Methods of **M**athematical **P**hysics

§15 Stirling Formula, nD spherical Integral

Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/mmp

Outline

Stirling公式

当$x \gg 1$时，有如下的近似表达式 (Stirling公式):

$$x! \approx \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$$

Stirling公式的证明

利用Γ函数的定义：

$$x! = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{-t+x\ln t} dt$$

被积函数在极大值点$t = x$附近贡献较大，所以把$-t + x\ln t$在$t = x$附近泰勒展开:

$$-t + x\ln t \approx -x + x\ln x - \frac{(t-x)^2}{2x}$$

$$\begin{aligned} x! &\approx \int_0^\infty e^{-x+x\ln x} e^{-\frac{(t-x)^2}{2x}} dt \\ &\approx \left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(t-x)^2}{2x}} dt \\ &= \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \end{aligned}$$

Stirling公式的加强版

Stirling公式的终级版本为：

$$x! = \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x e^{\frac{1}{12x}-\frac{1}{360x^3}+\frac{1}{1260x^5}-\frac{1}{1680x^7}\cdots}$$

（证明略）
如果取截断

$$\boxed{x! \approx \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x e^{\frac{1}{12x}-\frac{1}{360x^3}}}$$

对$x \geq 3$，结果的相对误差$\lesssim 3 \times 10^{-6}$。因此，一个快速用初等函数计算 Γ函数的办法是用递推公式转化为$x \geq 3$时的Γ函数的计算问题。

例题

计算$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$，要求误差小于$10^{-5}$。

解法一

大多数编程语言和脚本语言都有内置的Γ函数。例如，
在python环境中输入命令：

```
from math import *
gamma(1/3.)
```

得到输出结果

```
2.678938534707748
```

解法二

如果手头没有可以现成计算Γ函数的工具，那么就利用Stirling公式的加强版：

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\left(\frac{10}{3}\right)!}{\frac{1}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{7}{3}\times\frac{10}{3}} \approx \sqrt{\frac{20\pi}{3}}\left(\frac{10}{3e}\right)^{\frac{10}{3}} e^{\frac{1}{40}-\frac{3}{4000}} \times \frac{81}{280} \approx 2.678934$$

Euler常数 —— 重要性仅次于π和e的数学常数

可以用连续的积分

$$T_n = \int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln n$$

来近似级数和

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$$

误差当$n \to \infty$时趋向于一个常数，定义其为Euler常数：

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = 0.5772156649\ldots$$

例题

证明Γ函数的无穷乘积表达式:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}.$$

证明:利用Γ函数递推关系

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}{(z+n)!} = \frac{n!z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{z}{3}\right)\dots\left(1+\frac{z}{n}\right)}{(z+n)!}$$

令$n\to\infty$，并利用Stirling公式

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(z)} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\left(\frac{z+n}{e}\right)^{n+z}}z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{z}{3}\right)\dots\left(1+\frac{z}{n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-n}e^z n^{-z}z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{z}{3}\right)\dots\left(1+\frac{z}{n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} n^{-z}z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{z}{3}\right)\dots\left(1+\frac{z}{n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} e^{-z\ln n}z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{z}{3}\right)\dots\left(1+\frac{z}{n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} e^{\gamma z-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\right)z}z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{z}{3}\right)\dots\left(1+\frac{z}{n}\right)
\end{aligned}$$

例题

随机抛100次硬币，估算恰好有50次正面向上的概率。

解答

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{1}{2^{100}} \times \frac{100!}{(50!)^2} \\
&\approx \frac{1}{2^{100}} \times \frac{\sqrt{200\pi}\left(\frac{100}{e}\right)^{100}}{100\pi\left(\frac{50}{e}\right)^{100}} \\
&= \frac{1}{10}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \\
&\approx 0.080
\end{aligned}
$$

请尝试用Stirling公式的加强版来计算更加精确的结果。

n维限和积分公式 (B函数的推广)

$$\int_{\Omega_n} x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2-1}\ldots x_n^{\alpha_n-1}f(x_1+x_2+\ldots+x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\ldots\Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)}\int_0^1 f(u)u^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n-1}du\,.$$

其中等式左边的积分区域$\Omega_n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n):x_1,x_2,\ldots,x_n\geq 0; x_1+x_2+\ldots+x_n\leq 1\}$.

n维限和积分公式的证明

证明：用归纳法，$n=1$时命题显然成立。假设命题对$n-1$成立，考虑积分

$$J=\int_{\Omega_n} x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2-1}\ldots x_n^{\alpha_n-1}\delta(x_1+x_2+\ldots+x_n-1)dx_1dx_2\ldots dx_n.$$

先对x_n积分，得到

$$J=\int_{\Omega_{n-1}} x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2-1}\ldots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}-1}(1-x_1-x_2-\ldots-x_{n-1})^{\alpha_n-1}dx_1dx_2\ldots dx_{n-1}.$$

