Methods of Mathematical Physics

§25 勒让德多项式，球谐函数的更多性质

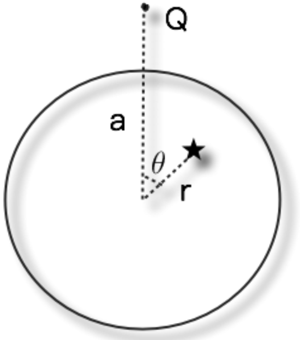
Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/mmp

本讲内容

金属球外的点电荷

金属球外距离球心a处的点电荷Q造成的电势是一个熟悉的距离反比电势。



如图建立球坐标系。设感应电荷产生的电势为$u(r,\theta)$ (由轴对称性很容易看出u不依赖于ϕ)。则在星号位置处的总电势为:

$$U_{\text{total}} = u(r,\theta) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\theta}}.$$

勒让德函数的母函数定理

套路当然是要把$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\theta}}$写成一堆球坐标系谐函数的和。这要用到下列勒让德多项式的母函数定理:

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2xt}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(x)t^\ell, \quad t < |x \pm \sqrt{x^2-1}|.$$

其中的勒让德多项式$P_\ell(x)$是一个ℓ次多项式，它和$m=0$的球谐函数的关系为

$$P_\ell(\cos\theta) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\,Y_{\ell 0}(\theta,\phi).$$

（证明见附录）

球外点电荷感应电势问题的解

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\theta}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a\sqrt{1+\left(\frac{r}{a}\right)^2-2\frac{r}{a}\cos\theta}}$$
$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}\sum_{\ell=0}^{\infty}P_\ell(\cos\theta)\left(\frac{r}{a}\right)^\ell.$$

要求球内部总电势处处相等，则$\ell>0$的项必须全部被u抵消。又根据球心处$u=0$，可以确定常数项为零：

$$u(r,\theta)|_{r\le R} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}\sum_{\ell=1}^{\infty}P_\ell(\cos\theta)\left(\frac{r}{a}\right)^\ell.$$

球外点电荷感应电势问题的解

根据套路，在球外的解只要作个替换$r^\ell \to \frac{R^{2\ell+1}}{r^{\ell+1}}$:

$$u(r,\theta)|_{r>R} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}\sum_{\ell=1}^{\infty} P_\ell(\cos\theta)\frac{R^{2\ell+1}}{a^\ell r^{\ell+1}}.$$

用镜像电荷（因为是电磁学内容，和数理方程关系不大，不再详细讲解）得到的表达式是有限的。这里的结果是级数展开。有兴趣的话可以尝试证明两者互相等价

勒让德多项式的递推关系

除了母函数定理之外，勒让德多项式最重要的性质是它的递推公式：

$$\boxed{(2\ell+1)xP_\ell(x) = (\ell+1)P_{\ell+1}(x) + \ell P_{\ell-1}(x)}$$

(请先思考一下怎么证明)

勒让德多项式的递推关系证明概要

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2xt}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(x)t^\ell, \quad t < |x \pm \sqrt{x^2-1}|.$$

两边对t求导，得到

$$\frac{x-t}{(1-2xt+t^2)^{3/2}} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell P_\ell(x)t^{\ell-1}$$

即

$$(x-t)\sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(x)t^\ell = (1-2xt+t^2)\sum_{\ell=1}^{\infty} \ell P_\ell(x)t^{\ell-1}$$

两边比较同次项系数即得证。

罗巨格公式

在球面谐函数的微分表示中令$m = 0$，即得到

$$Y_{\ell 0}(\theta, \phi) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)^\ell \sin^{2\ell}\theta.$$

利用$P_\ell(\cos\theta) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}Y_{\ell 0}(\theta, \phi)$，上式成为

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}(x^2 - 1)^\ell.$$

这就是著名的罗巨格公式 (Rodrigues' Formula).

