, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx_0} e^{-ak^2 t}.$$

再进行傅里叶逆变换，就有

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x_0)-ak^2 t} dk \quad (12.65)$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4at}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at\left(k-i\frac{x-x_0}{2at}\right)^2} dk \quad (12.66)$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4at}} \sqrt{\frac{\pi}{at}} \quad (12.67)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4at}} \quad (12.68)$$

在计算过程中，我们用到了熟知的高斯积分 (3.31)。

有了格林函数，我们就可以处理一般的无边界热传导问题：

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0; \\ u|_{t=0} &= \phi(x). \end{aligned} \quad (12.69)$$

我们把“输入信号” $\phi(x)$ 看成多个单位脉冲的线性组合：

$$\phi(x) = \sum_{x_0} (\phi(x_0) dx_0) \delta(x-x_0).$$

写成积分形式也许你会更舒服

$$\phi(x) = \int \phi(x_0) \delta(x-x_0) dx_0.$$

¹注意，当我使用 $\cos(kx)$ 和 $\sin(kx)$ 时，是按照通常的约定 $k > 0$ 。这两个函数的线性叠加等价于 e^{ikx} 和 e^{-ikx} 的线性叠加。或者说，我可以简单地取消 $k > 0$ 的限制，直接考虑所有形如 e^{ikx} (k 允许取负值) 的谐函数就可以了。

问题的解就是把每个脉冲引起的响应 (格林函数) 做同样比例的线性迭加:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x_0) G(x, t; x_0) dx_0. \quad (12.70)$$

在 n 维的无边界热传导问题的格林函数是:

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0) = \frac{1}{(4\pi at)^{n/2}} e^{-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^2}{4at}}. \quad (12.71)$$

这里, 高维空间的格林函数相当于多个一维的格林函数的乘积。不过, 这只是因为热传导问题的格林函数的特殊形式产生的巧合。对一般的问题你并不能简单地通过把多个一维的格林函数相乘得到高维的格林函数。

注意, 格林函数并不一定要求是对 $t = 0$ 时刻的脉冲的响应。如果瞬时点热源是 $t = \tau$ 时刻放的, 对应的 (一维情况的) 问题为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (12.72)$$

$$u|_{t < \tau} = 0; \quad u|_{t = \tau} = \delta(x - x_0) \quad (12.73)$$

要求计算 $t > \tau$ 时的 u 。

显然只需要做一下时间平移就能得到格林函数:

$$G(x, t; x_0, \tau) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi a(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a(t-\tau)}}, & \text{if } (t > \tau). \\ 0, & \text{if } t \leq \tau \end{cases} \quad (12.74)$$

思考题: 证明上述(12.72)和(12.73)可以写成一个等价的形式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \delta(x - x_0) \delta(t - \tau), \quad (12.75)$$

$$u|_{t < \tau} = 0. \quad (12.76)$$

(提示: 在(12.75)两边对 t 从 τ 积分到 $\tau + dt$ 可以获得在 $\tau + dt$ 时刻的初始条件。)

然后根据问题的物理背景说明格林函数 $G(x, t; x_0, \tau)$ 只依赖于 $|x - x_0|$ 以及 $t - \tau$, 从而证明瞬时点源的格林函数满足对称性:

$$G(x, t; x_0, \tau) = G(x_0, -\tau; x, -t). \quad (12.77)$$

12.3.3 热传导方程格林函数 II (持续点源)

如果有持续点热源, 问题就变为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \delta(x - x_0). \quad (12.78)$$

$$u|_{t=0} = 0. \quad (12.79)$$

在傅里叶空间求解格林函数并不困难，不过，我这里准备讨论一种比较奇特的解法。

在物理学家眼里，(12.78)右边的源首先（通过 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 项）引起局域的 u 变化，变化之后的 u 产生了空间不均匀性，空间不均匀性通过 $\nabla^2 u$ 项作用影响邻域的 $\frac{\partial u}{\partial t}$ ，从而产生热扩散现象。这种给物理效应排次序的想法从纯数学的角度看是比较奇怪的，但是不管你的态度如何，我准备继续——

如果作用的时间非常短，我们可以只考虑最先发生的局域响应。比如假设方程右边的源 $\delta(x-x_0)$ 只存在于 $t \in (\tau-d\tau, \tau)$ 的小间隔内（这个假设当然不成立，我们只是暂时这样修改问题）。在 $t < \tau-d\tau$ 时刻，由于没有任何源，所以 u 保持为零。在 $t \in (\tau-d\tau, \tau)$ 时间段内，由于时间很短，我们忽略热扩散效应，把方程近似为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \delta(x-x_0), \quad t \in (\tau, \tau+d\tau).$$

这样在 $t = \tau$ 时刻， $u = \delta(x-x_0)d\tau$ 。之后，在 $t > \tau$ 时间段内， u 满足初值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (t > \tau). \quad (12.80)$$

$$u|_{t=\tau} = \delta(x-x_0)d\tau. \quad (12.81)$$

这个问题的解我们是知道的：只要把(12.74)乘以 $d\tau$ （这是因为(12.81)里的脉冲源多了 $d\tau$ 的因子）

$$u = \frac{1}{\sqrt{4\pi a(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a(t-\tau)}} d\tau, \quad (t > \tau). \quad (12.82)$$

当然，(12.82)不是原问题的解。因为原问题不止在 $t \in (\tau-d\tau, \tau)$ 这个很短的时间范围内有输入信号（即方程右边的脉冲源 $\delta(x-x_0)$ ），而是在 $t > 0$ 时一直有输入信号。

不过，在 t 时刻，只有 $[0, t]$ 时间段内的输入信号才可能影响 u 。我们可以把 $[0, t]$ 内的输入信号分解成很多个小时时间段内的输入信号，也就是让(12.82)中的 τ 遍历 $[0, t]$ 并叠加起来：

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4\pi a(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a(t-\tau)}} d\tau. \quad (12.83)$$

