Methods of Mathematical Physics

§Online Lecture III 半无界、半球等问题的处理方法

Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/mmp

例题1

在半无界区域 $x \in [0, \infty), t \in [0, \infty)$ 中求满足

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, && (1) \\ u\big|_{x=0} &= u_0, && (2) \\ u\big|_{t=0} &= 0. && (3) \end{aligned}$$

且有界的解 $u(x, t)$。

设 $u(x,t)$ 的拉普拉斯变换为

$$U(x,p) \equiv \int_0^\infty u(x,t)e^{-pt}dt.$$

因为 $u(x,t)$ 有界，所以

$$\lim_{p\to\infty} U(x,p) = 0. \tag{4}$$

方程 (1) 两边进行拉普拉斯变换，得到

$$pU(x,p) - a\frac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x^2} = 0. \tag{5}$$

另外，可以直接计算出

$$U(0,p) = \int_0^\infty u_0 e^{-pt} dt = \frac{u_0}{p}. \tag{6}$$

对固定的 p 而言，(5)只是个常微分方程，满足初条件(6)以及限制条件(4)的解为：

$$U(x,p)=\frac{u_0}{p}e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}x}=u_0\frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}. \tag{7}$$

其中 $F(p)\equiv\frac{1}{p}e^{-\frac{x}{\sqrt{a}}p}$。 1 的拉普拉斯变换是 $\frac{1}{p}$。再由源的平移规则，知道 $F(p)$ 的源函数为 $\mathrm{h}\,(t-\frac{x}{\sqrt{a}})$。再利用像的宗量开方规则，可以得到 $U(x,p)$ 的源函数为：

$$u(x,t)=\frac{u_0}{\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}\mathrm{h}\left(u-\frac{x}{\sqrt{a}}\right)e^{-\frac{u^2}{4t}}du=\frac{u_0}{\sqrt{\pi t}}\int_{\frac{x}{\sqrt{a}}}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{4t}}du \tag{8}$$

利用误差函数的定义 $\mathrm{erfc}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta$，还可以把结果写成

$$u(x,t) = u_0 \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right). \quad (9)$$

例题2

求解一个半径为 R ，边界固定的均匀半圆形薄膜的横向小振动。设薄膜的张力系数为 λ，面质量密度为 σ；初始的横向位移和初始速度均已知。

建立极坐标系 (r,θ) 使得薄膜所在区域Ω为
$0\le\theta\le\pi$; $0\le r\le R$，写出方程、边界条件和初始条件：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\nabla^2 u &= 0, & (10)\\
u|_{\theta=0} &= 0, & (11)\\
u|_{\theta=\pi} &= 0, & (12)\\
u|_{r=R} &= 0, & (13)\\
u|_{t=0} &= f(r,\theta), & (14)\\
\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} &= g(r,\theta). & (15)
\end{aligned}
$$

这里的 $a=\sqrt{\frac{\lambda}{\sigma}}$，$f(r,\theta)$ 和 $g(r,\theta)$ 均为已知函数。

区域内的谐函数具有 $\mathrm{J}_\nu(kr)\,[A\cos(\nu\theta)+B\sin(\nu\theta)]$（$\nu\geq 0$）的形式。根据边界条件 (11) 和 (12)，可以进一步确定谐函数具有 $\propto \mathrm{J}_n(kr)\sin(n\theta)$ 的形式。然后根据边界条件 (13) 可以确定谐函数具有

$$\propto \mathrm{J}_n\left(\frac{\mu_{nm}r}{R}\right)\sin(n\theta),\quad n,m=1,2,3,\ldots \tag{16}$$

的形式。下面标准的求解过程从略。

思考题

讨论如何求解半球、甚至1/4球内的数理方程。