罗巨格公式的直接证明

用球面谐函数的微分表示导出罗巨格公式有点杀鸡用牛刀的感觉。

令$t = x - 1$，也可以直截了当地用P_ℓ的定义证明罗巨格公式

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left[(x^2-1)^\ell\right] &= \frac{1}{\ell!}\frac{d^\ell}{dt^\ell}\left[t^\ell(1+\frac{t}{2})^\ell\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\ell}\frac{1}{2^k k!(\ell-k)!}\frac{d^\ell}{dt^\ell}\left[t^{\ell+k}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\ell}\frac{(\ell+k)!}{(k!)^2(\ell-k)!}\left(\frac{t}{2}\right)^k \\
&= P_\ell(x)
\end{aligned}
$$

连带勒让德函数(Associated Legendre Functions)

很多MMP教材上的推导次序是相反的：从勒让德函数引出一个连带勒让德函数：

$$P_\ell^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_\ell(x), \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \ell.$$

然后再通过连带勒让德函数引出$m \geq 0$的球面谐函数，最后再定义$Y_{\ell,-m} = (-1)^m Y_{\ell m}^*$来确定$m < 0$的球面谐函数。

P_ℓ^m跟$\Psi_{\ell m}$之间的关系显而易见：

$$P_\ell^m(\cos\theta) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \Psi_{\ell m}(\theta).$$

例题1

把x^n $(n \geq 0, n \in Z, -1 \leq x \leq 1)$ 展开成

$$x^n = \sum_{\ell=0}^{n} c_\ell P_\ell(x)$$

计算系数c_ℓ。

解答

根据$P_\ell(x)$的正交归一性以及罗巨格公式，分部积分ℓ次，得到:

$$\begin{aligned} c_\ell &= \frac{2\ell+1}{2}\int_{-1}^{1} P_\ell(x)x^n dx \\ &= \frac{2\ell+1}{2^{\ell+1}\ell!}\int_{-1}^{1} x^n \frac{d^\ell}{dx^\ell}(x^2-1)^\ell \\ &= \frac{(2\ell+1)n!}{2^{\ell+1}\ell!(n-\ell)!}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^\ell x^{n-\ell}dx \end{aligned}$$

显然当$n-\ell$为奇数时，$c_\ell = 0$。

解答（续）

当$n-\ell$为偶数时，设$n-\ell=2k$，并做变量替换$t=x^2$：

$$
\begin{aligned}
c_\ell &= \frac{(2\ell+1)n!}{2^{\ell+1}\ell!(n-\ell)!}\int_0^1 (1-t)^\ell t^{k-\frac{1}{2}}dt \\
&= \frac{(2\ell+1)(2k+\ell)!}{2^{\ell+1}\ell!(2k)!}\frac{\Gamma(\ell+1)\ \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\ell+k+\frac{3}{2}\right)} \\
&= \frac{(2\ell+1)(2k+n)!\,\Gamma\left(\frac{n-\ell+1}{2}\right)}{2^{\ell+1}(2k)!\,\Gamma\left(\frac{n+\ell+3}{2}\right)} \\
&= \frac{2^\ell(2\ell+1)(\ell+k)!(\ell+2k)!}{k!(2\ell+2k+1)!}
\end{aligned}
$$

因此最后得到：

$$
x^n = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{2^{n-2k}(2n-4k+1)(n-k)!n!}{k!(2n-2k+1)!}P_{n-2k}(x).
$$

例题2

把$e^{i\lambda x}$ $(-1 \leq x \leq 1$为变量，λ为任意实数参量)展开成级数:

$$e^{i\lambda x} = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell(\lambda) P_\ell(x).$$

试计算展开系数$c_\ell(\lambda)$的显式表达式。

解答

$$
\begin{aligned}
e^{i\lambda x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \lambda^n}{n!} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{i^n \lambda^n}{n!} \frac{2^{n-2k}(2n-4k+1)(n-k)!n!}{k!(2n-2k+1)!} P_{n-2k}(x) \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{\ell}(2\ell+1) P_\ell(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\lambda)^{\ell+2k}(\ell+k)!}{k!(2\ell+2k+1)!} \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^{\ell} P_\ell(x) \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\ell+k+\frac{3}{2})} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\ell+2k+\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^{\ell} j_\ell(\lambda) P_\ell(x)
\end{aligned}
$$

