Methods of Mathematical Physics

§33 三维无界空间中的波动问题

Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/mmp

本讲内容

Review and Practices

Green's Function: Wave Equation in 2D

思考题

把 $\ln\cosh x$ 在 $x=0$ 附近展开到x^4.

思考题

一根长为 L 的孤立均匀导热棒，其材质的导热系数为 λ，热传导方程参数为 a。一开始导热棒处于热平衡。从 $t=0$ 时刻开始，在导热棒的一端（$x=0$）处注入热流密度为 j_1 的恒定热流，并在另一端注入热流密度为 j_2的恒定热流($j_2<j_1$)。经过时间 $t\gg\frac{L^2}{a}$ 之后，导热棒上两端的温度差是多少?

思考题

已知某种保温材料的比热很小可以忽略不计。测试员用该保温材料做成一个内半径为 0.1m，外半径为 0.11m 的球形保温容器。把该容器装满 100°C 的开水后，置于温度为 20°C 的房间里，一天后发现容器内水温下降了 40°C，保温效果很不理想。测试员于是加大保温容器的厚度，使外半径达到 0.2m，然后装满 100°C 的开水，置于温度为 20°C 的房间里，问：一天后保温容器内的水温下降多少度?

思考题

从前有一个神秘的星球叫浮士德星，这个星球的每年有一万天。星球上的人出生时都会和魔鬼签署了一份协议：每个人每天起床都要投掷 600 次骰子。如果 1, 2, 3, 4, 5, 6 每个数字均恰好出现 100 次，魔鬼就要带走这个人的灵魂，否则魔鬼会保护这个人一天平安无事。 有一天赌王来到了浮士德星，传授给了浮士德星人一个秘术——666大法。使用秘术之后，每次掷骰子出现 6 的概率会稍稍增加，但增加的幅度非常小以致于魔鬼无法察觉。从此浮士德村人的平均寿命延长了5年。请由此推断： 666秘术能使单次掷骰子出现 6 的概率增加多少?

三维空间波动问题的格林函数

$$\frac{\delta(at - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)}{4\pi a|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}.$$

三维空间的波动问题

在三维无边界空间中，设有波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\nabla^2 u = 0.$$

和初始条件

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

这是个典型的格林函数问题。根据我们在一维和二维求解的经验，只要求出了初始速度脉冲的格林函数，对时间求一下偏导就能得到初始位移脉冲的格林函数。（请自行证明这个结论。）

可以取 $\mathbf{x}_0$ 所在位置为原点建立球坐标系，直接写出格林函数为：

$$G_v = \int_0^{\infty} j_0(kr)c(k)\sin(akt)dk.$$

注意利用初始条件的球对称性，我们仅保留了$l = m = 0$的项。并且由于无边界，k可以连续取到一切非负实数值。这里的 $c(k)dk$ (函数c待定) 是连续情况下的 “展开系数”。

初始条件

这样初始条件就是

$$\frac{\delta(r-\epsilon)}{4\pi a r^2} = \int_0^\infty j_0(kr)c(k)kdk.$$

这里$\epsilon \to 0^+$。（请自行思考为何 $\frac{\delta(r-\epsilon)}{4\pi r^2}$ 是在原点的三维 δ 函数。）
利用贝塞尔函数的正交关系，

$$\frac{\pi\delta(r-\epsilon)}{2r^2} = \int_0^\infty k^2 j_0(kr) j_0(k\epsilon)dk.$$

直接看出 $c(k) = \frac{kj_0(k\epsilon)}{2\pi^2 a}$。令 $\epsilon \to 0^+$ 即得 $c(k) = \frac{k}{2\pi^2 a}$.

于是

$$G_v = \frac{1}{2\pi^2 a}\int_0^\infty \frac{\sin(kr)}{kr}\sin(akt)kdk.$$

利用 j_0 的正交关系，有

$$G_v = \frac{1}{4\pi ar}\delta(at-r) = \frac{\delta(at-|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|)}{4\pi a|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}.$$

考虑初值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\nabla^2 u = 0.$$

$$u\big|_{t=0} = \phi(\mathbf{x}), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(\mathbf{x}).$$

其解为

$$u(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi a}\left[\iiint \phi(\mathbf{x}_0)\frac{\delta(at-|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}d^3\mathbf{x}_0 + \frac{\partial}{\partial t}\iiint \psi(\mathbf{x}_0)\frac{\delta(at-|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}d^3\mathbf{x}_0\right].$$