Methods of Mathematical Physics

§30 格林函数进阶知识

Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/mmp

本讲内容

思考题

已知正交曲面坐标系(X, Y, Z)中的长度元的表达式:

$$dL = \sqrt{\frac{dX^2 + dY^2 + X^2Y^2dZ^2}{1 + X^2 + Y^2}}.$$

那么体积元的表达式是什么?

思考题

计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^4 - 1)x^2 dx.$$

思考题

长度为0.1m的均匀铝棒一端和温度为300K的热库接触（棒的其余各处都孤立绝热），并在 $t<0$ 时和热库处于热平衡。从 $t=0$ 时刻开始，在棒的另一端持续地沿着棒的方向注入大小为 $j=2.3\times10^4\mathrm{W/m^2}$ 的热流。经过10分钟后，棒的中点的温度为多少K？已知铝的导热系数为 $230\mathrm{W\,m^{-1}K^{-1}}$，比热为 $900\mathrm{J\,kg^{-1}K^{-1}}$，密度为 $2700\mathrm{kg\,m^{-3}}$。

思考题

证明 Wallis 公式

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$$

其中 $m!! \equiv m(m-2)(m-4)\dots$ 即从 m 开始，递减量为 2 的连乘积，直到乘到 2 或 1 为止。例如 $5!! = 5\times 3\times 1 = 15$，$6!! = 6\times 4\times 2 = 48.$

思考题

计算不定积分

$$\int x^4 J_1(x)dx$$

活跃一下气氛（7$\star$)

对正整数n定义

$$f(n)=\sum_{k=1}^{n}\tan^2\frac{k\pi}{2n+1}$$

计算无穷级数和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)}.$$

格林函数进阶

持续热源

瞬时点热源

我们讨论过一维无界区域的瞬时点热源的扩散问题：

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

$$u\big|_{t=0} = \delta(x - x_0).$$

这是个格林函数问题，容易看出其解为：

$$G_{\mathrm{1D}}(t, x; x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x_0)-ak^2 t}\,dk = \frac{1}{\sqrt{4\pi a t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4at}}.$$

(它很容易推广到高维空间：

$$G_{\mathrm{2D}}(t, x, y; x_0, y_0) = G_{\mathrm{1D}}(t, x; x_0)G_{\mathrm{1D}}(t, y; y_0)$$

$$G_{\mathrm{3D}}(t, x, y, z; x_0, y_0, z_0) = G_{\mathrm{1D}}(t, x; x_0)G_{\mathrm{1D}}(t, y; y_0)G_{\mathrm{1D}}(t, z; z_0)$$

等)

时间平移

如果瞬时点热源是$t=\tau$时刻放的，

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

$$u\big|_{t=\tau} = \delta(x-x_0).$$

则只需要做一下时间平移：

$$u = \frac{1}{\sqrt{4\pi a(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a(t-\tau)}}, \quad (t>\tau).$$

持续点热源

如果有持续的点热源,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \delta(x - x_0).$$

$$u\big|_{t=0} = 0.$$

这可以看成 $\tau = 0$ 时刻开始每隔 $d\tau$ 时间就放一个点热源 $\delta(x - x_0)d\tau$。在t时刻,只有$0 \leq \tau \leq t$时刻的热源才有贡献。因此问题的解为:

$$u(x, t) = \int_0^t d\tau \frac{1}{\sqrt{4\pi a(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a(t-\tau)}}.$$

把$t - \tau$换为τ,

$$u(x, t) = \int_0^t d\tau \frac{1}{\sqrt{4\pi a\tau}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a\tau}}.$$

检验解

我们来检验一下这个解——
积分号下求导

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{4\pi a t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4at}}.$$

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \int_0^t d\tau \left[\frac{(x-x_0)^2}{4a\tau^2} - \frac{1}{2\tau}\right] \frac{1}{\sqrt{4\pi a\tau}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a\tau}} = \left.\frac{1}{\sqrt{4\pi a\tau}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a\tau}}\right|_0^t.$$

于是有

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lim_{\tau\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{4\pi a\tau}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a\tau}} = \delta(x-x_0).$$