评论

在最后得到的结果

$$e^{i\lambda x} = \sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)i^{\ell}j_{\ell}(\lambda)P_{\ell}(x)$$

里，令$\lambda = kr$，$x = \cos\theta$，则得到

$$e^{ikr\cos\theta} = \sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)i^{\ell}j_{\ell}(kr)P_{\ell}(\cos\theta)$$

这相当于把波矢沿z轴方向的平面波写成了k相同的一堆球坐标系谐函数的线性组合（由轴对称性显然$m\neq 0$的项不会出现），再次验证了我们之前说过的"同一个k对应的不同坐标系下谐函数只是重新进行了线性组合而已"。

球谐函数的宇称： $Y_{\ell m}(\mathbf{n})$和$Y_{\ell,m}(-\mathbf{n})$之间的关系

对相反的两个方向，有

$$\boxed{Y_{\ell m}(\mathbf{n}) = (-1)^{\ell} Y_{\ell m}(-\mathbf{n})}$$

证明

如果**n**对应(θ,ϕ)，则$-$**n**对应$(\pi-\theta,\pi+\phi)$。

$$
\begin{aligned}
& Y_{\ell m}(\pi-\theta,\pi+\phi) \\
= \quad & N_{\ell m}\left\{\sin^m(\pi-\theta)\left[\frac{1}{\sin(\pi-\theta)}\frac{d}{d(\pi-\theta)}\right]^{\ell+m}\sin^{2\ell}(\pi-\theta)\right\}e^{im(\pi+\phi)} \\
= \quad & N_{\ell m}\left\{\sin^m\theta\left(-\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)^{\ell+m}\sin^{2\ell}\theta\right\}(-1)^m e^{im\phi} \\
= \quad & (-1)^{\ell+2m}N_{\ell m}\left[\sin^m\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)^{\ell+m}\sin^{2\ell}\theta\right]e^{im\phi} \\
= \quad & (-1)^{\ell}Y_{\ell m}(\theta,\phi)
\end{aligned}
$$

$Y_{\ell m}$和$Y_{\ell,-m}$之间的关系

$$Y_{\ell,-m}(\theta,\phi) = (-1)^m Y^*_{\ell,m}(\theta,\phi)$$

证明大意

把$Y^*_{\ell m}(\theta,\phi) = N_{\ell,m}\Psi_{\ell m}(\theta)e^{-im\phi}$在单位球面上展开：

$$Y^*_{\ell m}(\theta,\phi) = \sum_{\ell',m'} c_{\ell' m'}\, Y_{\ell' m'}(\theta,\phi).$$

两边同乘以$Y^*_{\ell' m'}$并在单位球面上积分，得到

$$c_{\ell' m'} = \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, Y^*_{\ell' m'}(\theta,\phi) Y^*_{\ell m}(\theta,\phi).$$

即

$$c_{\ell' m'} = N_{\ell' m'} N_{\ell m} \int_0^{\pi} \Psi_{\ell' m'}(\theta)\Psi_{\ell m}(\theta)\sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi e^{-i(m'+m)\phi}.$$

显然，当$m'+m\neq 0$时上式为零。当$m'=-m$，但$\ell\neq\ell'$时，$\Psi_{\ell m}(\theta)\cos m\phi$和$\Psi'_{\ell' m'}(\theta)\cos m\phi$都是单位球面上的谐函数，且它们对应不同的$k^2_{2D}$ (即$\ell(\ell+1)$和$\ell'(\ell'+1)$)，根据一般正交定理，上式的积分仍为零。

