

Methods of Mathematical Physics

§21 对第一类贝塞尔函数的深入研究

Lecturer: 黄志琦

<http://zhiqihuang.top/mmp>

本讲内容

Review

Heat Equation on a Disk

Integral form

Asymptotic Behavior

Infinite Disk

Homework

圆形薄膜振动问题的回顾

记 $J_m(x)$ 第 i 个正实数根为 μ_i , 则

$$\int_0^1 x J_m(\mu_i x) J_m(\mu_j x) dx = \delta_{ij} \frac{[J_{m+1}(\mu_i)]^2}{2}.$$

例题1:圆形薄膜振动问题的一般初始条件



考虑边界固定，半径为 R 的圆形薄膜的横向小振动问题。在 $t = 0$ 时刻的初始位移为 $f(r, \theta)$ ，初始速度为 $g(r, \theta)$ 。其中 (r, θ) 是以圆盘中心为原点建立的极坐标。 f 和 g 都满足边界条件： $f(r, \theta + 2\pi) = f(r, \theta)$ ， $g(r, \theta + 2\pi) = g(r, \theta)$ ， $f(R, \theta) = g(R, \theta) = 0$ 。求解之后薄膜的振动。

写出方程和边界条件

设位移为 $u(r, \theta, t)$ 。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u &= 0, \\ u|_{r=R} &= 0, \\ u|_{t=0} &= f(r, \theta), \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= g(r, \theta). \end{aligned}$$

分离变量

符合边界条件的分离变量形式解为:

$$J_m\left(\frac{\mu_{m,i}r}{R}\right) \cos(m\theta) \cos\left(\frac{\mu_{m,i}at}{R}\right), J_m\left(\frac{\mu_{m,i}r}{R}\right) \cos(m\theta) \sin\left(\frac{\mu_{m,i}at}{R}\right),$$

其中 $m \in Z$, $\mu_{m,i}$ 是 $J_m(x)$ 的第 i 个正实数根。当 $m > 0$ 时还有

$$J_m\left(\frac{\mu_{m,i}r}{R}\right) \sin(m\theta) \cos\left(\frac{\mu_{m,i}at}{R}\right), J_m\left(\frac{\mu_{m,i}r}{R}\right) \sin(m\theta) \sin\left(\frac{\mu_{m,i}at}{R}\right).$$

级数展开

完整的级数形式解为

$$\begin{aligned}
 u = & \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{A_{0,i}}{2} J_0 \left(\frac{\mu_{0,i} r}{R} \right) \cos \left(\frac{\mu_{0,i} at}{R} \right) + \frac{B_{0,i}}{2} J_0 \left(\frac{\mu_{0,i} r}{R} \right) \sin \left(\frac{\mu_{0,i} at}{R} \right) \right. \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_{m,i} J_m \left(\frac{\mu_{m,i} r}{R} \right) \cos(m\theta) \cos \left(\frac{\mu_{m,i} at}{R} \right) \right. \\
 & + B_{m,i} J_m \left(\frac{\mu_{m,i} r}{R} \right) \cos(m\theta) \sin \left(\frac{\mu_{m,i} at}{R} \right) \\
 & + C_{m,i} J_m \left(\frac{\mu_{m,i} r}{R} \right) \sin(m\theta) \cos \left(\frac{\mu_{m,i} at}{R} \right) \\
 & \left. \left. + D_{m,i} J_m \left(\frac{\mu_{m,i} r}{R} \right) \sin(m\theta) \sin \left(\frac{\mu_{m,i} at}{R} \right) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

(在 $A_{0,i}$ 和 $B_{0,i}$ 里的 $\frac{1}{2}$ 因子是为了和 $m \neq 0$ 的结果看起来更一致。)

初始位移条件

利用初始位移条件得到

$$f(Rx, \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_{0,i}}{2} J_0(\mu_{0,i}x) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} [A_{m,i} J_m(\mu_{m,i}x) \cos(m\theta) + C_{m,i} J_m(\mu_{m,i}x) \sin(m\theta)]$$

