

Methods of Mathematical Physics

§29 近似与等效

Lecturer: 黄志琦

<http://zhiqihuang.top/mmp>

变分问题

一个高为1的封闭盒子，上下底面均为半径为1的圆。盒子的表面积的最小值是多少？

无限长圆柱

有一个半径为 R 的无穷长带电圆柱面，以圆柱中轴线为 z 轴建立柱坐标系 (r, θ, z) 。取无穷远处电势为零电势，圆柱面上的电势可以写为

$$U(r, \theta, z)|_{r=R} = V_0 e^{-\left(\frac{z}{50R}\right)^2} \cos(2\theta),$$

其中 V_0 为常量。

已知圆柱面外为真空，那么 $U(2R, 0, 0)$ 大约是 V_0 的多少倍。

圆环的热传导问题

一个内半径为 $R_1 = 0.098\text{m}$ ，外半径为 $R_2 = 0.102\text{m}$ 的均匀薄圆环。其材质的热传导方程参数为 $10^{-4}\text{m}^2/\text{s}$ 。以圆环中心建立极坐标系，在 $t = 0$ 时刻圆环上的初始温度分布为

$$T(r, \theta)|_{t=0} = T_0 \cos^4 \left[\frac{(r - R_1)\pi}{R_2 - R_1} \right] \cos^2 \theta.$$

其中 T_0 为常量。

试估算：在 $t = 50\text{s}$ 时刻，圆环上最热的点和最冷的点的温差大约是 T_0 的多少倍？

球壳的热传导问题

一个内半径为 $R_1 = 0.098\text{m}$ ，外半径为 $R_2 = 0.102\text{m}$ 的孤立均匀空心球壳，其材质的热传导方程参数 $a = 10^{-4}\text{m}^2/\text{s}$ 。以其球心为原点建立球坐标系 (r, θ, ϕ) 。一开始各点的温度为

$$T(r, \theta, \phi)|_{t=0} = T_0 \left[2 + \cos^2 \frac{(r - R_1)\pi}{R_2 - R_1} \cos \theta \right].$$

在 $t = 25\text{s}$ 时，空心球壳上的最热点和最冷点的温差大约是 T_0 的多少倍？

活跃一下气氛 (7★)

估算球面谐函数

$$Y_{10000,2} \left(\frac{\pi}{100}, 0 \right)$$

的值。