Methods of Mathematical Physics

§18 Equations with Source Terms

Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/mmp

Outline

有源的方程

把源进行分解

例题1

求解$0 \leq x \leq L$上的烤串问题:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \phi(x,t), \\
u\big|_{x=0} &= 0, \\
u\big|_{x=L} &= 0, \\
u\big|_{t=0} &= 0.
\end{aligned}$$

这里热源$\phi(x,t)$是已知函数。

改变时间演化因子

如果没有$\phi(x,t)$的存在，我们将进行分解：

$$u=\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\frac{an^2\pi^2 t}{L^2}} \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

有$\phi(x,t)$的情况，我们猜想 $e^{-\frac{an^2\pi^2 t}{L^2}}$有可能需要替换成一个其他什么东西：

$$u=\sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

其中每个$T_n(t)$都是待定函数。利用初始条件显然有

$$T_n(0)=0.$$

对源的分解

为了求出T_n，我们把等式右边的$\phi(x,t)$也进行级数展开：

$$\phi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}G_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

代入到原方程，得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[T_n'(t)+\frac{n^2\pi^2 a}{L^2}T(t)\right]\sin\frac{n\pi x}{L}=\sum_{n=0}^{\infty}G_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

两边比较系数得到

$$T_n'(t)+\frac{n^2\pi^2 a}{L^2}T(t)=G_n(t).$$

再利用初始条件$T_n(0)=0$，原则上(🤦)可以求出$T_n(t)$。

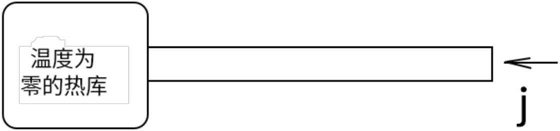
思考题

例题中如果给定$\phi(x,t)=\frac{1}{\tau}\sin\frac{\pi x}{L}e^{-\frac{a\pi^2 t}{L^2}}$(这里$\tau>0$为常量)，试求出具体的$u(x,t)$。

非齐次边界条件

特解=渐近解

例题2



长度为L的导热棒一端和温度为零（这里是随意规定了一个温度零点，不是绝对零度）的热库接触，并在$t=0$时刻和热库处于热平衡。从$t=0$时刻开始，在导热棒的另一端注入恒定大小为j的热流。设已知导热棒的导热系数λ和热传导方程参数a，求解导热棒上温度$u(x,t)$ $(0\leq x\leq L, t\geq 0)$。

数理方程

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \\
u\big|_{x=0} &= 0, \\
\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} &= \frac{j}{\lambda}, \\
u\big|_{t=0} &= 0.
\end{aligned}
$$

下一步目标是通过寻找特解，把非线性的边界条件转化为非线性的初始条件，回到标准套路。对热传导方程，寻找特解有一个非常简便的办法：分析渐近行为。

渐近行为分析

猜想当t远大于典型热扩散时间L^2/a时，系统处于稳恒状态（温度梯度不再变化）。因为一端温度是固定的，要得到稳恒状态的必要条件是热量不在导热棒上积累，也就是说进来的热流j必须保持不变地通过整个导热棒，最后从另一端进入热库。这说明稳恒状态下$\frac{\partial u}{\partial x}$处处等于$\frac{j}{\lambda}$。由此得出：

$$u(x,t) \to \frac{j}{\lambda} x$$

这就是我们需要的特解。

分离变量法

令

$$u(x,t)=\frac{j}{\lambda}x+\upsilon(x,t)$$

易见υ也满足热传导方程，且

$$\begin{aligned}\upsilon|_{x=0} &= 0,\\ \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\right|_{x=L} &= 0,\\ \upsilon|_{t=0} &= -\frac{j}{\lambda}x.\end{aligned}$$

显然υ可以用我们熟悉的“标准套路”解出来。

最终结果

解出v之后得到

$$u(x,t)=\frac{j}{\lambda}x-\frac{2jL}{\lambda\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}e^{-a\frac{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}{L^2}t}\sin\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{L}x\right).$$

例题3

有长为$2L$，温度为T_0的均匀导热棒，其材质的热传导方程参数为 a。在$t=0$时刻，在它的两端$x=\pm L$处分别接上温度为T_1的相同材质相同截面形状的非常长的均匀导热棒。求之后导热棒上的温度变化。

