# **M**ethods of **M**athematical **P**hysics

## §Online Lecture II Inhomogeneous Equations

Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/mmp

# 例题1

求解$0 \leq x \leq L$上的烤串问题：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \phi(x,t), \\
u\big|_{x=0} &= 0, \\
u\big|_{x=L} &= 0, \\
u\big|_{t=0} &= \psi(x)
\end{aligned}$$

$\phi(x,t)$, $\psi(x)$ 均为已知函数。

按照常规套路，设

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

方程右边没有$\phi(x,t)$的情况，$c_n(t)=c_n(0)e^{-a\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2t}$. 初条件 $c_n(0)$ 可以通过把 $\psi(x)$ 按本征函数 $\sin\frac{n\pi x}{L}$ 进行分解得到。
在有$\phi(x,t)$的情况，我们把等式右边的$\phi(x,t)$也进行级数展开：

$$\phi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}G_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

代入到原方程，得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[c_n'(t)+\frac{n^2\pi^2a}{L^2}T(t)\right]\sin\frac{n\pi x}{L}=\sum_{n=0}^{\infty}G_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

两边比较系数得到

$$c_n'(t) + \frac{n^2\pi^2 a}{L^2} c_n(t) = G_n(t).$$

再利用初始条件确定 $c_n(0)$，可求出$c_n(t)$。

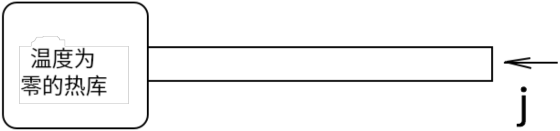
## 思考题

例题中如果给定$\phi(x,t)=\frac{1}{\tau}\sin\frac{\pi x}{L}e^{-\frac{a\pi^2 t}{L^2}}$(这里$\tau>0$为常量)，$\psi(x)=0$，也就是

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}-a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{\tau}\sin\frac{\pi x}{L}e^{-\frac{a\pi^2 t}{L^2}}, \\
u\big|_{x=0} &= 0, \\
u\big|_{x=L} &= 0, \\
u\big|_{t=0} &= 0.
\end{aligned}$$

试求出 $u(x,t)$。

# 例题2




长度为$L$的导热棒一端和温度为零（这里是随意规定了一个温度零点，不是绝对零度）的热库接触，并在$t=0$时刻和热库处于热平衡。从$t=0$时刻开始，在导热棒的另一端注入恒定大小为$j$的热流。设已知导热棒的导热系数$\lambda$和热传导方程参数$a$，求解导热棒上温度$u(x,t)$ $(0\le x\le L, t\ge 0)$。

# 数理方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0,\\ u\big|_{x=0} &= 0,\\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} &= \frac{j}{\lambda},\\ u\big|_{t=0} &= 0.\end{aligned}$$

下一步目标是通过寻找特解，把非零边界条件转化为零边界条件，回到标准套路。对热传导方程，寻找特解有一个非常简便的办法：分析渐近行为。

# 渐近行为分析

猜想当$t$远大于典型热扩散时间$L^2/a$时，系统处于稳恒状态（温度梯度不再变化）。因为一端温度是固定的，要得到稳恒状态的必要条件是热量不在导热棒上积累，也就是说进来的热流$j$必须保持不变地通过整个导热棒，最后从另一端进入热库。这说明稳恒状态下$\frac{\partial u}{\partial x}$处处等于$\frac{j}{\lambda}$。由此得出：

$$u(x,t) \to \frac{j}{\lambda}x$$

这就是我们需要的特解。

# 分离变量法

令

$$u(x,t)=\frac{j}{\lambda}x+v(x,t)$$

易见$v$也满足热传导方程，且

$$\begin{aligned}
v|_{x=0} &= 0, \\
\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=L} &= 0, \\
v|_{t=0} &= -\frac{j}{\lambda}x.
\end{aligned}$$