这就是原问题的解！当然，为了把结果写得更优美一些，你可以把结果中的积分变量 τ 换为 $t-\tau$ ，得到

$$u(x, t) = \int_0^t d\tau \frac{1}{\sqrt{4\pi a\tau}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a\tau}}. \quad (12.84)$$

如果你对这种“物理分析”方法的可靠性保持怀疑，我们不妨来检验一下(12.84)这个解。

首先, (12.84)两边对 t 求偏导, 得到

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{4\pi a t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a t}}. \quad (12.85)$$

(12.84)两边对 x 求两次偏导并乘以 a , 得到

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \int_0^t d\tau \left[\frac{(x-x_0)^2}{4a\tau^2} - \frac{1}{2\tau} \right] \frac{1}{\sqrt{4\pi a\tau}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a\tau}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi a\tau}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a\tau}} \Big|_0^t. \quad (12.86)$$

(12.85) 和 (12.86)相减, 即验证了

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{4\pi a\tau}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a\tau}} = \delta(x-x_0). \quad (12.87)$$

也就是说解(12.84)确实是问题的解。

另外, 很容易用同样的方法得到, 在 n 维空间, 持续点源的热传导问题格林函数为:

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0) = \int_0^t d\tau \frac{1}{(\sqrt{4\pi a\tau})^n} e^{-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^2}{4a\tau}}. \quad (12.88)$$

12.3.4 Helmholtz 方程的格林函数

我们现在来考虑三维无界空间中的 Helmholtz 方程的格林函数问题:

$$\nabla^2 f + k^2 f = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (12.89)$$

这里的 k 是给定的实数。

我们以 \mathbf{x}_0 为球心建立球坐标系, 那么问题的解必然可以写成 (挖掉球心的空间内的) 谐函数的线性组合。又问题是各向同性的, 我们可以直接写出

$$f = a j_0(kr) + b n_0(kr)$$

的形式。

利用球贝塞尔函数的具体形式

$$j_0(kr) = \frac{\sin(kr)}{(kr)}, \quad n_0(kr) = -\frac{\cos(kr)}{(kr)}$$

我们也可以把解写成

$$f = C_1 \frac{e^{ikr}}{r} + C_2 \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (12.90)$$

的形式。注意

$$\frac{\partial f}{\partial r} = -C_1 \frac{e^{ikr}}{r^2} - C_2 \frac{e^{-ikr}}{r^2} + ik \left[C_1 \frac{e^{ikr}}{r} - C_2 \frac{e^{-ikr}}{r} \right]. \quad (12.91)$$

在以原点为球心的半径 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 的小球内对原方程进行积分, 并利用散度的物理意义把 $\nabla^2 f$ 的体积分转化为 $\frac{\partial f}{\partial r}$ 的表面积分, 就可以得到

$$C_1 + C_2 = -\frac{1}{4\pi}$$

那么具体 C_1 和 C_2 的比例该取多少呢? 这要由具体问题的无限远处边界条件决定。如果是发散球面波问题, 要求越远相位就越大, 则通常只能取 $C_1 = -\frac{1}{4\pi}, C_2 = 0$ 。即格林函数为

$$G(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0) = -\frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}. \quad (12.92)$$

如果是会聚球面波问题, 则

$$G(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0) = -\frac{e^{-ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}. \quad (12.93)$$

上述任意一个情况令 $k = 0$, 都能得到泊松方程的格林函数, 也就是我们熟悉的点电荷产生的距离反比静电势。

12.3.5 一维波动方程的格林函数

考虑一维波动方程的瞬时点源问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (12.94)$$

$$u|_{t=0} = \delta(x - x_0), \quad (12.95)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \quad (12.96)$$

利用一维无边界波动方程的通解(9.52), 可以得到

一维无边界波动问题的初始位移脉冲的格林函数:

$$G_s(x, t; x_0) = \frac{1}{2} [\delta(x - at - x_0) + \delta(x + at - x_0)]. \quad (12.97)$$

也就是说脉冲会分成相等的两份以速度 a 向左右两边传播。或者说, 在一维空间中, 初始位移脉冲只影响因果关联区域的边界。

如果有个初始速度脉冲

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (12.98)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad (12.99)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \delta(x - x_0). \quad (12.100)$$

仍然利用一维无边界波动方程的通解(9.52), 得到

一维无边界波动问题的初始速度脉冲的格林函数:

$$G_v(x, t; x_0) = \frac{1}{2a} [h(x + at - x_0) - h(x - at - x_0)]. \quad (12.101)$$

这里的 h 是 $\delta(x)$ 的原函数——单位跃阶函数 (见(7.1) 给出的定义)。

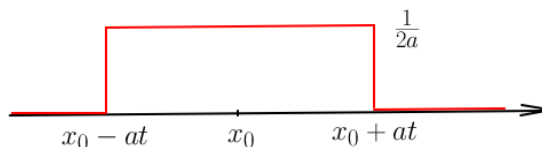


Figure 12.4: 波动方程由一维速度脉冲产生的格林函数

$G_v(x, t; x_0)$ 的函数图像如图12.4所示。这揭示一个很有意思的现象：**在一维空间中，速度脉冲可以影响整个因果关联区域。**

知道了初始位移和初始速度分别对应的格林函数 G_s, G_v , 那么一般的初值问题就可以用格林函数来搞定, 不失一般性, 考虑:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u = 0, \quad (12.102)$$

$$u|_{t=0} = \phi(x), \quad (12.103)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x). \quad (12.104)$$

直接写出答案

$$u = \int G_s(x, t; x_0) \phi(x_0) dx_0 + \int G_v(x, t; x_0) \psi(x_0) dx_0. \quad (12.105)$$

并直接计算得到

$$u = \frac{1}{2} [\phi(x - at) + \phi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(x_0) dx_0. \quad (12.106)$$

这个解当然也可以直接从(9.52)得到, 所以一维波动方程的格林函数的实际用处不大。不过, 在高维空间, 波动方程的格林函数就不是那么平凡了。我们来继续看二维和三维的情况。

