Methods of Mathematical Physics

§22 第二类贝塞尔函数

Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/mmp

极坐标下分离变量形式的谐函数

对固定$k>0$，在原点不发散的极坐标下分离变量形式的谐函数为

$$J_m(kr)\cos(m\theta),\ J_m(kr)\sin(m\theta),\quad (m=0,1,2,\ldots)$$

它们实际上是直角坐标系下分离变量形式的谐函数，也就是一堆平面波$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ ($|\mathbf{k}|=k$)的重新线性组合。

$k=0$的情形

我们再回头考虑之前被忽略掉的一种比较特殊的情形：$k=0$。
这时候可以取$k\to 0^+$的极限：$J_m(kr)\sim r^m$。
所以对$k=0$，在原点不发散的极坐标下分离变量形式的谐函数为:

$$c_1 r^m\cos(m\theta)+c_2 r^m\sin(m\theta),\quad (m=1,2,\ldots)$$

当 $m=0$，对应的解是常数。

注意：这些解其实已经无法满足零边界条件，因而属于对应特殊边界条件的特解范畴，在直角坐标系没有对应的平面波分解。

允许原点处发散的谐函数

如果考虑的是挖去原点的二维平面，则会有一族新的成员加入谐函数的大家庭：

- 对$k > 0$,

$$N_m(kr)\cos(m\theta),\ N_m(kr)\sin(m\theta),\quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

- 对$k = 0$，如果 $m > 0$，有

$$r^{-m}\cos(m\theta),\ r^{-m}\sin(m\theta),\quad (m = 1, 2, \ldots)$$

如果 $m = 0$，有

$$\ln r$$

这些解也可以看作 $N_m(kr)$ 当 $k \to 0^+$ 时的极限行为，但同样地，他们无法满足零边界条件，因而也属于对应特殊边界条件的特解范畴。

本讲的重点就是要介绍这里的第二类贝塞尔函数N_m。

本讲内容

任意阶第一类贝塞尔函数

非整数阶$J_{-\nu}$和J_ν线性独立，整数阶满足$J_{-m}(x)=(-1)^m J_m(x)$

任意阶贝塞尔函数

直接把m推广到任意实数ν,

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

定义对所有$x > 0$有效。当$\nu \geq 0$，还可以取$x \to 0$的极限。

- 当ν不是整数时，$(k+\nu)!$要理解为$\Gamma(k+\nu+1)$。
- $\frac{1}{\Gamma(z)}$的零点为$0, -1, -2, \ldots$，或者说负整数的阶乘是无穷大。所以上面的级数也可以写成k从$-\infty$到∞求和
- 如果你乐意，还可以把定义解析延拓到$-\pi < \arg x < \pi$。

贝塞尔函数的性质

递推公式对所有ν成立：

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\nu}J_{\nu}(x)\right] = x^{\nu}J_{\nu-1}(x);\ \frac{d}{dx}\left[x^{-\nu}J_{\nu}(x)\right] = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x);$$

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_{\nu}(x);\ J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}J_{\nu}(x).$$

渐近公式对所有ν都成立： $x \gg \nu^2$时

$$J_{\nu}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

另外，三个正交定理对$\nu \geq 0$都成立。

整数阶$J_{-m}(x)$和$J_m(x)$的线性关系

设$m \geq 0$为整数，利用负整数的阶乘为∞，有

$$\begin{aligned}
J_{-m}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k-m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m} \\
&= \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k-m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{(n+m)!n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(n+m)-m} \\
&= (-1)^m J_m(x)
\end{aligned}$$

非整数阶J_ν和$J_{-\nu}$线性独立

当$x \to \infty$时

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$J_{-\nu}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x + \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

两者的相位差$\nu\pi$，ν不是整数时，无法通过线性叠加完全消失。

这个结论也能从$x \to 0^+$时的渐近行为得到，请自行研究。

第二类贝塞尔函数

和第一类贝塞尔函数渐近正交，大多数性质相同，除了在$x \to 0^+$时发散

贝塞尔方程的线性独立解

设$\nu > 0$为非整数，贝塞尔方程

$$f'' + \frac{1}{x}f' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) f = 0$$

