Methods of Mathematical Physics

§32 二维无界空间中的波动问题

Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/mmp

本讲内容

思考题

估算积分

$$\int_{100\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

思考题

长度为L的均匀导热棒一端和温度为 200K 的热库接触，并在 $t=0$ 时刻和热库处于热平衡。从 $t=0$ 时刻开始，在导热棒的另一端注入恒定大小的热流。设已知导热棒的材料的热传导方程参数为 a，在 $t=\frac{L^2}{a}$ 时刻，棒的中点的温度为 300K。问：在 $t=\frac{2L^2}{a}$ 时刻，棒的中点的温度为多少 K?

思考题

设 $k_1 > k_2 > 0$ 证明:

$$\int_0^{\infty} x J_m(k_1 x) J_m(k_2 x) dx = \frac{\delta(k_1 - k_2)}{k_1}.$$

有限大小薄膜振动

求解一个周边固定的半径为 R 的圆形弹性轻薄膜的横向（即垂直于薄膜表面的）小振动$u(r,\theta,t)$ (这里 r,θ是以薄膜中心为原点的极坐标, $0 \le r \le R$)。设其初始位移为已知函数 $\phi(r,\theta)$，初始速度为零。波动方程的参数 a 已知。

第一步：写出三要素

写出方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u = 0.$$

边界条件

$$u\big|_{r=R} = 0.$$

和初始条件

$$u\big|_{t=0} = \phi(r, \theta), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

第二步：写出分离变量形式解

考虑所给区域为圆盘，直接写出解的分离变量形式：

$$u(r,\theta,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} J_m(k_{m,i}r)\left[A_{m,i}\cos(m\theta) + B_{m,i}\sin(m\theta)\right]\cos(ak_{m,i}t)$$

这里我们只写了 $\cos(akt)$ 而没有写 $\sin(akt)$的成分是利用了初始速度为零的条件；如果是初始位移为零，初始速度不为零，则要写 $\sin(akt)$；如果初始速度和位移均不为零，则 $\cos(akt)$和 $\sin(akt)$的成分均要保留，待定系数就多了一倍（当然非平凡的初始条件也多了一倍，因此还是ok）。

第三步：解释解里面的k如何取值。

利用边界条件，我们对 $k_{m,i}$ 的限制为

$$J_m(k_{m,i}R) = 0.$$

即$k_{m,i}$是 J_m的第 i个正式数零点和 R之比。

第四步：把初始条件按展开基投影，写出展开系数

由初始条件有：

$$\phi(r,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} J_m(k_{m,i}r)\left[A_{m,i}\cos(m\theta) + B_{m,i}\sin(m\theta)\right].$$

于是把方程左边按右边的正交展开基进行投影得到

$$A_{m,i} = \frac{\int_0^R rdr\int_0^{2\pi} d\theta\left[\phi(r,\theta)J_m(k_{m,i}r)\cos(m\theta)\right]}{\int_0^R rdr\int_0^{2\pi} d\theta\left[J_m(k_{m,i}r)\cos(m\theta)\right]^2}.$$

$$B_{m,i} = \frac{\int_0^R rdr\int_0^{2\pi} d\theta\left[\phi(r,\theta)J_m(k_{m,i}r)\sin(m\theta)\right]}{\int_0^R rdr\int_0^{2\pi} d\theta\left[J_m(k_{m,i}r)\sin(m\theta)\right]^2}.$$

第五步：把你会的积分都积出来

来点格林函数问题

如果初始位移 $\phi = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$，那么就是典型的格林函数问题。我们考虑一个简单的也通常是格林函数非常有用的$R \to \infty$，也就是无边界的情形。

这时可以取 $\mathbf{x}_0$ 所在位置为原点建立极坐标系，直接写出格林函数为：

$$u = \int_0^{\infty} J_0(kr)\cos(akt)c(k)dk.$$

注意利用初始条件的旋转对称性，我们直接丢掉了 $m > 0$的项。并且由于无边界，k可以连续取到一切非负实数值。这里的 $c(k)dk$ (函数c待定) 是连续情况下的 “展开系数”。

初始条件

这样初始条件就是

$$\frac{\delta(r-\epsilon)}{2\pi r} = \int_0^\infty J_0(kr)c(k)dk.$$

这里$\epsilon \to 0^+$。（请自行思考为何 $\frac{\delta(r-\epsilon)}{2\pi r}$ 是在原点的二维 δ 函数。）

两边同乘以 $rJ_0(k'r)dr$ (这里 k'是任取的正数)，并对 r 积分，得到

$$\begin{aligned}
\frac{J_0(k'\epsilon)}{2\pi} &= \int_0^\infty c(k)dk \int_0^\infty rJ_0(kr)J_0(k'r)dr \\
&= \int_0^\infty c(k)dk \frac{\delta(k-k')}{k'} \\
&= \frac{c(k')}{k'}
\end{aligned}$$