证明大意

因此我们只需要计算$c_{\ell,-m}$。剩下的计算和证明$\Psi_{\ell m}$归一化积分时的过程几乎完全相同：

$$
\begin{aligned}
c_{\ell,-m} &= 2\pi N_{\ell m} N_{\ell,-m} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \Psi_{\ell m}(\theta)\Psi_{\ell,-m}(\theta) \\
&= 2\pi N_{\ell m} N_{\ell,-m} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)^{\ell-m} \sin^{2\ell}\theta \left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right)^{\ell+m} \sin^{2\ell}\theta \\
&= 2\pi N_{\ell m} N_{\ell,-m} \int_{-1}^1 \frac{d^{\ell-m}}{dx^{\ell-m}}(x^2-1)^\ell \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}}(x^2-1)^\ell dx \\
&= 2\pi N_{\ell m} N_{\ell,-m}(-1)^{\ell+m} \int_{-1}^1 (x^2-1)^\ell \frac{d^{2\ell}}{dx^{2\ell}}(x^2-1)^\ell dx \\
&= 2\pi N_{\ell m} N_{\ell,-m}(-1)^m (2\ell)! \int_{-1}^1 (1-x^2)^\ell dx \\
&= 2\pi N_{\ell m} N_{\ell,-m}(-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\frac{1}{2\pi N_{\ell m}^2} \\
&= (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\frac{N_{\ell,-m}}{N_{\ell m}} \\
&= (-1)^m
\end{aligned}
$$

三个$Y_{\ell m}$积分的对称性

定理：要使单位球面上的积分

$$\int Y_{\ell_1 m_1}(\mathbf{n}) Y_{\ell_2 m_2}(\mathbf{n}) Y_{\ell_3 m_3}(\mathbf{n}) d^2\mathbf{n}$$

非零，则必须有：

- $m_1 + m_2 + m_3 = 0$;
- 以ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3为三条边可以构成三角形，即$|\ell_1 - \ell_2| \leq \ell_3 \leq \ell_1 + \ell_2$;
- $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3$是偶数。

第一个条件的证明

$$Y_{\ell_1 m_1}(\mathbf{n}) Y_{\ell_2 m_2}(\mathbf{n}) Y_{\ell_3 m_3}(\mathbf{n}) \propto \Psi_{\ell_1 m_1}(\theta)\Psi_{\ell_2 m_2}(\theta)\Psi_{\ell_3 m_3}(\theta) e^{i(m_1+m_2+m_3)\phi}.$$

如果$m_1 + m_2 + m_3 \neq 0$，则对ϕ积分已经是零。

第二个条件的证明

下面考虑$m_1+m_2+m_3=0$的情况，如果ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3不能构成三角形，不妨设$\ell_1>\ell_2+\ell_3$，则运用分部积分的技巧：

$$
\begin{aligned}
& \int_0^\pi \Psi_{\ell_1 m_1}(\theta)\Psi_{\ell_2 m_2}(\theta)\Psi_{\ell_3 m_3}(\theta)\sin\theta d\theta \\
= & \int_{-1}^1 \frac{d^{\ell_1+m_1}}{dx^{\ell_1+m_1}}(x^2-1)^{\ell_1}\frac{d^{\ell_2+m_2}}{dx^{\ell_2+m_2}}(x^2-1)^{\ell_2}\frac{d^{\ell_3+m_3}}{dx^{\ell_3+m_3}}(x^2-1)^{\ell_3}dx \\
= & (-1)^{\ell_1+m_1}\int_{-1}^1 (x^2-1)^{\ell_1} \\
& \times \frac{d^{\ell_1+m_1}}{dx^{\ell_1+m_1}}\left[\frac{d^{\ell_2+m_2}}{dx^{\ell_2+m_2}}(x^2-1)^{\ell_2}\frac{d^{\ell_3+m_3}}{dx^{\ell_3+m_3}}(x^2-1)^{\ell_3}\right]dx \\
= & 0
\end{aligned}
$$

最后一步的结果是根据蓝色部分是次数低于ℓ_1+m_1次的多项式，求导ℓ_1+m_1次后显然为零。

第三个条件的证明

$$
\begin{aligned}
& Y_{\ell_1 m_1}(-\mathbf{n}) Y_{\ell_2 m_2}(-\mathbf{n}) Y_{\ell_3 m_3}(-\mathbf{n}) \\
= \ & (-1)^{\ell_1+\ell_2+\ell_3} Y_{\ell_1 m_1}(\mathbf{n}) Y_{\ell_2 m_2}(\mathbf{n}) Y_{\ell_3 m_3}(\mathbf{n}),
\end{aligned}
$$