其中 $x = \frac{r}{R}$ 。

由谐函数的正交性得到

$$A_{m,i} = \frac{2}{\pi [J_{m+1}(\mu_{m,i})]^2} \int_0^1 x J_m(\mu_{m,i}x) dx \int_0^{2\pi} \cos(m\theta) f(Rx, \theta) d\theta$$

$$C_{m,i} = \frac{2}{\pi [J_{m+1}(\mu_{m,i})]^2} \int_0^1 x J_m(\mu_{m,i}x) dx \int_0^{2\pi} \sin(m\theta) f(Rx, \theta) d\theta$$

初始速度条件

利用初始速度条件得到

$$g(Rx, \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_{0,i} \mu_{0,i} a}{2R} J_0(\mu_{0,i} x) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{B_{m,i} \mu_{m,i} a}{R} J_m(\mu_{m,i} x) \cos(m\theta) + \frac{D_{m,i} \mu_{m,i} a}{R} J_m(\mu_{m,i} x) \sin(m\theta) \right]$$

其中 $x = \frac{r}{R}$ 。

由谐函数的正交性得到

$$B_{m,i} = \frac{2R}{\pi \mu_{m,i} a [J_{m+1}(\mu_{m,i})]^2} \int_0^1 x J_m(\mu_{m,i} x) dx \int_0^{2\pi} \cos(m\theta) g(Rx, \theta) d\theta$$

$$D_{m,i} = \frac{2R}{\pi \mu_{m,i} a [J_{m+1}(\mu_{m,i})]^2} \int_0^1 x J_m(\mu_{m,i} x) dx \int_0^{2\pi} \sin(m\theta) g(Rx, \theta) d\theta$$

圆盘上的热传导问题

记 $J'_m(x)$ 的第 i 个正实数根为 λ_i , 则

$$\int_0^1 x J_m(\lambda_i x) J_m(\lambda_j x) dx = \delta_{ij} \frac{\left(1 - \frac{m^2}{\lambda_i^2}\right) [J_m(\lambda_i)]^2}{2}$$

例题2:圆盘上的热传导问题

有孤立的, 半径为 R 的均匀圆形金属薄片。初态 $t = 0$ 时刻金属片上距离中心 r 处的温度为

$$T(r) = T_0 \left(1 + \frac{r^2}{R^2} \right).$$

已知金属片质量密度为 ρ , 导热系数为 λ , 单位质量比热为 c 。求 $t \geq 0$ 时圆盘上各点的温度。

写出方程

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \nabla^2 T = 0,$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = 0,$$

$$T|_{t=0} = T_0 \left(1 + \frac{r^2}{R^2} \right).$$

其中 $a = \frac{\lambda}{\rho c}$.

按谐函数展开

一般的分离变量解为 $J_m(kr)e^{\pm im\theta}e^{-ak^2t}$ 。但因为初始条件旋转对称（不依赖于 θ ），所以解只包含 $m=0$ ，也就是 $J_0(kr)e^{-ak^2t}$ 的形式。

根据边界条件知道 $k = \frac{\lambda_i}{R}$ ，其中 λ_i 是 $J'_0(x)$ 的第 i 个正实数根。

$\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 3.8317$, $\lambda_2 = 7.0156$, $\lambda_3 = 10.1735$, $\lambda_4 = 13.3237$, $\lambda_5 = 16.4706, \dots$ 我们把 $\lambda_0 = 0$ 这个特殊情形包括了进来，代表的是常数项。（思考：以前解固定边界的圆形薄膜振动问题时为什么没有这样做？）

于是，按谐函数展开

$$T = \sum_{i=0}^{\infty} c_i J_0\left(\frac{\lambda_i r}{R}\right) e^{-\frac{a\lambda_i^2 t}{R^2}}.$$

按谐函数展开

从初始条件可以得到,

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i J_0(\lambda_i x) = T_0 (1 + x^2),$$

其中 $x = \frac{r}{R}$.