显然$v$可以用我们熟悉的“标准套路”解出来。

# 最终结果

解出$v$之后得到

$$u(x,t)=\frac{j}{\lambda}x-\frac{2jL}{\lambda\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}e^{-a\frac{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}{L^2}t}\sin\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{L}x\right).$$

# 例题3


有长为$2L$，温度为$T_0$的均匀导热棒，其材质的热传导方程参数为 $a$。在$t = 0$时刻，在它的两端$x = \pm L$处分别接上温度为$T_1$的相同材质相同截面形状的非常长的均匀导热棒。求之后导热棒上的温度变化。

# 写出方程


显然渐近解是$T = T_1$，所以令$T(x,t) = T_1 + u(x,t)$，$u$满足

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \\ u_{t=0} &= (T_0 - T_1)\theta_L(x). \end{aligned}$$

其中$\theta_L(x)$当且仅当$|x| < L$时为1，否则为零。

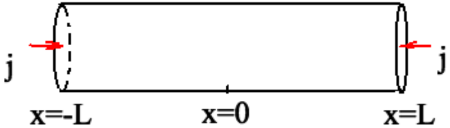
# 格林函数方法求解

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_{-L}^{L} \frac{1}{\sqrt{4\pi a t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4at}} (T_0 - T_1) dx_0 \\
&= \frac{T_0 - T_1}{\sqrt{4\pi a t}} \int_{-L}^{L} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4at}} dx_0
\end{aligned}
$$

当然，如果你喜欢，可以把上述积分写成误差函数。
最后结果为

$$
T(x,t) = T_1 + \frac{T_0 - T_1}{\sqrt{4\pi a t}} \int_{-L}^{L} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4at}} dx_0
$$

# 例题4




在一根长为$2L$的导热棒在$t=0$时刻温度为$T_0$。在$t>0$时刻，导热棒两端均有强度为$j$的热流进入。设材料的导热系数$\lambda$，质量密度$\rho$，单位质量的比热$c$均已知，试计算$t\geq 0$时刻导热棒各处的温度$T(x,t)$。

根据对称性，在棒中间处热流和温度梯度均为零。写出如下的方程和边界条件：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} - a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= 0 \\
\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} &= 0 \\
\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L} &= \frac{j}{\lambda} \\
T\big|_{t=0} &= T_0
\end{aligned}
$$

其中$a = \frac{\lambda}{\rho c}$。

先分析主要图像。

在$t$时刻，累计流入的热量为$Q = 2jSt$ (其中$S$为横截面积)。棒的热容为$C = c\rho(2SL)$。所以$t$时刻棒的的平均温度为

$$\bar{T} = T_0 + \frac{Q}{C} = T_0 + \frac{j}{\rho c L} t$$

把平均温度去掉，研究各处温度起伏：$\Delta T(x,t) = T(x,t) - \left(T_0 + \frac{j}{\rho c L} t\right)$。显然$\Delta T$满足方程：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta T}{\partial t} - a\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial x^2} &= -\frac{j}{\rho c L} \\
\left.\frac{\partial \Delta T}{\partial x}\right|_{x=0} &= 0 \\
\left.\frac{\partial \Delta T}{\partial x}\right|_{x=L} &= \frac{j}{\lambda} \\
\Delta T|_{t=0} = 0 &
\end{aligned}$$

因为$\Delta T$描述的是温度起伏，还有一个额外条件：

$$\int_0^L \Delta T(x,t)dx = 0$$

当$t$很大时，棒上的温度梯度趋于稳定，即$\Delta T$仅仅依赖于$x$，满足

$$\begin{aligned}
-a\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial x^2} &= -\frac{j}{\rho c L} \\
\left.\frac{\partial \Delta T}{\partial x}\right|_{x=0} &= 0 \\
\left.\frac{\partial \Delta T}{\partial x}\right|_{x=L} &= \frac{j}{\lambda} \\
\int_0^L \Delta T(x,t)dx &= 0
\end{aligned}$$