显然若$\ell_1+\ell_2+\ell_3$为奇数时，积分在$\mathbf{n}$和$-\mathbf{n}$处两两抵消，结果为零。

δ函数和正交归一完备函数组的关系

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \sum_i Q_i(\mathbf{x})Q_i(\mathbf{x}')$$

δ函数和正交归一完备函数组的关系

设n维空间的某区域Ω内函数组$Q_i(\mathbf{x})$构成正交归一的完备函数组，即

$$\int_\Omega Q_i(\mathbf{x})Q_j(\mathbf{x})d^n\mathbf{x} = \delta_{ij},$$

由完备性，Ω内的函数总是可以用$Q_i(\mathbf{x})$进行展开，特别地，对固定的$\mathbf{x}'$，我们把函数$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$进行展开：

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \sum_i c_i Q_i(\mathbf{x})$$

由Q_i的正交归一性，系数

$$c_i = \int_\Omega \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')Q_i(\mathbf{x})d^n\mathbf{x} = Q_i(\mathbf{x}')$$

δ函数和正交归一完备函数组的关系

把c_i代回去得到：

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \sum_i Q_i(\mathbf{x}')Q_i(\mathbf{x}).$$

如果是用复函数内积定义的正交归一性，则上式变为

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \sum_i Q_i^*(\mathbf{x}')Q_i(\mathbf{x}).$$

如果正交归一性里的内积定义带权重：$\int_\Omega Q_i(\mathbf{x})Q_j(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x})d^n\mathbf{x} = \delta_{ij}$，则

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \sum_i \rho(\mathbf{x}')Q_i(\mathbf{x}')Q_i(\mathbf{x}).$$

单位球面上的δ函数

单位球面上的坐标θ,ϕ对应了一个方向$\mathbf{n}$(从原点出发指向单位球面上θ,ϕ点的单位矢量)。单位球面上的函数可以抽象地写为$f(\mathbf{n})$的形式。单位球面上的面积元$\sin\theta d\theta d\phi$可以抽象地写作$d^2\mathbf{n}$。

在不致引起混淆的情况下，我们也用$Y_{\ell m}(\mathbf{n})$来表示$Y_{\ell m}(\theta,\phi)$。根据前面的讨论，有

$$\delta(\mathbf{n}-\mathbf{n}') = \sum_{\ell m} Y^*_{\ell m}(\mathbf{n}')Y_{\ell m}(\mathbf{n}).$$

这里的$\delta(\mathbf{n}-\mathbf{n}')$是单位球面上的二维$\delta$函数（在$\mathbf{n}'$处的大小为$\epsilon\to 0^+$的小面积上的函数值为$\frac{1}{\epsilon}$，其余处处为零）。$\sum_{\ell m}$是双重求和$\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}$的简写。

球谐函数的加法公式

$$P_\ell(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y^*_{\ell m}(\mathbf{n}_1) Y_{\ell m}(\mathbf{n}_2)$$

球谐函数的加法公式

设$\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$为任意两个方向，则

$$P_\ell(\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2)=\frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{\ell}Y^*_{\ell m}(\mathbf{n}_1)Y_{\ell m}(\mathbf{n}_2),$$

这里的$\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2$是$\mathbf{n}_1$和$\mathbf{n}_2$的夹角的余弦。它可以用$\mathbf{n}_1$的坐标$(\theta_1,\phi_1)$和$\mathbf{n}_2$的坐标$(\theta_2,\phi_2)$明确地表示出来:

$$\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\phi_1-\phi_2).$$

证明

考虑在单位球面上的电荷产生的电势。
在单位球内：

$$u(r, \mathbf{n}) = \sum_{\ell,m} c_{\ell m} r^{\ell} Y_{\ell m}(\mathbf{n}), \quad r < 1;$$

在单位球外：

$$u(r, \mathbf{n}) = \sum_{\ell,m} c_{\ell m} r^{-\ell-1} Y_{\ell m}(\mathbf{n}), \quad r > 1.$$

根据高斯定理算出单位球面上的电荷面密度为

$$\sigma(\mathbf{n}) = \epsilon_0 \sum_{\ell,m} (2\ell+1) c_{\ell m} Y_{\ell m}(\mathbf{n}).$$

