

Methods of Mathematical Physics

§20 第一类贝塞尔函数和应用举例

Lecturer: 黄志琦

<http://zhiqihuang.top/mmp>

本讲内容

Bessel Functions of the First Kind

Brane Oscillation

Homework

第一类贝塞尔函数的基本性质

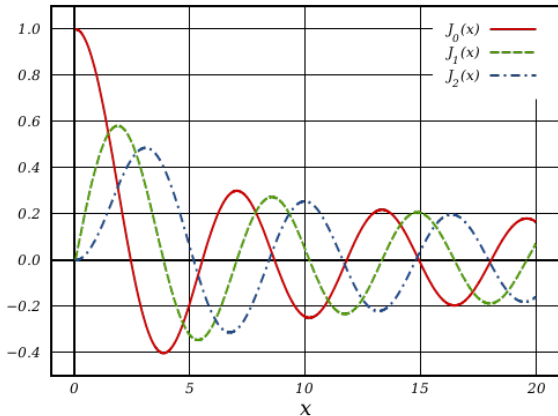
$$\frac{d}{dx} [x^m J_m(x)] = x^m J_{m-1}(x); \quad \frac{d}{dx} [x^{-m} J_m(x)] = -x^{-m} J_{m+1}(x)$$

第一类贝塞尔函数的级数定义

第一类贝塞尔函数定义为

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

先讨论物理问题中最常用的 $m = 0, 1, 2, \dots$ 的情形（ m 不是整数和 $m < 0$ 的情况且听下回分解）。

J_0 , J_1 , 和 J_2 

$J_m(x)$ 的定性特点

第一个峰，也就是最大值，大致在 $x \approx m$ 处取到

第一个峰左边近似以 x^m 增长

第一个峰右边是振幅不断衰减的振荡型函数

注：在 x 比较大时，振幅大致上 $\sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ ，周期趋向于 2π 。

思考题



请一位同学在黑板上画出 $J_{100}(x)$ 的大致图像.

怎么计算 $J_m(x)$

大多数编程语言(C, Fortran等)和带数学库的脚本语言 (Python, Mathematica等)都内置有贝塞尔函数，直接调用就能计算。

致手算强迫症患者😄：有一整套的近似公式可以满足你的需求，欢迎来电采购，量大优惠。

贝塞尔函数的递推关系

贝塞尔函数大概有几十条性质。养生MMP课里不可能全部介绍，因此，从最重要也最普遍的递推关系出发

贝塞尔函数的第一条递推性质

$$\frac{d}{dx} [x^m J_m(x)] = x^m J_{m-1}(x).$$

贝塞尔函数的第二条递推性质

$$\frac{d}{dx} [x^{-m} J_m(x)] = -x^{-m} J_{m+1}(x).$$

(之所以说这是普遍关系，是因为第二类贝塞尔函数 $N_m(x)$ 也满足完全一样的递推关系。)

贝塞尔函数的递推关系的简单应用



证明:

$$\begin{aligned}J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x) &= 2J'_m(x), \\J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) &= \frac{2m}{x}J_m(x).\end{aligned}$$



剩下几十条性质，从哪儿开始入手呢？

圆形薄膜的振动问题

用谐函数 $J_m(kr) \cos m\theta$ 和 $J_m(kr) \sin m\theta$

圆形薄膜的振动问题



考虑固定边界的，半径为 R 的圆形薄膜的横向小振动问题。在 $t = 0$ 时刻的初始位移为 $A \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$ （其中 A 为常量， r 为距离圆盘中心的距离， $0 \leq r \leq R$ ），初始速度为零。求解之后薄膜的振动。

写出方程和边界条件

取极坐标系，设位移为 $u(r, \theta, t)$ 。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u &= 0, \\ u|_{r=R} &= 0, \\ u|_{t=0} &= A \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} &= 0. \end{aligned}$$