写出方程

显然渐近解是$T = T_1$，所以令$T(x,t) = T_1 + u(x,t)$，u满足

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \\ u_{t=0} &= (T_0 - T_1)\theta_L(x). \end{aligned}$$

其中$\theta_L(x)$当且仅当$|x| < L$时为1，否则为零。

格林函数方法求解

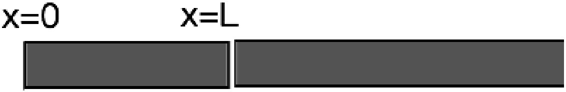
$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_{-L}^{L} \frac{1}{\sqrt{4\pi a t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4at}} (T_0 - T_1) dx_0 \\
&= \frac{T_0 - T_1}{\sqrt{4\pi a t}} \int_{-L}^{L} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4at}} dx_0
\end{aligned}
$$

当然，如果你喜欢，可以把上述积分写成误差函数。
最后结果为

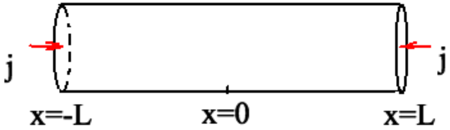
$$
T(x,t) = T_1 + \frac{T_0 - T_1}{\sqrt{4\pi a t}} \int_{-L}^{L} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4at}} dx_0
$$

Homework

- 请补充完整例题2中的v的求解过程。
- 有长为L，温度为T_0的均匀导热棒，材质的热传导方程参数为 a。在$t=0$时刻，在它的一端$x=L$处接上温度为T_1的相同材质相同截面形状的非常长的均匀导热棒。求之后导热棒上的温度变化。



附录1：平均温度一直变化的例子



在一根长为$2L$的导热棒在$t=0$时刻温度为T_0。在$t>0$时刻，导热棒两端均有强度为j的热流进入。设材料的导热系数λ，质量密度ρ，单位质量的比热c均已知，试计算$t\geq 0$时刻导热棒各处的温度$T(x,t)$。

附录1：平均温度一直变化的例子

根据对称性，在棒中间处热流和温度梯度均为零。写出如下的方程和边界条件：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial t} - a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= 0 \\
\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} &= 0 \\
\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L} &= \frac{j}{\lambda} \\
T|_{t=0} &= T_0
\end{aligned}
$$

其中$a = \frac{\lambda}{\rho c}$。

附录1：平均温度一直变化的例子

先分析主要图像。

在t时刻，累计流入的热量为$Q = 2jSt$ (其中S为横截面积)。棒的热容为$C = c\rho(2SL)$。所以t时刻棒的的平均温度为

$$\bar{T} = T_0 + \frac{Q}{C} = T_0 + \frac{j}{\rho c L} t$$

附录1：平均温度一直变化的例子

把平均温度去掉，研究各处温度起伏：$\Delta T(x,t) = T(x,t) - \left(T_0 + \frac{j}{\rho c L} t\right)$。显然$\Delta T$满足方程：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta T}{\partial t} - a\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial x^2} &= -\frac{j}{\rho c L} \\
\left.\frac{\partial \Delta T}{\partial x}\right|_{x=0} &= 0 \\
\left.\frac{\partial \Delta T}{\partial x}\right|_{x=L} &= \frac{j}{\lambda} \\
\Delta T|_{t=0} = 0
\end{aligned}$$

因为ΔT描述的是温度起伏，还有一个额外条件：

$$\int_0^L \Delta T(x,t)dx = 0$$

附录1：平均温度一直变化的例子

当t很大时，棒上的温度梯度趋于稳定，即ΔT仅仅依赖于x，满足

$$
\begin{aligned}
-a\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial x^2} &= -\frac{j}{\rho c L} \\
\left.\frac{\partial \Delta T}{\partial x}\right|_{x=0} &= 0 \\
\left.\frac{\partial \Delta T}{\partial x}\right|_{x=L} &= \frac{j}{\lambda} \\
\int_0^L \Delta T(x,t)\,dx &= 0
\end{aligned}
$$