看起来要求出 c_i 就要研究下 $J_0(\lambda_i x)$ 的正交性。我们来考虑更一般的 $J_m(\lambda_i x)$ (λ_i 为 $J'_m(x)$ 的正实数根) 的正交性。

第一类贝塞尔函数的第二个正交定理

设 λ_i 为 $J'_m(x)$ 的第 i 个正实数根, 则

$$\int_0^1 x J_m(\lambda_i x) J_m(\lambda_j x) dx = \delta_{ij} \frac{\left(1 - \frac{m^2}{\lambda_i^2}\right) [J_m(\lambda_i)]^2}{2}$$

当 $m = 0$ 时, 允许取 $\lambda_0 = 0$ 这个特殊情形, 这时需要约定等式右边 $\frac{m^2}{\lambda_0^2} = 0$ 。

证明

贝塞尔函数满足贝塞尔方程

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[x \frac{d}{dx} J_m(x) \right] + \left(1 - \frac{m^2}{x^2} \right) J_m(x) = 0.$$

把 x 换成 $\lambda_i x$, 得到

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[x \frac{d}{dx} J_m(\lambda_i x) \right] + \left(\lambda_i^2 - \frac{m^2}{x^2} \right) J_m(\lambda_i x) = 0.$$

注意符号 $\frac{d}{dx} J_m(\lambda_i x)$ 和 $J'_m(\lambda_i x)$ 的不同: 前者多 λ_i 的因子。

(如果你还没弄清楚, 请看例子: 由 $f(x) = x^2$, 可以得到 $f'(x) = 2x$; 把 x 换为 $2x$ 可以得到 $f(2x) = 4x^2$, $f'(2x) = 4x$; 显然 $\frac{d}{dx} f(2x) = 8x = 2f'(2x)$ 。)

证明

两边同乘以 $xJ_m(\lambda_j x)$, 得到

$$J_m(\lambda_j x) \frac{d}{dx} \left[x \frac{d}{dx} J_m(\lambda_i x) \right] + \left(\lambda_i^2 - \frac{m^2}{x^2} \right) x J_m(\lambda_i x) J_m(\lambda_j x) = 0. \quad (1)$$

交换 i 和 j , 得到

$$J_m(\lambda_i x) \frac{d}{dx} \left[x \frac{d}{dx} J_m(\lambda_j x) \right] + \left(\lambda_j^2 - \frac{m^2}{x^2} \right) x J_m(\lambda_i x) J_m(\lambda_j x) = 0. \quad (2)$$

证明 (续)

(1)减去(2), 得到

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left[xJ_m(\lambda_j x) \frac{d}{dx} J_m(\lambda_i x) - xJ_m(\lambda_i x) \frac{d}{dx} J_m(\lambda_j x) \right] \\ & + (\lambda_i^2 - \lambda_j^2) x J_m(\lambda_i x) J_m(\lambda_j x) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

如果 $i \neq j$, 两边从0到1积分即得到

$$\int_0^1 x J_m(\lambda_i x) J_m(\lambda_j x) dx = 0.$$

证明 (续)

事实上, 在推导(3)时, λ_i, λ_j 可以为任何正实数, 所以我们可以取 λ_i 为 J'_m 的零点, 而 $\lambda_j = \lambda_i + \epsilon$ 。同样从0到1积分, 得到

$$-(\lambda_i + \epsilon)J_m(\lambda_i)J'_m(\lambda_i + \epsilon) - (2\lambda_i + \epsilon)\epsilon \int_0^1 x J_m(\lambda_i x) J_m[(\lambda_i + \epsilon)x] dx = 0$$

两边除以 ϵ 并令 $\epsilon \rightarrow 0^+$

$$\int_0^1 x [J_m(\lambda_i x)]^2 dx = -\frac{J_m(\lambda_i)J''_m(\lambda_i)}{2}$$

证明 (续)