有两个线性独立的解：$J_\nu(x)$和$J_{-\nu}(x)$。

这无法推广到ν为整数的情形。我们来思考其背后的原因。

J_ν和$J_{-\nu}$之间的“独立性”随着ν逼近整数而趋向于消失

如果考虑一下J_ν和$J_{-\nu}$的渐近展开：

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$J_{-\nu}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x + \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

当ν趋向于一个整数，两者的“独立性”趋向于消失。

因为J_ν和$J_{-\nu}$之间的独立性依赖于ν，取它们作为两个独立解并不合适。最合理的方法是取J_ν和另一个渐近行为为

$$\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

的解。这样两个解就类似于余弦和正弦一样“正交”了。

第二类贝塞尔函数

利用

$$\cos\left(x+\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cos(\nu\pi)-\sin\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sin(\nu\pi)$$

只要定义

$$N_\nu(x)=\frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi)-J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)},$$

则$N_\nu(x)$满足我们期待的渐近公式:

$$\boxed{N_\nu(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right),\quad x\gg\nu^2}$$

注意：在很多文献上把第二类贝塞尔函数写成Y_ν，仅是符号的差别。

整数阶$N_m(x)$

为了对整数阶也适用，我们把定义修改为极限

$$\boxed{N_\nu(x) := \lim_{\alpha\to\nu} \frac{J_\alpha(x)\cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}}$$

因为N_ν和J_ν渐近正交，不可能线性相关。所以 对任意ν，J_ν和N_ν都是贝塞尔方程的两个线性独立解。

贝塞尔方程的推广：类贝塞尔方程

定理：类贝塞尔方程

$$y'' + \frac{1-2\alpha}{x}y' + \left(\beta^2\gamma^2 x^{2\gamma-2} + \frac{\alpha^2-\nu^2\gamma^2}{x^2}\right)y = 0$$

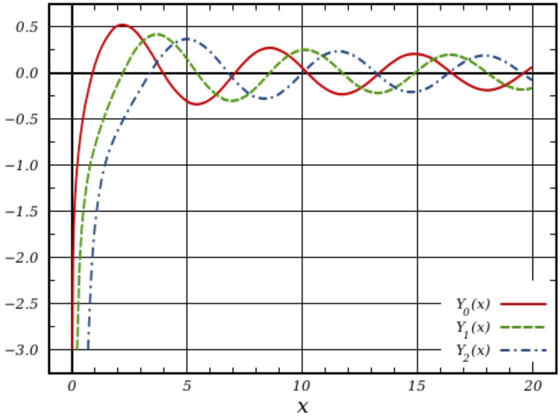
在 $x > 0$ 范围内有两个线性无关解：$x^\alpha J_\nu(\beta x^\gamma)$和$x^\alpha N_\nu(\beta x^\gamma)$.

显然，上述定理$\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$时就退化为贝塞尔方程的问题。

思考题

你能想办法证明前述关于类贝塞尔方程的解的定理吗?

N_0, N_1, N_2



N_ν的定性图像

对$\nu \geq 0$， N_ν和J_ν都是振幅以$\sim \frac{1}{\sqrt{x}}$方式衰减，周期近似为2π的振荡函数。区别是$x \to 0^+$时的行为。
如果$\nu > 0$，当$x \to 0^+$时

$$J_\nu(x) \approx \frac{1}{\nu!}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu, \quad N_\nu(x) \approx -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}.$$

如果$\nu = 0$，当$x \to 0^+$时

$$J_0(x) \approx 1, \quad N_0(x) \approx \frac{2}{\pi}\ln x$$

证明非常简单，留为练习
因为$N_\nu(kr)$在$r \to 0$时发散，当且仅当考虑的区域为去心的环形区域时才需要考虑谐函数：$N_m(kr)e^{\pm im\theta}$.