最终解

令$\epsilon \to 0^+$，即得到

$$c(k) = \frac{k}{2\pi}.$$

即最终得到

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty kJ_0(kr)\cos(akt)dk.$$

位移脉冲和速度脉冲对应的格林函数

这样，在 $\mathbf{x}_0$ 处对应的初始位移脉冲产生的响应（也就是格林函数）是

$$G_s(\mathbf{x},t;\mathbf{x}_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty kJ_0(k|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|)\cos(akt)dk.$$

类似地，可以求出初始速度脉冲的响应为

$$G_v(\mathbf{x},t;\mathbf{x}_0)=\frac{1}{2\pi a}\int_0^\infty J_0(k|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|)\sin(akt)dk.$$

通过一系列操作……

附录进一步给出了积分的结果

$$G_s(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\delta(at - |\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|)}{\sqrt{a^2t^2 - |\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^2}} - \frac{at\,\mathrm{h}\left(at - |\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|\right)}{\left(a^2t^2 - |\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^2\right)^{3/2}}\right].$$

$$G_v(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\mathrm{h}\left(at - |\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|\right)}{\sqrt{a^2t^2 - |\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^2}}.$$

一般解

对于一般的初始位移 $\phi(\mathbf{x})$ 和初始速度 $\psi(\mathbf{x})$，解就可以用格林函数搞定：

$$u(\mathbf{x}, t) = \iint d^2\mathbf{x}_0 \left[G_s(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)\phi(\mathbf{x}_0) + G_v(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)\psi(\mathbf{x}_0) \right].$$

计算积分

要赖参数很有用

我们来计算积分

$$I = \int_0^\infty J_0(kr)\sin(akt)dk.$$

利用 J_0的积分表示，可以得到

$$I = \frac{1}{4\pi i}\int_0^\infty \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{ik[r(\sin\theta + i\epsilon)+at]} - e^{ik[r(\sin\theta+i\epsilon)-at]}\right) d\theta dk.$$

这里为了让积分收敛，加入了耍赖参数 $\epsilon \to 0^+$；先对k积分得到

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t}{a^2t^2 - r^2(\sin\theta + i\epsilon)^2} d\theta.$$

把积分转化为单位圆上的围道积分,

$$I = \frac{1}{2\pi r} \oint_{|z|=1} \left[\frac{1}{z^2 + 2(i\lambda - \epsilon)z - 1} - \frac{1}{z^2 - 2(i\lambda + \epsilon)z - 1} \right] dz.$$

这里的 $\lambda = at/r$。

如果$\lambda < 1$，则记

$$\alpha_{\pm} = \epsilon - i\lambda \pm \sqrt{1-\lambda^2 - 2i\lambda\epsilon},\ \beta_{\pm} = \epsilon + i\lambda \pm \sqrt{1-\lambda^2 + 2i\lambda\epsilon}$$

$$I = \frac{1}{2\pi r}\oint_{|z|=1}\left[\frac{1}{(z-\alpha_+)(z-\alpha_-)} - \frac{1}{(z-\beta_+)(z-\beta_-)}\right]dz.$$

孤立奇点α_-, β_-在单位圆 $|z|=1$ 内部(现在你知道为什么我一直保留ϵ了)，留数之和为

$$\frac{1}{\alpha_- - \alpha_+} - \frac{1}{\beta_- - \beta_+} = 0.$$

也就是说，在区域 $r > at$ 内， $u = 0$ —— 物理上来看这是显然的。

如果 $\lambda > 1$，则记

$$\alpha_{\pm} = \left(-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 1}\right) i, \ \beta_{\pm} = \left(\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 1}\right) i$$

$$I = \frac{1}{2\pi r} \oint_{|z|=1} \left[\frac{1}{(z-\alpha_+)(z-\alpha_-)} - \frac{1}{(z-\beta_+)(z-\beta_-)}\right] dz.$$

孤立奇点α_+, β_-在单位圆 $|z| = 1$ 内部，由留数定理得

$$I = \frac{i}{r}\left(\frac{1}{\alpha_+ - \alpha_-} - \frac{1}{\beta_- - \beta_+}\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2t^2 - r^2}}.$$

最后得到

$$I = \frac{\mathrm{h}\left(at - r\right)}{\sqrt{a^2t^2 - r^2}}.$$

这里的 h 是单位跃阶函数。

把结果

$$\int_0^\infty J_0(kr)\sin(akt)dk = \frac{\mathrm{h}\,(at-r)}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}.$$

两边对 t求偏导，就得到：

$$\int_0^\infty kJ_0(kr)\cos(akt)dk = \frac{\delta(at-r)}{\sqrt{a^2t^2-r^2}} - \frac{at\ \mathrm{h}\,(at-r)}{(a^2t^2-r^2)^{3/2}}.$$