利用对$n-1$的归纳假设，以及B函数和Γ函数的关系，得到

$$\begin{aligned}
J &= \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\ldots\Gamma(\alpha_{n-1})}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1})}\int_0^1(1-t)^{\alpha_n-1}t^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}-1}dt\\
&= \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\ldots\Gamma(\alpha_{n-1})}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1})}\frac{\Gamma(\alpha_n)\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1})}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}+\alpha_n)}\\
&= \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\ldots\Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)}
\end{aligned}$$

n维限和积分公式的证明(续)

然后对任意$0 < u < 1$，考虑积分

$$I(u) = \int_{\Omega_n} x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2 - 1} \ldots x_n^{\alpha_n - 1} \delta(x_1 + x_2 + \ldots + x_n - u) dx_1 dx_2 \ldots dx_n. \quad (1)$$

做变量替换$x_i = uy_i$，并利用前面得到的积分J，就得到

$$\begin{aligned} I(u) &= u^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n - 1} \int_{\Omega_n} y_1^{\alpha_1 - 1} y_2^{\alpha_2 - 1} \ldots y_n^{\alpha_n - 1} \delta(y_1 + y_2 + \ldots + y_n - 1) dy_1 dy_2 \ldots dy_n \\ &= u^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n - 1} \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2) \ldots \Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)} \end{aligned} \quad (2)$$

最后，分别利用(1)和(2)可以看出所要求证的等式左右两边都等于

$$\int_0^1 I(u) f(u) du$$

于是证毕。

例题

计算n-维空间的球体的体积 ($n \in Z^+$)。

解答

$$V_n = \int_{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\le 1} dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

利用对称性可以写成

$$V_n = 2^n \int_{x_1,x_2,\ldots,x_n\ge 0; x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\le 1} dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

作变量替换$x_i = \sqrt{y_i}$,

$$V_n = \int_{\Omega_n} y_1^{-\frac{1}{2}} y_2^{-\frac{1}{2}} \ldots y_n^{-\frac{1}{2}} dy_1 dy_2 \ldots dy_n$$

再利用n维限和积分公式:

$$V_n = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^1 u^{\frac{n}{2}-1} du = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{2}{n} = \frac{\pi^{n/2}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}$$

例题

满足标准正态分布

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

的随机变量x的100次独立采样值为$x_1, x_2, \ldots, x_{100}$；请估算$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{100}^2 > 200$ 的概率。

解答

我们先考虑n个独立地满足标准正态分布的变量$x_1, x_2, \ldots, x_n$的平方和不大于s $(s \geq 0)$的概率：

$$P_n(s) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{x_1^2+x_2^2+\ldots x_n^2<s} e^{-\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{2}} dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

由正态分布的对称性，可以把积分限定在$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$的范围内：

$$P_n(s) = \frac{2^n}{(2\pi)^{n/2}} \int_{x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0; x_1^2+x_2^2+\ldots x_n^2<s} e^{-\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{2}} dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

解答(续)

做变量替换$x_i = \sqrt{sy_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$，并利用n维限和积分公式：

$$\begin{aligned}
P_n(s) &= \frac{s^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\Omega_n} y_1^{-\frac{1}{2}} y_2^{-\frac{1}{2}} \ldots y_n^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{s(y_1+y_2+\ldots+y_n)}{2}} dy_1 dy_2 \ldots dy_n \\
&= \frac{s^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^{n/2}} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^1 e^{-\frac{su}{2}} u^{\frac{n}{2}-1} du \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\frac{s}{2}} e^{-t} t^{\frac{n}{2}-1} dt.
\end{aligned}$$

我们需要计算的是：

$$p = 1 - P_{100}(200) = \frac{1}{\Gamma(50)} \int_{100}^{\infty} t^{49} e^{-t} dt = \frac{1}{\Gamma(50)} \int_{100}^{\infty} e^{-t+49\ln t} dt$$

解答(续)

被积函数随着t增大而迅速减少。因此我们在$t=100$附近做泰勒展开

$$-t+49\ln t\approx -100+49\ln 100-0.51(t-100)$$

积分得到

$$\int_{100}^{\infty} t^{49}e^{-t}dt\approx e^{-100+49\ln 100}\int_{100}^{\infty} e^{-0.51(t-100)}dt\approx \frac{e^{-100+49\ln 100}}{0.51}$$

再利用Stirling公式,

$$p\approx \frac{e^{-100+49\ln 100-(-49+49\ln 49)}}{0.51\times\sqrt{98\pi}}\approx 1.2\times 10^{-8}$$

Homework

- 抛6000次骰子，每个面（1，2，3，4，5，6）恰好各出现1000次的概率大约为多少?
- 计算质量为m半径为r的刚性球的转动惯量。
- 理想气体中任取100个分子，这100个分子的方均根速率超过所有分子的方均根速率的2倍的概率大概是多大?