N_ν的递推关系

N_ν和J_ν一样满足递推关系：

$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu N_\nu(x)\right] = x^\nu N_{\nu-1}(x);\ \ \frac{d}{dx}\left[x^{-\nu} N_\nu(x)\right] = -x^{-\nu} N_{\nu+1}(x);$$

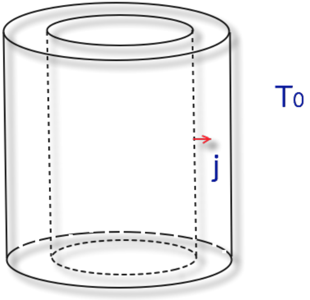
$$N_{\nu-1}(x) - N_{\nu+1}(x) = 2N'_\nu(x);\ \ N_{\nu-1}(x) + N_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} N_\nu(x).$$

证明非常简单，留为练习

环形区域上的数理方程

当圆心被挖掉时，$N_m(kr)e^{\pm im\theta}$ 也是合法解

例题



如图，一根外半径为R_1，内半径为R_2的无限长的均匀材质空心圆柱。外表面和温度为T_0的热库接触，保持温度为T_0。在$t = 0$时刻空心圆柱处于热平衡，温度为T_0。在$t > 0$时，从内表面处处都注入热流j。已知材质的导热系数为λ，质量密度为ρ，单位质量比热为c。计算该空心圆柱各处的温度。

解答思路

当达到温度梯度不再变化的稳恒状态时，因为外表面温度已经固定，所有位置的温度将保持恒定。那么流入的热流将不再积累，直接穿过空心圆柱流出外表面。这时，距离中心轴为r处的热流为

$$\frac{j(2\pi R_2)}{2\pi r},$$

即

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{jR_2}{\lambda r}.$$

解出稳恒解：

$$T|_{t\to\infty} = T_0 - \frac{jR_2}{\lambda}\ln\frac{r}{R_1}.$$

解答思路（续）

设严格解为

$$T = T_0 - \frac{jR_2}{\lambda}\ln\frac{r}{R_1} + u(r,t).$$

则u满足

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - a\nabla^2 u &= 0, \\
u\big|_{r=R_1} &= 0, \\
\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R_2} &= 0, \\
u\big|_{t=0} &= \frac{jR_2}{\lambda}\ln\frac{r}{R_1}.
\end{aligned}$$

其中$a = \frac{\lambda}{\rho c}$.

解答思路（续）

把解按满足边界条件的谐函数展开：

$$u(r,t)=\sum_{i=1}^{\infty} c_i\left[N_0(k_iR_1)J_0(k_ir)-J_0(k_iR_1)N_0(k_ir)\right]e^{-ak_i^2t}.$$

其中k_i是满足

$$N_0(k_iR_1)J_0'(k_iR_2)-J_0(k_iR_1)N_0'(k_iR_2)=0$$

的第i个解。

剩下的用正交关系求系数的工作略去。

Homework

- 对$0 < \nu < 1$，当$x \to 0^+$时，取J_ν和$J_{-\nu}$的级数展开的最低次近似，证明：

$$N_\nu(x) \approx -\frac{\Gamma(-\nu)\cos\nu\pi}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} - \frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}.$$

在上式中对x求导，然后令$\nu \to 0$求极限，再对x积分，导出

$$N_0(x) \approx \frac{2}{\pi}\ln x + c,$$

其中c为常数，当$x \to 0^+$时可以忽略它的贡献。

提示：要用到Γ函数的递推关系和互余宗量关系
$\Gamma(z)\ \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$（推导见第11讲）。

Homework (cont.)

- 在上一题中，我们无耻地交换了求极限和求导/积分的次序。请保持这种无耻，用N_ν的极限定义证明它的两个递推关系：
$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu N_\nu(x)\right] = x^\nu N_{\nu-1}(x);$$
$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu} N_\nu(x)\right] = -x^{-\nu} N_{\nu+1}(x).$$
- 把例题的解答补充完整，写出系数c_i的积分表达式，并使出洪荒之力进行化简。