在贝塞尔方程

$$J_m''(x) + \frac{1}{x} J_m'(x) + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) J_m(x) = 0$$

中令 $x = \lambda_i$, 即得到

$$J_m''(\lambda_i) = - \left(1 - \frac{m^2}{\lambda_i^2}\right) J_m(\lambda_i).$$

代回前面得到的结论就完成了 $\lambda_i, \lambda_j \neq 0$ 情况下的证明。

证明 (续)

最后我们考虑 $m = 0$, $\lambda_i = 0$ 的情况。这时如果 $\lambda_j \neq \lambda_i$, 则

$$\int_0^1 x J_m(\lambda_i x) J_m(\lambda_j x) dx = \int_0^1 x J_0(\lambda_j x) dx = \frac{1}{\lambda_j} x J_1(\lambda_j x) \Big|_0^1 = 0$$

我们用到了 $J_0(0) = 1$ 。在最后一步利用了 $m = 0$ 时的第二个递推关系: $J'_0(x) = -J_1(x)$, 以及 $J'_0(\lambda_j) = 0$ 。

如果 $\lambda_j = \lambda_i = 0$, 则可以直截了当地进行计算

$$\int_0^1 x J_m(\lambda_i x) J_m(\lambda_j x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

这样我们对 $m = 0$, $\lambda_i = 0$ 的特殊情况完成了证明。

思考题



之前得到的结论

$$\int_0^1 x [J_m(\lambda_i x)]^2 dx = -\frac{J_m(\lambda_i) J_m''(\lambda_i)}{2}$$

对 $m = 0$, $\lambda_0 = 0$ 的特殊情形成立吗?

回到原问题

在

$$\sum_i c_i J_0(\lambda_i x) = T_0 (1 + x^2),$$

两边同乘以 $xJ_0(\lambda_j x)$ 并从 0 到 1 积分, 得到

$$\frac{c_j [J_0(\lambda_j)]^2}{2} = T_0 \int_0^1 (1 + x^2) x J_0(\lambda_j x) dx$$

对 $j = 0$ (即 $\lambda_j = 0$) 的特殊情况,

$$\int_0^1 (1 + x^2) x J_0(\lambda_j x) dx = \int_0^1 x(1 + x^2) dx = \frac{3}{4}$$

即

$$c_0 = \frac{3}{2} T_0$$

回到原问题

若 $j > 0$, 利用 $\lambda_j x J_0(\lambda_j x) = \frac{d}{dx} [x J_1(\lambda_j x)]$ 进行分部积分:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 (1+x^2)xJ_0(\lambda_j x)dx &= \frac{1+x^2}{\lambda_j} xJ_1(\lambda_j x) \Big|_0^1 - \frac{2}{\lambda_j} \int_0^1 x^2 J_1(\lambda_j x) dx \\
 &= -\frac{2}{\lambda_j} \int_0^1 x^2 J_1(\lambda_j x) dx \\
 &= -\frac{2}{\lambda_j^2} x^2 J_2(\lambda_j x) \Big|_0^1 \\
 &= -\frac{2}{\lambda_j^2} J_2(\lambda_j) \\
 &= \frac{2}{\lambda_j^2} J_0(\lambda_j)
 \end{aligned}$$

最后一步利用了 $J_0(\lambda_j) + J_2(\lambda_j) = \frac{2}{\lambda_j} J_1(\lambda_j) = -\frac{2}{\lambda_j} J_0'(\lambda_j) = 0$

最终的解

得到

$$c_j = \frac{4T_0}{\lambda_j^2 J_0(\lambda_j)}$$

即

$$T = \frac{3}{2}T_0 + 4T_0 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\lambda_j r}{R}\right) e^{-\frac{a\lambda_j^2 t}{R^2}}}{\lambda_j^2 J_0(\lambda_j)}$$

有趣的是，令 $r = R$ ， $t = 0$ ，可以得到：

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} = \frac{1}{8}$$

贝塞尔函数的积分表示

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x \sin \theta - m\theta)} d\theta$$