由此不难解出

$$\Delta T = \frac{j}{2\lambda}\left(\frac{x^2}{L} - \frac{L}{3}\right)$$

附录1：平均温度一直变化的例子

把“稳恒解”（虽然平均温度不断变化，但各处的温度梯度稳定不变）当作特解，令

$$T = \left(T_0 + \frac{j}{\rho c L} t\right) + \frac{j}{2\lambda}\left(\frac{x^2}{L} - \frac{L}{3}\right) + \delta T(x,t),$$

这里的$\delta T(x,t)$描述了解对稳恒态的偏差如何衰减。把$T(x,t)$直接代入初始的方程和边界条件，易见δT也满足热传导方程，并满足：

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial \delta T}{\partial x}\right|_{x=0} &= 0 \\ \left.\frac{\partial \delta T}{\partial x}\right|_{x=L} &= 0 \\ \left.\delta T\right|_{t=0} &= -\frac{j}{2\lambda}\left(\frac{x^2}{L} - \frac{L}{3}\right) \end{aligned}$$

附录1：平均温度一直变化的例子

显然δT可以用标准套路解出来。请自行完成这部分计算。最后的完整解是：

$$T=\left(T_0+\frac{j}{\rho cL}t\right)+\frac{j}{2\lambda}\left(\frac{x^2}{L}-\frac{L}{3}\right)-\frac{2jL}{\lambda\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}e^{-a\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

这个解的第一个括号内是平均温度的变化，第二部分描述稳恒态的形状，第三部分描述初始时对稳恒态的偏离是如何衰减掉的。

附录2：波动方程，不好借助渐近解的例子

求解一端固定，另一端正弦驱动的弦振动:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \\
u\big|_{x=0} &= 0, \\
u\big|_{x=L} &= A\sin(\omega t), \\
u\big|_{t=0} &= 0, \\
\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= 0.
\end{aligned}$$

附录2：波动方程，不好借助渐近解的例子（解法一）

考虑如下的满足边界条件但不满足初始条件的特解：

$$u_0(x,t) = A\sin(\omega t)\frac{\sin\frac{\omega x}{a}}{\sin\frac{\omega L}{a}}$$

令$u(x,t) = u_0(x,t) + \upsilon(x,t)$，则$\upsilon(x,t)$满足：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x^2} &= 0, \\
\upsilon|_{x=0} &= 0, \\
\upsilon|_{x=L} &= 0, \\
\upsilon|_{t=0} &= 0, \\
\left.\frac{\partial\upsilon}{\partial t}\right|_{t=0} &= -A\omega\frac{\sin\frac{\omega x}{a}}{\sin\frac{\omega L}{a}}
\end{aligned}$$

$\upsilon(x,t)$显然可以用标准套路求解，请自行完成。

附录2：波动方程，不好借助渐近解的例子（解法二）

解法一的办法是把非线性的边界条件转化为非线性的初始条件，手段是找一个既满足方程又满足边界条件的特解，这往往需要高超的技巧。
事实上，我们还可以把非线性的边界条件转化为非线性的方程（准确地说是带源的方程），而且这样做对技巧的要求降低了很多：你只要随便找一个满足边界条件但并不满足方程的"瞎解"。

写一个满足边界条件但并不满足方程的解显然要容易得多，例如：

$$\frac{Ax}{L}\sin(\omega t)$$

附录2：波动方程，不好借助渐近解的例子（解法二）

令

$$u(x,t)=\frac{Ax}{L}\sin(\omega t)+\upsilon(x,t)$$

代回原方程，得到:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x^2} &= \frac{A\omega^2 x}{L}\sin(\omega t),\\
\upsilon|_{x=0} &= 0,\\
\upsilon|_{x=L} &= 0,\\
\upsilon|_{t=0} &= 0,\\
\left.\frac{\partial\upsilon}{\partial t}\right|_{t=0} &= -\frac{A\omega x}{L}
\end{aligned}$$

这样就把问题转化为求有源的方程。可以参考例题1的标准套路解决这个问题，请自行完成。

思考题

如果驱动频率为共振频率：$\omega = \frac{n\pi a}{L}$ (n为正整数)，上述解法还可行吗?