

中山大学本科生期中考试

考试科目：《数学物理方法》（A卷）

学年学期：2020学年第1学期 姓名：_____

学院/系：物理与天文学院 学号：_____

考试方式：闭卷 年级专业：_____

考试时长：120分钟 班别：_____

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条：“考试作弊者，不授予学士学位。”

----- 以下为试题区域，共三道大题，总分100分,考生请在答题纸上作答 -----

一、思政题：请从下列话题中任选一个，并用不多于60字回答。（10分）

- 对改进本课程的教学方式给出一个建设性意见。
随意吐槽或虚伪歌颂（但思想要端正）
- 对本课程的学分设置、和其他课程的衔接等给出调整的建议，或者无需调整的理由。
随意吐槽或虚伪歌颂（但思想要端正）
- 谈谈你在本课程中学到的数学和物理知识之外的内容，或者你学习本课程时自己的感想。
谈理想谈大饼谈啥都行（但思想要端正）
- 什么是黎曼猜想？
定义在 $\text{Re}(s) > 1$ 内的复变函数

$$\zeta(s) \equiv \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$$

解析延拓到全复平面后，其非平凡零点（指除去明显的负偶数为零点的情况）的实部都是 $\frac{1}{2}$ 。

二、单选题（共10小题，每小题3分，共30分）

- $e^{i\pi} =$
A. 0 B. 1 C. -1 D. $2\pi i$
- $(\sqrt{3} - i)^6 =$
A. 8 B. -8 C. 64 D. -64
- 下列哪一个复数在复平面上的单位圆 $|z| = 1$ 的内部？
A. $\frac{5}{6} + i \cos 1$ B. $\frac{1}{2} + i \cos \frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2} - i$ D. $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$

4. 积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) \sin x dx.$$

等于

- A. 0 B. 1 C. -1 D. $2\pi i$

5. 复变函数 $f(z) = \sin(z^2)$ 的导函数

- A. 等于 $\cos(z^2)$ B. 等于 $2z \cos(z^2)$ C. 恒为零 D. 不存在

6. 设 f 为标量场。球坐标系 (r, θ, ϕ) 下 $\nabla^2 f$ 的具体表达式是

- A. $\frac{\partial}{r^2 \partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\sin \theta \partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$ B. $\frac{\partial}{r^2 \partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{r^2 \sin \theta \partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$
 C. $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{r^2 \sin \theta \partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$ D. $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$

7. 设 $\frac{1}{1+x^4}$ 的傅立叶变换是 $F(k)$, 则函数 $\frac{x^3}{(1+x^4)^2}$ 的傅立叶变换等于

- A. $\frac{ik}{4} F(k)$ B. $-\frac{ik}{4} F(k)$ C. $-\frac{1}{4} F'(k)$ D. $-k^2 F(k)$

8. $\delta(t^{100} - 1)$ 的拉普拉斯变换为

- A. $\frac{e^p}{100}$ B. $\frac{e^{-p}}{100}$ C. $\frac{\cosh p}{50}$ D. $-\frac{\sinh p}{50}$

9. 估算 $\frac{\Gamma'(10000)}{\Gamma(10000)}$ 和下列哪个数量级最接近?

- A. 1 B. 10 C. 100 D. 10000

10. 下列哪个多值函数可以在区域 $\{z : |z| + |z + 3| > 5\}$ 内取解析的单值分枝?

- A. $\sqrt{z^2 + 4}$ B. $\ln(z^4 + 1)$ C. $\ln(z^2 + 3z - 4)$ D. $\sqrt{z^4 + 1}$

三、简答题 (共4小题, 每小题15分, 共60分)

1. 复变函数可导、解析分别是如何定义的? 举出一个在复平面上无穷多个点处可导, 却处处不解析的函数的例子。

可导: 极限 $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ 存在。

解析: 开区域内 (或某点邻域内) 处处可导。

例子: 如 $\cos |z|$

2. 写出

$$f(z) = \frac{1}{z(z - \pi)^3}$$

的所有孤立奇点, 并计算每个孤立奇点处的留数。

0: $-\frac{1}{\pi^3}$

π : $\frac{1}{\pi^3}$

3. 写出热传导方程并解释方程中的参数的物理意义。

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \nabla^2 u = 0$$

a 是单位时间的扩散尺度平方 (或者说 $a = \frac{\lambda}{\rho c}$, 并分别解释 λ, ρ, c 是什么也行)

4. 写出 Stirling 公式, 并用它计算极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \ln x - \frac{x\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \right).$$

$$x! \approx \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e} \right)^x$$

利用 $\Gamma(x) = (x-1)!$, 有

$$\ln \Gamma(x) \approx \frac{1}{2} \ln(x-1) + (x-1) \ln(x-1) - x + C$$

这里 C 是常数。上式两边求导得到:

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \approx \frac{1}{2(x-1)} + \ln(x-1)$$

于是当 $x \rightarrow \infty$ 时

$$x \ln x - \frac{x\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \approx x \ln \frac{x}{x-1} - \frac{x}{2(x-1)} \approx x \frac{1}{x-1} - \frac{x}{2(x-1)} \approx 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$