贝塞尔函数的积分表示

除了递推公式，**整数阶**贝塞尔函数最为常用的性质是它的积分表示：

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x \sin \theta - m\theta)} d\theta$$

被积函数的周期为 2π ，上面的积分区间可以取任何一个完整周期。

注意：贝塞尔函数的级数定义里 m 其实可以取任意实数，但这里一定要是整数阶($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)贝塞尔函数才行。

证明 (心累请跳过)

把 $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x \sin \theta - m\theta)} d\theta$ 进行泰勒展开, 其 n 次系数为

$$c_n = \frac{1}{2\pi n!} \int_{-\pi}^{\pi} (i \sin \theta)^n e^{-im\theta} d\theta$$

转化为单位圆上的围道积分:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi 2^n n!} \oint \left(z - \frac{1}{z}\right)^n \frac{1}{z^m} \frac{dz}{iz} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^n k!(n-k)!} (-1)^k z^{n-2k-m-1} dz \end{aligned}$$

根据留数定理, 仅有的非零项为 $c_{2k+m} = \frac{(-1)^k}{k!(m+k)!2^{2k+m}}$, 和 J_m 的级数定义相同。证毕。

贝塞尔函数的积分表示

把积分式右边用欧拉公式展开，发现虚部为奇函数，积分为零；而实部为偶函数。所以

$$J_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \theta - m\theta) d\theta$$

贝塞尔函数的母函数

贝塞尔函数的也可以看成带参数的函数展开式中的系数（这称为母函数公式）：

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n.$$

贝塞尔函数的母函数

证明:

$$\begin{aligned}
 e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} &= e^{\frac{xt}{2}} e^{-\frac{x}{2t}} \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{xt}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{x}{2t}\right)^k \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \right) t^n \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n
 \end{aligned}$$

母函数和贝塞尔函数的积分表达的关系

在母函数公式中令 $t = e^{i\theta}$ ，即得到

$$e^{ix \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{in\theta}$$

两边乘以 $e^{-im\theta}$ 并从 $-\pi$ 积分至 π ，得到我们曾经学习过的贝塞尔函数的积分表达

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x \sin \theta - m\theta)} d\theta.$$

无穷远处的渐近行为

当 $x \gg m^2$ 时,

$$J_m(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

无穷远处的渐近行为

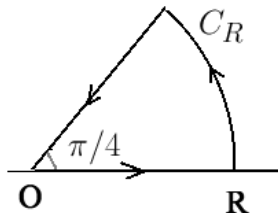
$$J_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \theta - m\theta) d\theta$$

当 x 很大时, $\cos(x \sin \theta - m\theta)$ 快速振荡, 对积分无贡献。唯一的例外是 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 附近, $\sin \theta$ 变化停滞, 积分贡献并不消失。令 $\theta = \frac{\pi}{2} + \epsilon$, 把 $\sin \theta$ 作二阶近似展开:

$$\begin{aligned} J_m(x) &\approx \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \left[x \left(1 - \frac{1}{2} \epsilon^2 \right) - \frac{m}{2} \pi \right] d\epsilon \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[e^{-i\phi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ix}{2} \epsilon^2} d\epsilon \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \left[e^{-i\phi} \int_0^{\infty} e^{\frac{ix}{2} \epsilon^2} d\epsilon \right] \end{aligned}$$

其中 $\phi = x - \frac{m}{2} \pi$

无穷远处的渐近行为 (续)



在如图的围道上积分

$$\oint e^{\frac{ix}{2}\epsilon^2} d\epsilon$$

容易得到

$$\int_0^\infty e^{\frac{ix}{2}\epsilon^2} d\epsilon = e^{\frac{\pi i}{4}} \int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}\epsilon^2} d\epsilon = e^{\frac{\pi i}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