证明（续）

然后考虑球面上$\mathbf{n}_1$处有点电荷的情况:

$$\sigma(\mathbf{n}) = Q\delta(\mathbf{n}-\mathbf{n}_1) = Q\sum_{\ell m} Y^*_{\ell m}(\mathbf{n}_1)Y_{\ell m}(\mathbf{n}).$$

对比系数我们确定

$$c_{\ell m} = \frac{Q}{(2\ell+1)\epsilon_0} Y^*_{\ell m}(\mathbf{n}_1).$$

即在球内的电势为

$$u(r,\mathbf{n}_2) = \frac{Q}{(2\ell+1)\epsilon_0}\sum_{\ell m} Y^*_{\ell m}(\mathbf{n}_1)Y_{\ell m}(\mathbf{n}_2)r^\ell, \quad r<1.$$

证明（续）

另一方面，根据库仑定律直接可以算出(r, n_2)处的电势为

$$u(r, \mathbf{n}_2) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1 + r^2 - 2r\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{\ell} P_\ell(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) r^\ell.$$

比较r^ℓ的系数，即得证。

Homework

- 计算积分
$$\int_{-1}^{1} P_\ell(x)\ln(1-x)dx,$$
其中P_ℓ为勒让德多项式。
- 证明$\cos\theta Y_{\ell m}(\theta,\phi)$可以写成$Y_{\ell+1,m}(\theta,\phi)$和$Y_{\ell-1,m}(\theta,\phi)$的线性组合:
$$\cos\theta Y_{\ell m}(\theta,\phi) = aY_{\ell+1,m}(\theta,\phi) + bY_{\ell-1,m}(\theta,\phi),$$
其中a, b为只依赖于ℓ, m的常数。
- 我们曾经提到过同样的k对应的不同坐标系的谐函数可以互相线性表示出来。对直角坐标系和球坐标系而言，我们在课上证明了轴对称的情况。请利用球面谐函数的加法公式把这个结果推广到任意的平面波:
$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = 4\pi\sum_{\ell,m} i^\ell Y^*_{\ell m}(\hat{\mathbf{k}})Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{x}})j_\ell(kr),$$

附录： 勒让德多项式的母函数定理的证明

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2xt}} &= \frac{1}{(1-t)\sqrt{1-\frac{2(x-1)t}{(1-t)^2}}} \\
&= \frac{1}{1-t}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c} -\frac{1}{2} \\ k \end{array}\right)\left(-\frac{2(x-1)t}{(1-t)^2}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{2^k(k!)^2}(x-1)^k t^k (1-t)^{-2k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{2^k(k!)^2}(x-1)^k t^k \sum_{n=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c} -2k-1 \\ n \end{array}\right)(-t)^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2k+n)!}{2^k(k!)^2 n!}(x-1)^k t^{n+k} \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\ell}\frac{(\ell+k)!}{(k!)^2(\ell-k)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^k t^\ell
\end{aligned}
$$

附录： 勒让德多项式的母函数定理的证明(续)

定义勒让德多项式

$$P_\ell(x) = \sum_{k=0}^{\ell} \frac{(\ell+k)!}{(k!)^2(\ell-k)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^k.$$

显然它是ℓ次多项式。于是只要证明

1. $P_\ell(\cos\theta)$满足$m=0$的单位球面谐函数方程
2. P_ℓ的归一化满足

$$\frac{2\ell+1}{4\pi}\int_0^\pi P_\ell(\cos\theta)^2 \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 1.$$

即

$$\int_{-1}^{1} [P_\ell(x)]^2\, dx = \frac{2}{2\ell+1}.$$

附录：勒让德多项式的母函数定理的证明(续)

回忆$m = 0$的谐函数方程为

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}\Psi\right) + \ell(\ell+1)\Psi = 0.$$

令$x = \cos\theta$，则该微分方程等价于：

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}\Psi\right] + \ell(\ell+1)\Psi = 0.$$

验证$P_\ell(x)$满足该微分方程的过程并不困难，留为练习。

剩下的归一化条件，只要用到不同ℓ对应的勒让德多项式互相正交，就能很容易证明。也留为作业。