12.3.6 二维波动方程的格林函数

二维波动方程的初始位移脉冲产生的格林函数满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u = 0, \quad (12.107)$$

$$u|_{t=0} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (12.108)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (12.109)$$

这时可以取 \mathbf{x}_0 所在位置为原点建立极坐标系, 直接写出格林函数为:

$$u = \int_0^\infty J_0(kr) \cos(akt) c(k) dk. \quad (12.110)$$

注意利用初始条件的旋转对称性, 我们直接丢掉了 $m > 0$ 的项。并且由于无边界, k 可以连续取到一切非负实数值。这里的 $c(k)dk$ (函数 c 待定) 是连续情况下的“展开系数”。

把初始条件在

$$\int_0^\infty J_0(kr) c(k) dk = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (12.111)$$

两边同乘以 $2\pi r J_0(k'r) dr$ (这里 k' 是任取的正数), 并对 r 积分, 得到

$$2\pi \int_0^\infty c(k) dk \int_0^\infty r dr J_0(kr) J_0(k'r) = \int J_0(k'r) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) dS = J_0(0) = 1. \quad (12.112)$$

这里的 $dS = 2\pi r dr$ 是极坐标 (在旋转对称情况下的) 面积元。

利用第一类贝塞尔函数的第三正交定理(11.76),

$$\int_0^\infty c(k) dk \int_0^\infty r J_0(kr) J_0(k'r) dr = \int_0^\infty c(k) dk \frac{\delta(k - k')}{k'} = \frac{c(k')}{k'} \quad (12.113)$$

于是我们得到, 对任意 $k' > 0$, 有

$$c(k') = \frac{k'}{2\pi}.$$

即最终得到

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty k J_0(kr) \cos(akt) dk. \quad (12.114)$$

这样, 在 \mathbf{x}_0 处对应的初始位移脉冲产生的响应 (也就是格林函数) 是

$$G_s(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty k J_0(k|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|) \cos(akt) dk. \quad (12.115)$$

类似地, 可以求出初始速度脉冲的响应为

$$G_v(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^\infty J_0(k|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|) \sin(akt) dk. \quad (12.116)$$

为了进一步化简结果, 我们来计算积分

$$I = \int_0^\infty J_0(kr) \sin(akt) dk. \quad (12.117)$$

利用 J_0 的积分表示, 可以得到

$$I = \frac{1}{4\pi i} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \left(e^{ik[r(\sin\theta + i\varepsilon) + at]} - e^{ik[r(\sin\theta + i\varepsilon) - at]} \right) d\theta dk. \quad (12.118)$$

这里为了让积分收敛, 加入了微元参数 $\varepsilon \rightarrow 0^+$; 先对 k 积分得到

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t}{a^2 t^2 - r^2 (\sin \theta + i\varepsilon)^2} d\theta. \quad (12.119)$$

把积分转化为单位圆上的围道积分,

$$I = \frac{1}{2\pi r} \oint_{|z|=1} \left[\frac{1}{z^2 + 2(i\lambda - \varepsilon)z - 1} - \frac{1}{z^2 - 2(i\lambda + \varepsilon)z - 1} \right] dz. \quad (12.120)$$

这里的 $\lambda = at/r$ 。

如果 $\lambda < 1$, 则记

$$\alpha_{\pm} = \varepsilon - i\lambda \pm \sqrt{1 - \lambda^2 - 2i\lambda\varepsilon}, \quad \beta_{\pm} = \varepsilon + i\lambda \pm \sqrt{1 - \lambda^2 + 2i\lambda\varepsilon} \quad (12.121)$$

有

$$I = \frac{1}{2\pi r} \oint_{|z|=1} \left[\frac{1}{(z - \alpha_+)(z - \alpha_-)} - \frac{1}{(z - \beta_+)(z - \beta_-)} \right] dz. \quad (12.122)$$

孤立奇点 α_-, β_- 在单位圆 $|z| = 1$ 内部 (现在你知道为什么我一直保留 ε 了), 留数之和为

$$\frac{1}{\alpha_- - \alpha_+} - \frac{1}{\beta_- - \beta_+} = 0. \quad (12.123)$$

也就是说, 在区域 $r > at$ 内, $u = 0$ —— 物理上来看这是显然的。

如果 $\lambda > 1$, 则记

$$\alpha_{\pm} = (-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 1})i, \quad \beta_{\pm} = (\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 1})i \quad (12.124)$$

$$I = \frac{1}{2\pi r} \oint_{|z|=1} \left[\frac{1}{(z - \alpha_+)(z - \alpha_-)} - \frac{1}{(z - \beta_+)(z - \beta_-)} \right] dz. \quad (12.125)$$

孤立奇点 α_+, β_- 在单位圆 $|z| = 1$ 内部, 由留数定理得

$$I = \frac{i}{r} \left(\frac{1}{\alpha_+ - \alpha_-} - \frac{1}{\beta_- - \beta_+} \right) = \frac{1}{\sqrt{a^2 t^2 - r^2}}. \quad (12.126)$$

最后得到

$$I = \frac{h(at - r)}{\sqrt{a^2 t^2 - r^2}}. \quad (12.127)$$

这里的 h 是单位跃阶函数。

把结果

$$\int_0^{\infty} J_0(kr) \sin(akt) dk = \frac{h(at - r)}{\sqrt{a^2 t^2 - r^2}}. \quad (12.128)$$

两边对 t 求偏导, 就得到:

$$\int_0^{\infty} k J_0(kr) \cos(akt) dk = \frac{\delta(at-r)}{\sqrt{a^2t^2-r^2}} - \frac{at h(at-r)}{(a^2t^2-r^2)^{3/2}}. \quad (12.129)$$

把(12.129)代入(12.115)就有

二维无边界波动问题的初始位移脉冲的格林函数:

$$G_s(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\delta(at - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)}{\sqrt{a^2t^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2}} - \frac{at h(at - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)}{(a^2t^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2)^{3/2}} \right]. \quad (12.130)$$