分离变量

我们知道圆盘内的谐函数为 $J_m(kr)e^{\pm im\theta}$ 。在这个问题里初始条件是旋转对称的（不依赖于 θ ），所以解也不依赖于 θ 。也就是说，只需要考虑 $m = 0$ 的情形，分离变量形式的解为

$$J_0(kr) \cos(akt), \quad J_0(kr) \sin(akt)$$

然后考虑边界条件：符合 $J_0(kR) = 0$ 的解为

$$k = \frac{\mu_i}{R}, i = 1, 2, \dots$$

其中 μ_i 是贝塞尔函数 $J_0(x)$ 的第 i 个正实数根。

$$\mu_1 \approx 2.4048, \quad \mu_2 \approx 5.5201, \quad \mu_3 \approx 8.6537, \quad \mu_4 \approx 11.7915, \\ \mu_5 \approx 14.9309, \dots$$

展开

解的展开形式就是

$$u = \sum_i c_i J_0\left(\frac{\mu_i r}{R}\right) \cos\left(\frac{\mu_i a t}{R}\right) + s_i J_0\left(\frac{\mu_i r}{R}\right) \sin\left(\frac{\mu_i a t}{R}\right).$$

利用速度为零的初始条件，立刻可以扔掉所有 $\sin(akt)$ 项。

$$u = \sum_i c_i J_0\left(\frac{\mu_i r}{R}\right) \cos\left(\frac{\mu_i a t}{R}\right).$$

再利用初始位移，得到

$$\sum_i c_i J_0\left(\frac{\mu_i r}{R}\right) = A \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right].$$

求系数的套路

记得我们以前的套路是两边同乘上谐函数（正弦或余弦），然后在所求问题的物理范围内积分。利用谐函数的积分正交性就可以求出系数 c_j 。

根据谐函数的正交定理，我们仍然可以这么做，区别就是要在圆盘内进行面积分。由谐函数正交定理，有：

$$\int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta J_0\left(\frac{\mu_i r}{R}\right) J_0\left(\frac{\mu_j r}{R}\right) = N_i \delta_{ij}.$$

这里

$$N_i = 2\pi \int_0^R \left[J_0\left(\frac{\mu_i r}{R}\right) \right]^2 r dr$$

把展开式

$$\sum_i c_i J_0\left(\frac{\mu_i r}{R}\right) = A \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right].$$

按照套路两边同乘以 $J_0\left(\frac{\mu_j r}{R}\right)$ 并在圆盘内进行面积分, 得到

$$c_j N_j = \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta A \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] J_0\left(\frac{\mu_j r}{R}\right).$$

稍作整理得到系数:

$$c_j = \frac{2\pi A}{N_j} \int_0^R r \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] J_0\left(\frac{\mu_j r}{R}\right) dr.$$

再回过头来看结果中的两个积分

$$N_i = 2\pi \int_0^R \left[J_0 \left(\frac{\mu_i r}{R} \right) \right]^2 r dr = 2\pi R^2 \int_0^1 x [J_0(\mu_i x)]^2 dx$$

和

$$\int_0^R r \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] J_0 \left(\frac{\mu_j r}{R} \right) dr = R^2 \int_0^1 x(1-x^2) J_0(\mu_j x) dx.$$

(我们作了替换 $x = r/R$)

虽然这些积分会不会求并不影响大局，我们还是来仔细研究一下
(前方高能请看戏就好) ——

贝塞尔函数的正交定理

设 μ_i, μ_j 是 $J_m(x)$ 第 i 个和第 j 个正实数根, 则

$$\int_0^1 x J_m(\mu_i x) J_m(\mu_j x) dx = \delta_{ij} \frac{[J_{m+1}(\mu_i)]^2}{2}.$$

也就是说, 只要定义内积时乘上权重 x (这个权重来自于极坐标系的散度的“面积修正因子”), 那么 $J_m(\mu_i x)$ ($i = 1, 2, \dots$)就是在 $[0, 1]$ 内的正交函数组了。

证明

回忆 $J_m(\mu_i x)$ 满足的贝塞尔方程:

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[x \frac{d}{dx} J_m(\mu_i x) \right] + \left(\mu_i^2 - \frac{m^2}{x^2} \right) J_m(\mu_i x) = 0.$$

两边同乘以 $xJ_m(\mu_j x)$, 得到

$$J_m(\mu_j x) \frac{d}{dx} \left[x \frac{d}{dx} J_m(\mu_i x) \right] + \left(\mu_i^2 - \frac{m^2}{x^2} \right) x J_m(\mu_i x) J_m(\mu_j x) = 0. \quad (1)$$