最后得到

$$J_m(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

无限大板上的热传导问题

$$\int_0^{\infty} J_m(k_1 r) J_m(k_2 r) r dr = \frac{\delta(k_1 - k_2)}{k_1}.$$

例题3: 无限大板上的热传导问题

一块很大（可以视为无限大）的均匀薄板的温度为 T_0 ，在 $t = 0$ 时刻在中心点注入热量 Q ，求之后板上的温度变化。设板的单位质量比热为 c ，质量密度为 ρ ，厚度为 h ，导热系数为 λ 。

写出方程

假设一开始的热量被注入到面积为 ϵ 的小区域内, 则该区域内的温度为 $T_0 + \frac{Q}{\rho c \epsilon h}$ 。令 $u(r, \theta) = \frac{\rho c h}{Q}(T - T_0)$, 写出方程和边界条件:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - a \nabla^2 u &= 0, \\ u|_{r=\infty} &= 0, \\ u|_{t=0} &= \delta(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

其中 $a = \frac{\lambda}{\rho c}$ 。

我们认出这是一个典型的求解格林函数问题。

直角坐标的解

先看直角坐标系下能否求解。把 u 按谐函数分解：

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int d^2\mathbf{k} c(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-ak^2 t},$$

注意这里的 $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$; $\mathbf{x} = (x, y)$; $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = k_x x + k_y y$;

$k = |\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$; $\int d^2\mathbf{k}$ 是全平面积分 $\int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y$ 的简写。

令 $t = 0$,

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int d^2\mathbf{k} c(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}},$$

这说明 $c(\mathbf{k})$ 是 $\delta(\mathbf{x})$ 的二维傅立叶变换。

直角坐标的解 (续)

$$c(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \int d^2\mathbf{x} \delta(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \frac{1}{2\pi}$$

即解为

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int d^2\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-ak^2t} = \frac{1}{4\pi at} e^{-\frac{x^2+y^2}{4at}},$$

(很容易认出来这其实是两个一维格林函数的乘积。)

极坐标的解

在极坐标里，我们一开始就可以看出问题具有旋转对称性，写出

$$u(r, t) = \int_0^{\infty} f(k) J_0(kr) e^{-ak^2 t} k dk$$

取 $t = 0$ ，得到

$$\delta(\mathbf{x}) = \int_0^{\infty} f(k) J_0(kr) k dk$$

为了求出 $f(k)$ ，我们来研究第一类贝塞尔函数在无穷区间上的正交关系。

第一类贝塞尔函数在无穷区间上的正交关系

$$\int_0^{\infty} J_m(k_1 r) J_m(k_2 r) r dr = \frac{\delta(k_1 - k_2)}{k_1}.$$

证明留为作业。

极坐标系求解 (续)

$$\delta(\mathbf{x}) = \int_0^\infty f(k) J_0(kr) k dk$$

对任意给定的 k' , 两边乘以 $rJ_0(k'r)$ 并对 r 从0到 ∞ 积分, 得到

$$\frac{1}{2\pi} = \int_0^\infty f(k) \frac{\delta(k - k')}{k} k dk = f(k')$$

所以解为

$$u(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty J_0(kr) e^{-ak^2 t} k dk$$

Homework

- ▶ 有孤立的，半径为 R 的均匀圆形金属薄片，以中心为原点建立极坐标 (r, θ) 。初态 $t = 0$ 时刻，金属片上的温度为 $f(r, \theta)$ 。已知金属片质量密度为 ρ ，导热系数为 λ ，单位质量比热为 c 。求 $t \geq 0$ 时刻金属片上各点的温度。
- ▶ 利用 J_m 在有限区间上的正交定理和 J_m 的渐近表达式证明

$$\int_0^{\infty} J_m(k_1 r) J_m(k_2 r) r dr = \frac{\delta(k_1 - k_2)}{k_1}.$$

- ▶ 我们在两种不同的坐标系中求解例题3，分别得到

$$\frac{1}{4\pi at} e^{-\frac{r^2}{4at}}$$

和

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} J_0(kr) e^{-ak^2 t} k dk.$$

试直接证明这两个解恒等。