Methods of Mathematical Physics

§31 一维无界空间中的波动问题

Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/mmp

本讲内容

思考题

估算

$$\prod_{k=0}^{10^{16}}\left(1+\frac{3}{4k+1}\right).$$

保留2位有效数。

δ 函数的二重积分

计算

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta(x^2-y)}{y^3+1}dxdy.$$

一维瞬时波源（位移）

考虑一维波动方程的瞬时点源问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

$$u\big|_{t=0} = \delta(x - x_0),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

利用一维无边界波动方程的通解，得到

$$u = G_s(x, t; x_0) = \frac{1}{2}\left[\delta(x - at - x_0) + \delta(x + at - x_0)\right].$$

也就是说脉冲会分成相等的两份以速度a向左右两边传播。

一维瞬时波源（速度）

如果脉冲是初始速度

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

$$u\big|_{t=0} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \delta(x - x_0).$$

仍然利用一维无边界波动方程的通解，得到

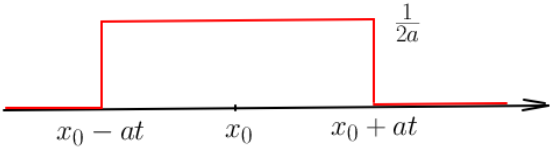
$$u = G_v(x, t; x_0) = \frac{1}{2a}\left[\mathrm{h}\left(x + at - x_0\right) - \mathrm{h}\left(x - at - x_0\right)\right].$$

这里的 h 是单位跃阶函数。

一维瞬时波源（速度）

$$G_v(x,t;x_0)=\frac{1}{2a}\left[\mathrm{h}\left(x+at-x_0\right)-\mathrm{h}\left(x-at-x_0\right)\right].$$

如下图所示：



这揭示一个很有意思的现象：一维的瞬时速度源可以导致整个因果关联区域（即波能传播到的地方）都有信号。

一维无界波动的初值问题一般解

知道了初始位移和初始速度分别对应的格林函数 G_s, G_v，那么一般的初值问题就可以用格林函数来搞定，不失一般性，考虑：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\nabla^2 u = 0,$$

$$u\big|_{t=0} = \phi(x),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \psi(x).$$

一维无界波动的一般初值问题的解

直接写出答案

$$u = \int G_s(x,t;x_0)\phi(x_0)dx_0 + \int G_v(x,t;x_0)\psi(x_0)dx_0.$$

并直接计算得到

$$u = \frac{1}{2}\left[\phi(x-at)+\phi(x+at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(x_0)dx_0.$$

思考题

请用一维无界波动方程的通解直接求解上述一般初值问题的解。

高维的情况

一维的解其实可以直接用通解获得。但在高维的情况，通解并不存在，格林函数方法就非常重要了。我们留到以后再详细讨论。