把(12.128)代入(12.116)就有

二维无边界波动问题的初始速度脉冲的格林函数:

$$G_v(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi a} \frac{h(at - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)}{\sqrt{a^2t^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2}}. \quad (12.131)$$

通过观察这两个格林函数, 我们发现: 在二维空间中, 初始速度脉冲能影响到整个因果关联区域, 这和一维空间相同; 但是在二维空间中, 初始位移脉冲也对整个因果关联区域产生影响, 这和一维空间不一样。

我们在生活中有这样的经验: 往水面上扔一个石头, 从落点往外荡漾的波布满整个波速能及的区域。根据惠更斯原理, 这时整个区域都可以看成波源, 所以你很难通过放置一个小障碍物来阻挡某个方向水波。

有了格林函数, 对于一般的初始位移 $\phi(\mathbf{x})$ 和初始速度 $\psi(\mathbf{x})$, 解就可以用格林函数计算:

$$u(\mathbf{x}, t) = \int d^2\mathbf{x}_0 [G_s(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)\phi(\mathbf{x}_0) + G_v(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)\psi(\mathbf{x}_0)]. \quad (12.132)$$

12.3.7 三维波动方程的格林函数

根据我们在一维和二维求解的经验, 只要求出了初始速度脉冲的格林函数, 对时间求一下偏导就能得到初始位移脉冲的格林函数。所以在三维的情况, 我们不再走弯路, 直接先研究初始速度脉冲产生的格林函数。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u = 0, \quad (12.133)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad (12.134)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (12.135)$$

可以取 \mathbf{x}_0 所在位置为原点建立球坐标系, 直接写出格林函数为:

$$G_v = \int_0^\infty j_0(kr)c(k) \sin(akt) dk. \quad (12.136)$$

和二维情况相同, 利用初始条件的球对称性, 我们仅保留了 $l = m = 0$ 的项。并且由于无边界, k 可以连续取到一切非负实数值。这里的 $c(k)dk$ (函数 c 待定) 是连续情况下的“展开系数”。

这样初始条件就是

$$a \int_0^\infty j_0(kr)c(k)k dk = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (12.137)$$

仍然采用和二维情况相同的计算技巧, 取任意 $k' > 0$ 两边乘以 $j_0(k'r)4\pi r^2$ 并对 r 积分, 有

$$4\pi a \int_0^\infty c(k)k dk \int_0^\infty j_0(kr)j_0(k'r)r^2 dr = 1. \quad (12.138)$$

利用 $J_{1/2}$ 的第三正交定理 (或者直接参考习题结果(??)), 可以得到

$$\int_0^\infty j_0(kr)j_0(k'r)r^2 dr = \frac{\pi}{2k^2} \delta(k - k'). \quad (12.139)$$

代入(12.138)并对 k 积分就得到

$$c(k') = \frac{k'}{2\pi^2 a}.$$

于是

$$G_v = \frac{1}{2\pi^2 a} \int_0^\infty \frac{\sin(kr)}{kr} \sin(akt)k dk = \frac{t}{2\pi^2} \int_0^\infty j_0(kr)j_0(akt)k^2 dk. \quad (12.140)$$

再次利用(12.139), 就有

$$G_v = \frac{1}{4\pi a r} \delta(at - r). \quad (12.141)$$

最后我们就有:

三维无边界波动问题的初始速度脉冲的格林函数:

$$G_v(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0) = \frac{\delta(at - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)}{4\pi a |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}. \quad (12.142)$$

对 t 求偏导后会出现 (不那么惹人喜爱的) δ 函数的导函数:

三维无边界波动问题的初始位移脉冲的格林函数:

$$G_s(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0) = \frac{a\delta'(at - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)}{4\pi a |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}. \quad (12.143)$$

到了三维空间，剧情又发生了变化：在三维空间中，无论是初始位移脉冲，还是初始速度脉冲，都只能影响因果关联区域的边界（满足 $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = at$ 的球面）。这对发展出具有语言交流能力的生命来说可能是一件好事：在三维空间，别人说的话你只能听到一次，所以能清晰地进行交流。另外，在三维空间中，由于只有因果关联区域的边界受影响，你能比较轻松地挡住来自某个方向的波。例如，打开一个白炽灯，然后用手遮挡在你眼睛和灯泡之间，你就看不见灯光了——好吧，实际上你还是会看到周围物体反射的灯光，所以你真想完美地做这个实验，你必须找到一个完全涂成黑色的房间。

有了格林函数，我们就可以写出三维空间中初值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u = 0. \quad (12.144)$$

$$u|_{t=0} = \psi(\mathbf{x}), \quad (12.145)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \phi(\mathbf{x}). \quad (12.146)$$

的解为

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi a} \left[\int \phi(\mathbf{x}_0) \frac{\delta(at - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} d^3 \mathbf{x}_0 + \frac{\partial}{\partial t} \int \psi(\mathbf{x}_0) \frac{\delta(at - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} d^3 \mathbf{x}_0 \right]. \quad (12.147)$$

12.4 无界区域方法总结：积分变换和格林函数

我们看到无界区域的格林函数常常具有有限（而非级数形式的）的表达式。有限形式的函数积分起来总是更加令人心身愉悦，因此不少人乐意选择用格林函数方法求解无界区域中的数理方程。

格林函数是对非齐次的单位脉冲输入信号的响应。如果问题中有两个非齐次条件该怎么办呢？比如，三维波动方程问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u = 0, \quad (12.148)$$

$$u|_{t=0} = \phi(\mathbf{x}) \quad (12.149)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(\mathbf{x}). \quad (12.150)$$

的初始位移和初始速度都是非齐次的。

对于这样的问题，我们可以把非齐次条件进行拆分：令 $u = u_1(\mathbf{x}, t) + u_2(\mathbf{x}, t)$ 。其中 u_1 满足