持续点热源的高维情况

很容易看出，二维和三维空间的解为

$$u(x,t)=\int_0^t d\tau \frac{1}{\sqrt{4\pi a(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}{4a(t-\tau)}}.$$

$$u(x,t)=\int_0^t d\tau \frac{1}{\sqrt{4\pi a(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-x_0)^2-(y-y_0)^2-(z-z_0)^2}{4a(t-\tau)}}.$$

格林函数进阶

三维无界空间的Helmholtz方程

自由Helmholtz方程

谐函数满足的方程

$$\nabla^2 f + k^2 f = 0.$$

也叫自由Helmholtz方程。当 $k = 0$，就是无源的泊松方程。

有点源的Helmholtz方程

$$\nabla^2 f + k^2 f = \delta(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0)$$

是有点源的Helmholtz方程。当 $k = 0$，就是有点源的泊松方程。

我们重点讨论物理中常见的三维情况。

三维空间$k=0$的情况

当 $k=0$ 时，

$$\nabla^2 f = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$$

（在静电学的点电荷问题里，右边还要多乘个 $-\frac{q}{\epsilon_0}$.）
默认无穷远处的f趋向于零，就可以通过和静电学的结果比较，得到 f 等于

$$G(\mathbf{x};\mathbf{x}_0) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}.$$

这就是三维无界空间的泊松方程的格林函数。

$k=0$的情况

对有任意静态源的情况

$$\nabla^2 f = s(\mathrm{x})$$

显然只需要把静态源分解为一系列的 δ 函数(相当于把连续电荷分布看成很多点电荷的集合),

$$s(\mathrm{x}) = \sum_{\mathrm{x}_0} [d^3 \mathrm{x}_0 f(\mathrm{x}_0)] \delta(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0).$$

好吧还是写成你喜欢的积分形式

$$s(\mathrm{x}) = \int d^3 \mathrm{x}_0 f(\mathrm{x}_0) \delta(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0).$$

$k=0$的情况

问题的解就是把这些δ源的解做完全相同的线性组合：

$$f(\mathbf{x}) = \int d^3x_0 f(\mathbf{x}_0) G(\mathbf{x};\mathbf{x}_0) = -\int d^3x_0 \frac{s(\mathbf{x}_0)}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}.$$

好吧，你已经认出来了，把 $s(\mathbf{x})$换成 $-\frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0}$，这就是电磁学的静电势积分公式。

$k > 0$的情况

下面我们来讨论更有意思的 $k > 0$ 的情况，在波动问题中，分离变量后常常出现这样的情况

$$\nabla^2 f + k^2 f = \delta(x - x_0)$$

我们以 x_0 为球心建立球坐标系，那么问题的解必然可以写成（挖掉球心的空间内的）谐函数的线性组合。又问题是各向同性的，我们可以直接写出

$$f = a j_0(kr) + b n_0(kr)$$

的形式。

$k > 0$的情况

利用球贝塞尔函数的具体形式

$$j_0(kr) = \frac{\sin(kr)}{(kr)}, \quad n_0(kr) = -\frac{\cos(kr)}{(kr)}$$

我们也可以把解写成

$$f = C_1 \frac{e^{ikr}}{r} + C_2 \frac{e^{-ikr}}{r}.$$

的形式。在原点附近很小体积内对原方程进行积分，物理上通常可以假设f的体积分趋向于零，于是和泊松方程的情况一样，可以确定出

$$C_1 + C_2 = -\frac{1}{4\pi}$$

$k > 0$的情况

那么具体 C_1 和 C_2 的比例该取多少呢？这要由具体问题的无限远处边界条件决定。如果是个发散球面波问题，要求越远相位就越大，则通常只能取 $C_1 = -\frac{1}{4\pi}, C_2 = 0$。即格林函数为

$$G(\mathrm{x}; \mathrm{x}_0) = -\frac{e^{ik|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0|}}{4\pi|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0|}.$$

如果是会聚球面波问题，则

$$G(\mathrm{x}; \mathrm{x}_0) = -\frac{e^{-ik|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0|}}{4\pi|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0|}.$$

上述任意一个情况令$k=0$，都能得到泊松方程的格林函数。