交换 i 和 j , 得到

$$J_m(\mu_i x) \frac{d}{dx} \left[x \frac{d}{dx} J_m(\mu_j x) \right] + \left(\mu_j^2 - \frac{m^2}{x^2} \right) x J_m(\mu_i x) J_m(\mu_j x) = 0. \quad (2)$$

证明 (续)

(1)减去(2), 得到

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left[xJ_m(\mu_j x) \frac{d}{dx} J_m(\mu_i x) - xJ_m(\mu_i x) \frac{d}{dx} J_m(\mu_j x) \right] \\ & + (\mu_i^2 - \mu_j^2) x J_m(\mu_i x) J_m(\mu_j x) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

如果 $i \neq j$, 两边从0到1积分即得到

$$\int_0^1 x J_m(\mu_i x) J_m(\mu_j x) = 0.$$

证明 (续)

事实上, 在推导(3)时, μ_i, μ_j 可以为任何正数, 所以我们可以取 μ_i 为 J_m 的零点, 而 $\mu_j = \mu_i + \epsilon$ 。同样从0到1积分, 得到

$$\mu_i J_m(\mu_i + \epsilon) J'_m(\mu_i) - (2\mu_i + \epsilon)\epsilon \int_0^1 x J_m(\mu_i x) J_m[(\mu_i + \epsilon)x] dx = 0$$

两边除以 ϵ 并令 $\epsilon \rightarrow 0^+$

$$\int_0^1 x [J_m(\mu_i x)]^2 dx = \frac{[J'_m(\mu_i)]^2}{2}$$

最后, 在递推关系

$$\frac{d}{dx} [x^{-m} J_m(x)] = -x^{-m} J_{m+1}(x)$$

两边取 $x = \mu_i$, 即得到 $J'_m(\mu_i) = -J_{m+1}(\mu_i)$ 。于是命题在 $i = j$ 时也得到了证明。

另一个积分

令 $m = 0$, 上述定理给出了 $N_j = \pi R^2 [J_1(\mu_j)]^2$.
 然后考虑另一个积分

$$I = \int_0^1 x(1-x^2) J_0(\mu_j x) dx.$$

利用

$$\mu_j x J_0(\mu_j x) = \frac{d}{dx} [x J_1(\mu_j x)].$$

分部积分, 即得到

$$I = \frac{1-x^2}{\mu_j} x J_1(\mu_j x) \Big|_0^1 + \frac{2}{\mu_j} \int_0^1 x^2 J_1(\mu_j x) dx.$$

再利用

$$\mu_j x^2 J_1(\mu_j x) = \frac{d}{dx} [x^2 J_2(\mu_j x)]$$

得到

$$I = \frac{2}{\mu_j} \int_0^1 x^2 J_1(\mu_j x) dx = \frac{2}{\mu_j^2} J_2(\mu_j).$$

求出系数

最后，利用

$$J_0(x) + J_2(x) = \frac{2}{x} J_1(x)$$

得到

$$J_2(\mu_j) = \frac{2}{\mu_j} J_1(\mu_j).$$

综合前面所有结果，最终得到

$$c_j = \frac{8A}{\mu_j^3 J_1(\mu_j)}$$

最终解

薄膜的振动解为

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{8A}{\mu_j^3 J_1(\mu_j)} J_0\left(\frac{\mu_j r}{R}\right) \cos \frac{\mu_j a t}{R}.$$

(思考: 会不会发生某个分母中的 $J_1(\mu_j) = 0$ 的情况?)



刚才发生了什么.jpg

Homework

- ▶ 通过逐项求导的办法证明贝塞尔函数的两个递推关系
- ▶ 如果 $J_m(\mu) = 0$ (μ 为正实数, m 为非负整数), 计算积分

$$\int_0^1 x [J_{m+1}(\mu x)]^2 dx.$$

- ▶ 考虑固定边界的, 半径为 R 的圆形薄膜的横向小振动问题。在 $t = 0$ 时刻的初始速度为 $A \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$ (其中 A 为常量, r 为距离圆盘中心的距离, $0 \leq r \leq R$), 初始位移为零。求解之后薄膜的振动。