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u_1 = 0, \quad (12.151)$$

$$u_1|_{t=0} = \phi(\mathbf{x}) \quad (12.152)$$

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial t} \right|_{t=0} = 0; \quad (12.153)$$

u_2 满足

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u_2 = 0, \quad (12.154)$$

$$u_2|_{t=0} = 0 \quad (12.155)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(\mathbf{x}). \quad (12.156)$$

于是根据格林函数的物理意义，可以写出

$$u_1(\mathbf{x}, t) = \int d^3 \mathbf{x}_0 \phi(\mathbf{x}_0) G_s(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0), \quad (12.157)$$

和

$$u_2(\mathbf{x}, t) = \int d^3 \mathbf{x}_0 \psi(\mathbf{x}_0) G_v(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0). \quad (12.158)$$

其中格林函数 $G_s(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)$ 和 $G_v(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)$ 分别由 (12.143) 和 (12.142) 给出。

我们在计算格林函数时多次用到了积分变换（或者说，分离变量法的“连续”版本）的方法，除了常见的傅里叶变换之外，也展示了如何利用贝塞尔函数等积分核进行计算（这种变换通常叫做汉克耳变换）。作为本章的总结，我们再举一个用拉普拉斯变换求解数理方程的经典例子。

例题 77: 在半无界区域 $x \in [0, \infty), t \in [0, \infty)$ 中求满足

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (12.159)$$

$$u|_{x=0} = u_0, \quad (12.160)$$

$$u|_{t=0} = 0. \quad (12.161)$$

且有界的解 $u(x, t)$ 。

解答: 设 $u(x, t)$ 的拉普拉斯变换为

$$U(x, p) \equiv \int_0^\infty u(x, t) e^{-pt} dt.$$

因为 $u(x, t)$ 有界，所以

$$\lim_{p \rightarrow \infty} U(x, p) = 0. \quad (12.162)$$

方程 (12.159) 两边进行拉普拉斯变换，得到

$$pU(x, p) - a \frac{\partial^2 U(x, p)}{\partial x^2} = 0. \quad (12.163)$$

另外, 可以直接计算出

$$U(0, p) = \int_0^{\infty} u_0 e^{-pt} dt = \frac{u_0}{p}. \quad (12.164)$$

对固定的 p 而言, (12.163) 只是个常微分方程, 满足初条件(12.164)以及限制条件(12.162)的解为:

$$U(x, p) = \frac{u_0}{p} e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}x} = u_0 \frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}. \quad (12.165)$$

其中 $F(p) \equiv \frac{1}{p} e^{-\frac{x}{\sqrt{a}}p}$. 由表7.1知, 1 的拉普拉斯变换是 $\frac{1}{p}$. 再由表中源的平移规则, 知道 $F(p)$ 的源函数为 $h(t - \frac{x}{\sqrt{a}})$. 再利用像的宗量开方规则, 可以得到 $U(x, p)$ 的源函数为:

$$u(x, t) = \frac{u_0}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} h\left(u - \frac{x}{\sqrt{a}}\right) e^{-\frac{u^2}{4t}} du = \frac{u_0}{\sqrt{\pi t}} \int_{\frac{x}{\sqrt{a}}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{4t}} du \quad (12.166)$$

利用误差函数的定义 $\operatorname{erfc}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta$, 还可以把结果写成

$$u(x, t) = u_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right). \quad (12.167)$$

12.5 第12章习题

习题 157: 计算

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(1 + \frac{K'_v(x)}{K_v(x)} \right).$$

习题 158: 求出 $I_{1/2}$ 和 $K_{1/2}$ 的初等表达式。

习题 159: 计算积分

$$\int_0^1 I_0(x) I_0(1-x) dx.$$

习题 160: 证明第一类虚宗量贝塞尔函数的母函数公式:

$$e^{\frac{x}{2}(t+\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x) t^n.$$

习题 161: 证明第一类虚宗量贝塞尔函数的积分公式

$$I_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos \theta} \cos(\nu \theta) d\theta - \frac{\sin(\nu \pi)}{\pi} \int_0^\infty e^{-x \cosh t - \nu t} dt.$$

习题 162: 证明第二类虚宗量贝塞尔函数的积分公式

$$K_\nu(x) = \int_0^\infty e^{-x \cosh t} \cosh(\nu t) dt.$$

习题 163: 证明 $K_0(|x|)$ 的傅里叶变换是 $\sqrt{\frac{\pi}{2(1+t^2)}}$ 。

习题 164: 计算积分

$$\int_0^\infty K_0(x) dx.$$

习题 165: 计算积分

$$\int_0^\infty [K_0(x)]^2 dx.$$

习题 166: 请用这一章介绍的用 $k=0$ 的拉普拉斯算符本征函数展开的方法计算接地金属球壳内点电荷产生的电势，并和用镜像电荷法（图9.4）计算的结果作比较。

习题 167: 柱坐标系 (r, θ, z) 里 $r \leq 1$, $-1 \leq z \leq 1$ 描述了一个均匀材质圆柱体所占的空间区域。现在控制圆柱体侧表面的温度恒为

$$T|_{r=1} = T_0 \left(\frac{1}{\sqrt{z^2 - 4z + 5}} + \frac{1}{\sqrt{z^2 + 4z + 5}} \right),$$

其中 T_0 为常量。同时控制圆柱体上下表面的温度恒为

$$T|_{z=\pm 1} = T_0 \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + 9}} \right).$$

计算圆柱体内的温度的稳定分布。

习题 168: 计算均匀带电圆环产生的电势。

习题 169: 有一个半径为 R 的无穷长带电圆柱面，以圆柱中轴线为 z 轴建立柱坐标系 (r, θ, z) 。取无穷远处电势为零电势，圆柱面上的电势可以写为

$$U(r, \theta, z)|_{r=R} = V_0 e^{-\frac{z^2}{2R^2}} \cos(2\theta),$$

其中 V_0 为常量。计算圆柱面之外的电势分布。

习题 170: 一个半径为 R ，高为 h ，导热系数为 λ 的均匀金属圆柱体的圆柱面通过和热库保持良好接触保持恒温 T_0 。圆柱体的两端（即两个平的面）暴露在温度为 $T_1 < T_0$ （近似看成温度不变）的空气中，按照牛顿冷却定律散热：即表面往外的热流密度

$$j = k(T - T_1).$$

这里的 k 是常量， T 是圆柱体表面温度。计算圆柱体内的温度稳定分布。

习题 171: 在一根均匀的无限长导热棒上的某点注入热量 Q ，导热棒上的温度分布将如何变化？设初始温度 T_0 ，截面积 S ，质量密度 ρ ，单位质量比热 c ，导热系数 λ 均已知。