由此不难解出

$$\Delta T = \frac{j}{2\lambda}\left(\frac{x^2}{L} - \frac{L}{3}\right)$$

把“稳恒解”（虽然平均温度不断变化，但各处的温度梯度稳定不变）当作特解，令

$$T = \left(T_0 + \frac{j}{\rho c L} t\right) + \frac{j}{2\lambda}\left(\frac{x^2}{L} - \frac{L}{3}\right) + \delta T(x, t),$$

这里的$\delta T(x, t)$描述了解对稳恒态的偏差如何衰减。把$T(x, t)$直接代入初始的方程和边界条件，易见$\delta T$也满足热传导方程，并满足：

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial \delta T}{\partial x}\right|_{x=0} &= 0 \\
\left.\frac{\partial \delta T}{\partial x}\right|_{x=L} &= 0 \\
\left.\delta T\right|_{t=0} &= -\frac{j}{2\lambda}\left(\frac{x^2}{L} - \frac{L}{3}\right)
\end{aligned}$$

显然$\delta T$可以用标准套路解出来。 请自行完成这部分计算。 最后的完整解是:

$$T = \left(T_0 + \frac{j}{\rho c L} t\right) + \frac{j}{2\lambda}\left(\frac{x^2}{L} - \frac{L}{3}\right) - \frac{2jL}{\lambda\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} e^{-a\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

这个解的第一个括号内是平均温度的变化，第二部分描述稳恒态的形状，第三部分描述初始时对稳恒态的偏离是如何衰减掉的。

# 例题5

求解一端固定，另一端正弦驱动的弦振动:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \\
u|_{x=0} &= 0, \\
u|_{x=L} &= A\sin(\omega t), \\
u|_{t=0} &= 0, \\
\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= 0.
\end{aligned}
$$

考虑如下的满足边界条件但不满足初始条件的特解：

$$u_0(x,t) = A\sin(\omega t)\frac{\sin\frac{\omega x}{a}}{\sin\frac{\omega L}{a}}$$

令$u(x,t) = u_0(x,t) + v(x,t)$，则$v(x,t)$满足：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0, \\
v|_{x=0} &= 0, \\
v|_{x=L} &= 0, \\
v|_{t=0} &= 0, \\
\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} &= -A\omega\frac{\sin\frac{\omega x}{a}}{\sin\frac{\omega L}{a}}
\end{aligned}$$

$v(x,t)$显然可以用标准套路求解，请自行完成。

（给出最后的解供参考）

$$
\begin{aligned}
u(x,t) \quad = \quad & \frac{A}{\sin\frac{\omega L}{a}}\left\{\sin(\omega t)\sin\frac{\omega x}{a}\right. \\
& \left. + \frac{\omega L}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega L}{a}+n\pi\right)-\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega L}{a}-n\pi\right)\right]\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi a t}{L}\right\}
\end{aligned}
$$

where

$$\mathrm{sinc}\,(x) \equiv \frac{\sin x}{x}.$$

## （解法二）

解法一的办法是把非线性的边界条件转化为非线性的初始条件，手段是找一个既满足方程又满足边界条件的特解，这往往需要高超的技巧。
事实上，我们还可以把非线性的边界条件转化为非线性的方程（准确地说是带源的方程），而且这样做对技巧的要求降低了很多：你只要随便找一个满足边界条件但并不满足方程的"瞎解"。

写一个满足边界条件但并不满足方程的解显然要容易得多，例如：

$$\frac{Ax}{L}\sin(\omega t)$$

## （解法二）

令

$$u(x,t) = \frac{Ax}{L}\sin(\omega t) + v(x,t)$$

代回原方程，得到:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{A\omega^2 x}{L}\sin(\omega t), \\
v|_{x=0} &= 0, \\
v|_{x=L} &= 0, \\
v|_{t=0} &= 0, \\
\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} &= -\frac{A\omega x}{L}
\end{aligned}$$

这样就把问题转化为求有源的方程。可以参考例题1的标准套路解决这个问题，请自行完成。

# 思考题

如果驱动频率为共振频率：$\omega = \frac{n\pi a}{L}$ ($n$为某正整数)，上述解法还可行吗?