习题 172: 计算一维无边界的空间内满足方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

和初始条件

$$u|_{t=0} = e^{-x^2}$$

的解。

习题 173: 一块无限大的孤立均匀导热薄板, 其材质的热传导方程参数为 a 。在 $t = 0$ 时刻, 薄板上除了一个半径为 R 的圆内的温度为 300K, 其余部分温度均为 200K。问在 $t = \frac{R^2}{2a}$ 时刻, 圆心的温度为多少 K? (结果至少精确到 1K)

习题 174: 一个边长为 L , 热传导方程参数为 a 的正方形均匀薄板, 一开始温度为零。从 $t = 0$ 时刻开始控制薄板的四条边温度分别如下分布: 上边缘温度恒为 $T_0 \sin \frac{\pi y}{L}$; 右边缘温度恒为 $T_0 \sin \frac{2\pi x}{L}$; 下边缘温度恒为 $T_0 \sin \frac{3\pi x}{L}$; 左边缘温度恒为 $T_0 \sin \frac{4\pi y}{L}$, 其中 x 是到薄板的左边缘的距离 ($0 \leq x \leq L$), y 是到薄板下边缘的距离 ($0 \leq y \leq L$)。请估算: 在 $t = \frac{L^2}{4a}$ 时刻, 薄板中心的温度是 T_0 的多少倍?

13. 后记

在讲授《数学物理方法》的过程中，一些喜欢刨根问底的学生总喜欢追问：贝塞尔函数、球谐函数这些特殊函数是怎么求解出来的？

如果我不予回答，TA 就用我欠了 TA 很多钱的眼神看着我。

在本书的结尾部分，我决定还是把这些债都还清。

13.1 二阶微分方程的级数解法

我们求解方程的依据是如下的定理（请参考 [3]）：

定理: 如果 $p(z)$ 和 $q(z)$ 在圆 $|z| < R$ 解析, 则二阶微分方程

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{p(z)}{z} \frac{df}{dz} + \frac{q(z)}{z^2} f = 0$$

在去心邻域 $0 < |z| < R$ 有两个线性独立的解具有如下形式:

$$f_1(z) = z^{\rho_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

$$f_2(z) = \lambda f_1(z) \ln z + z^{\rho_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n.$$

其中 ρ_1, ρ_2 是“指标方程”

$$\rho^2 + [p(0) - 1]\rho + q(0) = 0.$$

的两个解; c_0, d_0 均非零; 仅当 $\rho_1 - \rho_2$ 为整数时, λ 才有可能需要取非零值。

下面我们来看几个例子。

13.1.1 贝塞尔方程

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{df}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) f = 0. \quad (13.1)$$

的 $p(z) = 1$, $q(z) = z^2 - \nu^2$ 。指标方程是

$$\rho^2 - \nu^2 = 0.$$

其解为

$$\rho_{1,2} = \pm \nu.$$

设第一个解为

$$f_1(z) = z^\nu \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \quad (13.2)$$

代入贝塞尔方程, 比较 $z^{n+\nu}$ 的系数, 得到

$$c_n = -\frac{1}{n(n+2\nu)} c_{n-2}.$$

由此可以递推得出

$$c_{2n+1} = 0; \quad c_{2n} = (-1)^n \frac{\nu!}{2^{2n}(\nu+n)!} c_0. \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

如果取 $c_0 = \frac{1}{2\nu!}$: 恭喜你, 得到了第一类贝塞尔函数 $J_\nu(z)$ 的级数表达式!

如果取其他的非零 c_0 值, 结果无非是 $J_\nu(z)$ 的常数倍数而已。

如果 2ν 不是整数, 那么你对 $\rho_2 = -\nu$ 如法炮制, 可以得到线性独立的解 $J_{-\nu}(z)$ (或它的任意非零倍数)。

最后, 还需要讨论 2ν 是整数的情形。为了更清晰地介绍方法而不是让你们迷失于纷繁复杂的计算中, 我们仅以 $\nu = 0$ 的情况为例讨论:

这时 $\rho_1 = \rho_2 = 0$, 第二个解为:

$$f_2(z) = \lambda J_0(z) \ln z + g(z). \quad (13.3)$$

其中 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ 。把 f_2 代入贝塞尔方程, 得到:

$$g''(z) + \frac{1}{z} g'(z) + g(z) + \frac{2\lambda J_0'(z)}{z} = 0. \quad (13.4)$$

通过对比 z^{2n-2} 的系数, 得到:

$$d_{2n} = -\frac{1}{4n^2} d_{2n-2} - \frac{(-1)^n \lambda}{2^{2n} (n!)^2 n}.$$

从任意非零的 λ, d_0 出发, 都可以得到 d_2, d_4, \dots

我们熟知的 $N_0(z)$, 则是取 $\lambda = \frac{2}{\pi}, d_0 = \frac{2}{\pi}(\gamma - \ln 2)$ (这里的 $\gamma = 0.5772\dots$ 是欧拉常数) 的结果。

N_0 为何对应如此古怪的 λ 和 d_0 ? 这为了凑 N_0 的无穷远处渐近公式而所做的人为约定。只要你喜欢, 完全可以取不同的 λ 和 d_0 。

13.1.2 一维谐振子的能级

我们熟知的一维谐振子的定态束缚解问题对应的薛定谔方程:

$$\psi'' - x^2 \psi = -2E \psi$$

其中 E 为待定的常数 (谐振子的能量)。束缚解要求波函数 $\psi(x)$ 在无穷远处趋向于零 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \psi(x) = 0$ 。

解决这种问题的策略是: 先分析无穷远处的渐近行为。当 $|x|$ 很大时, 可以近似认为

$$\psi'' - x^2 \psi \approx 0$$

其粗略的解为

$$\psi \sim e^{\pm x^2/2}.$$

(它满足的方程是 $\psi'' - (x^2 - 1)\psi = 0$, 差别不大)。

考虑到无穷远处的束缚条件。从物理上考虑，我们不太喜欢 $\psi \sim e^{x^2/2}$ 这个在无穷远处发散的解，所以令 $\psi = f(x)e^{-x^2/2}$ （我们希望 f 在 $x \rightarrow \pm\infty$ 时不指数发散）。代入原方程，得到：

$$f'' - 2xf' + (2E - 1)f = 0.$$

我们准备用级数解法。但在动手之前，我们应该意识到：这个方程和原方程等价。所以我们肯定会求得一个解 $f \sim e^{x^2}$ ，令人讨厌的 $\psi \sim e^{x^2/2}$ 又会回来。

有了这个心理准备，我们继续： $p(x) = -2x^2, q(x) = (2E - 1)x^2$ ，其指标方程为

$$\lambda^2 - \lambda = 0.$$

对数形式的解在 $x = 0$ 处发散，所以无须考虑，只要考虑如下形式的解

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

其中 c_0 或者 c_1 至少有一个非零。代入方程得到

$$c_{n+2} = \frac{2(n + \frac{1}{2} - E)}{(n+2)(n+1)} c_n. \quad (13.5)$$

一般情况下，这个递推关系就是会给出一个解 $\sim e^{x^2}$ ，除非对某个 n ，有

$$n + \frac{1}{2} - E = 0.$$

这样递推式(13.5)就会被截断（从某个 n 开始后面全部为零），导致 f 成为多项式。这就是我们需要的解。

这就是为什么谐振子的能量只能是 $n + \frac{1}{2}$ 。

13.1.3 氢原子的能级

在研究氢原子的束缚能量本征态时，会遇到球坐标系的薛定谔方程：

$$\nabla^2 \psi + \frac{2}{r} \psi = -2E \psi. \quad (13.6)$$

考虑角动量和哈密顿量的共同本征态——好吧你不知道我在说什么……没关系，其实就是由于一些对称性的考虑我们只需考虑形如 $\psi = f(r)Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ 的解。

代入上述方程得到：

$$f'' + \frac{2}{r} f' + \left(2E + \frac{2}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) f = 0. \quad (13.7)$$

在 r 巨大时，方程近似成为

$$f'' + 2E f = 0.$$

如果 $E \geq 0$, f 在无穷远处很不像会足够快地趋向于零的样子, 所以只能 $E < 0$ 。记 $E = -k^2/2$, 则 $f \sim e^{\pm kr}$ 。

很明显, $f \sim e^{kr}$ 这类的解很不受待见。所以我们令 $f(r) = e^{-kr}u(r)$ (并希望 $u(r)$ 在 $r \rightarrow \infty$ 时不指数发散), 代入原方程得到:

$$u'' + 2\left(\frac{1}{r} - k\right)u' + \left(\frac{2(1-k)}{r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right)u = 0. \quad (13.8)$$

同样先有个心理预期: 这个方程和原方程完全等价。当我们用级数解法求 $u(r)$ 时, 在一般情况下, 会得到 $u \sim e^{2kr}$ 的解, 复活刚刚被我们鄙视掉的 $f \sim e^{kr}$ 。

由指标方程得出 $\rho_1 = \ell$ ($\rho_2 = -\ell - 1$ 导致解在 $r = 0$ 发散, 所以略去), 我们来看 $u = r^\ell \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n$ 是否可行, 代入方程得到:

$$c_{n+1} = 2 \frac{k(n+\ell+1) - 1}{(\ell+n+1)(\ell+n+2) - \ell(\ell+1)} c_n$$

一般情况下, 这个递推公式会给出一个无穷级数 $\sim e^{2kr}$, 除非 $k = \frac{1}{n+\ell+1}$, 即

$$E = -\frac{1}{2N^2}.$$

($N = n + \ell + 1$ 为正整数)

这就是我们熟悉的氢原子的平方反比能级。

13.2 正交定理的一些推广

谐函数的正交定理还可以进行推广。例如, 我们可以把谐函数正交定理的表述中的 ∇^2 都换成 $\nabla^2 + U(\mathbf{x})$, 这里的 $U(\mathbf{x})$ 是任意给定的标量函数。这是因为对任意函数 f, g 均有 $\int f(\mathbf{x})U(\mathbf{x})g(\mathbf{x})dV = \int g(\mathbf{x})U(\mathbf{x})f(\mathbf{x})dV$, 所以 U 在任何情况 (即不需要零边界条件的制约) 都是个对称算符。在经典的量子力学中, 算符 $-\frac{1}{2}\nabla^2 + U(\mathbf{x})$ 代表总哈密顿量 (这里的 $-\frac{1}{2}\nabla^2$ 是动能算符, $U(\mathbf{x})$ 是势能函数, 请参考量子力学的相关入门知识), 它的不同本征值 (即总能量值) 对应的本征函数就具有自动正交的特点。

在一维情况下, 我们可以从纯数学, 但是覆盖面更加广的一个角度来讨论微分方程的解的正交性。

设 $f(r)$ 满足 Sturm-Liouville 型方程

$$\frac{d}{dr} \left[p(r) \frac{df}{dr} \right] + [\lambda \rho(r) - q(r)] f(r) = 0.$$

和零边界条件。

在高维的正交曲面坐标系下写 ∇^2 的显式表达式时, 这些 $p(r), \rho(r)$ 往往就是面积修正因子。例如, 在极坐标系, 写出 ∇^2 的显式表达式时, $p(r) = \rho(r) = r$ 。

现在假设 $f_1(r), f_2(r)$ 是 S-L 方程的分别对应两个不同的 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 的解, 则

$$\frac{d}{dr} \left[p(r) \frac{df_1}{dr} \right] + [\lambda_1 \rho(r) - q(r)] f_1(r) = 0.$$

$$\frac{d}{dr} \left[p(r) \frac{df_2}{dr} \right] + [\lambda_2 \rho(r) - q(r)] f_2(r) = 0.$$

按照第一式乘以 f_2 , 第二式乘以 f_1 再相减的老套路:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int f_1(r) f_2(r) \rho(r) dr = \int \frac{d}{dr} [p(r) (f_2 f_1' - f_1 f_2')] dr$$

由于 f 满足零边界条件, 上式右边的积分为零。所以 f_1, f_2 在以权重 $\rho(r)$ 定义的内积意义下正交。例如在极坐标下, 要求 $f(r)$ 在 $r=R$ 处满足零边界条件, 且满足

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + \left(\lambda r - \frac{m^2}{r} \right) f(r) = 0.$$

就会回到之前讨论的贝塞尔函数。贝塞尔函数的正交定理, 既可以由 S-L 方程的正交定理导出 (数学观点, 权重因子来源于微分方程); 也可以直接对圆盘应用谐函数的正交定理 (物理观点, 权重因子 r 来源于面积元 $r dr d\theta$)。

13.3 临别赠题

本书即将结束了。相比于在分别时说些感人的话——我更喜欢留几道题给你。

解决下面这些赠题的关键是用物理图像进行近似而不是蛮干。如果你能独立思考解决这些问题, 我认为你已经完全掌握这本书的精髓。

习题 175: 把 ∇^2 的本征函数的归一化定理推广到算符 $\nabla^2 + U(\mathbf{x})$ 的本征函数的归一化问题。

习题 176: 有一个半径为 R 的无穷长带电圆柱面, 以圆柱中轴线为 z 轴建立柱坐标系 (r, θ, z) 。取无穷远处电势为零电势, 圆柱面上的电势可以写为

$$U(r, \theta, z)|_{r=R} = V_0 e^{-\left(\frac{z}{50R}\right)^2} \cos(2\theta),$$

其中 V_0 为常量。

已知圆柱面外为真空, 那么 $U(2R, 0, 0)$ 大约是 V_0 的多少倍。

习题 177: 一个内半径为 $R_1 = 0.098\text{m}$, 外半径为 $R_2 = 0.102\text{m}$ 的均匀薄圆环。其材质的热传导方程参数为 $10^{-4}\text{m}^2/\text{s}$ 。以圆环中心建立极坐标系, 在 $t=0$ 时刻圆环上的初始温度分布为

$$T(r, \theta)|_{t=0} = T_0 \cos^4 \left[\frac{(r - R_1)\pi}{R_2 - R_1} \right] \cos^2 \theta.$$

其中 T_0 为常量。

试估算：在 $t = 50\text{s}$ 时刻，圆环上最热的点和最冷的点的温差大约是 T_0 的多少倍？

习题 178: 一个内半径为 $R_1 = 0.098\text{m}$ ，外半径为 $R_2 = 0.102\text{m}$ 的孤立均匀空心球壳，其材质的热传导方程参数 $a = 10^{-4}\text{m}^2/\text{s}$ 。以其球心为原点建立球坐标系 (r, θ, ϕ) 。一开始各点的温度为

$$T(r, \theta, \phi)|_{t=0} = T_0 \left[2 + \cos^2 \frac{(r - R_1)\pi}{R_2 - R_1} \cos \theta \right].$$

在 $t = 25\text{s}$ 时，空心球壳上的最热点和最冷点的温差大约是 T_0 的多少倍？

习题 179: 把 π^k 的小数部分记作 r_k ，例如 $\pi^1 = 3.141\dots$, $r_1 = 0.141\dots$; $\pi^2 = 9.869\dots$, $r_2 = 0.869\dots$ 等等。

把第 k 个质数记为 m_k ，例如 $m_1 = 2, m_2 = 3, m_3 = 5, \dots$ 记 $l = m_{100000}$ ，请大致地估算：

$$\sum_{k=1}^{99999} [Y_{l, m_k}(\arccos(2r_k - 1), 0)]^2$$

的值。

习题 180: 近似估算球面谐函数

$$Y_{10000, 2}\left(\frac{\pi}{100}, 0\right)$$

的值。

习题 181: 一个底面半径为 R ，高为 $\frac{R}{\sqrt{2}}$ 的圆锥形真空区域，其侧面边界上的静电势为零，底面边界上的静电势为 $V_0 \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right)$ ，这里 ρ 是到圆锥中轴线的距离， $V_0 > 0$ 为已知常量。计算圆锥内的电势分布。

习题 182: 一个五面体均匀金属块，一个面是边长为 10.4 厘米的正方形，其余四个面均是三边长分别为 10.4 厘米，9 厘米，9 厘米的等腰三角形。已知该金属材质的热传导方程参数为 $10^{-4}\text{m}^2/\text{s}$ 。一开始金属块保持孤立，其温度为 30 摄氏度。在 $t = 0$ 时刻把金属块放到温度为 70 摄氏度的恒温桌面上，让其正方形面保持和桌面良好接触，其余四个面可以近似认为保持和外界绝热。估算金属块不和桌面接触的那个顶点大约多少秒之后可以达到 50 摄氏度？

Bibliography

References

- [1] 吴崇试,高春媛.“数学物理方法”. In: 北京大学出版社 第三版 (2019), ISBN:9787301302804 (cited on pages 9, 72, 73).
- [2] 梁昆森.“数学物理方法”. In: 高等教育出版社 第四版 (2010), ISBN:9787040283525 (cited on page 9).
- [3] 王竹溪,郭敦仁.“特殊函数概论”. In: 北京大学出版社 第一版 (2012), ISBN:9787301200490 (cited on page 279).

