Methods of Mathematical Physics

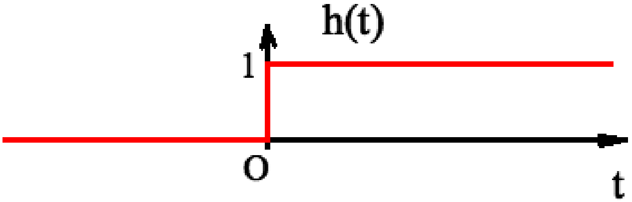
§14 Laplace Transform

Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/mmp

Outline

思考题

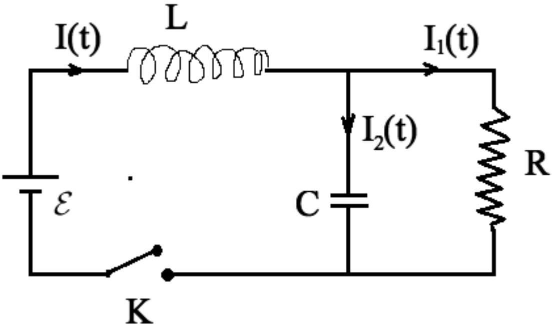


$$h(t) = \begin{cases} 0, & \text{if } t < 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{if } t = 0 \\ 1, & \text{if } t > 0. \end{cases}$$

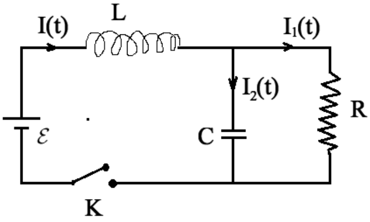
如图的函数称为单位跃阶函数(Heaviside step function)，它的导函数是什么？

一个经典的电路问题

如图，电阻R和电容C并联，再依次和电感L以及电动势为$\mathcal{E}$的直流电源串联，在$t=0$时刻合上开关K，求在$t>0$时刻电路中的电流$I(t)$。



一种思路



设电容上积累的电荷为Q，则由并联部分电压关系得到

$$I_1 = \frac{Q}{CR}, \quad I_2 = \frac{dQ}{dt}$$

总电压方程为：

$$L\frac{d}{dt}\left(\frac{Q}{CR} + \frac{dQ}{dt}\right) + \frac{Q}{C} = \mathcal{E}$$

即

$$Q'' + \frac{1}{CR}Q' + \frac{1}{CL}Q = \frac{\mathcal{E}}{L}$$

我们要求这个二阶常微分方程在$Q(0) = 0, Q'(0) = 0$的初始条件下的解。

拉普拉斯变换的使用流程

$t = 0$的初始条件 + 线性常微分方程组

$\downarrow$

拉普拉斯变换 （查表，幼儿园操作）

$\downarrow$

拉普拉斯空间的代数方程

$\downarrow$

求解代数方程 （小学操作）

$\downarrow$

拉普拉斯逆变换 （查表，幼儿园操作）

$\downarrow$

原问题的解

拉普拉斯变换

$$f'(t) \overset{\mathcal{LT}}{\Longrightarrow} pF(p) - f(0)$$

拉普拉斯变换

函数$f(t)$的拉普拉斯变换$F(p)$定义为

$$F(p) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-pt}dt\,.$$

(这里的0^-理解为比零稍稍小一点点的数.)
或简单写成

$$f \xrightarrow{\mathcal{LT}} F\,.$$

和傅立叶变换一样，拉普拉斯变换是一个线性变换

积分要从0^-开始

普拉斯变换的积分下限0^-在物理上很容易理解：只有积分范围覆盖$t=0$时刻，我们才能用到$t=0$时刻的初始条件。

在不致引起混淆但情况下，可以把0^-写成0.

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt\,.$$

导函数的拉普拉斯变换

设$f \xrightarrow{\mathcal{LT}} F$，则导函数$f'(t)$的拉普拉斯变换为

$$\int_{0^-}^{\infty} f'(t)e^{-pt}dt = f(t)e^{-pt}\Big|_{0^-}^{\infty} + p\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-pt}dt = pF(p) - f(0^-).$$

对$f'(t)$应用上述结论，得到二阶导函数的拉普拉斯变换为

$$p(pF(p) - f(0)) - f'(0) = p^2F(p) - pf(0^-) - f'(0^-).$$

反复使用这个办法，可以推出任意阶导函数的拉普拉斯变换:

$$f^{(n)}(t) \xrightarrow{\mathcal{LT}} p^nF(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-1-k} f^{(k)}(0^-).$$

查表就ok

我们还需要知道怎么把给定的具体函数进行拉普拉斯变换和逆变换。除了一些特别简单的情况外，都可以通过查表来解决。（推荐wikipedia的Laplace Transform词条下的表，比较全。）附录里给出的几个常用公式：

$$
\begin{aligned}
t^{\alpha}e^{\beta t} &\overset{\mathcal{LT}}{\Longrightarrow} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p-\beta)^{\alpha+1}};\ (\alpha>-1) \\
\cos\omega t &\overset{\mathcal{LT}}{\Longrightarrow} \frac{p}{p^2+\omega^2} \\
\sin\omega t &\overset{\mathcal{LT}}{\Longrightarrow} \frac{\omega}{p^2+\omega^2}
\end{aligned}
$$

在第一个公式里取 $\alpha=\beta=0$，或者在第二个公式里取$\omega=0$，就能得到1的拉普拉斯变换为$\frac{1}{p}$;

回到电路题

$$Q'' + \frac{1}{CR}Q' + \frac{1}{CL}Q = \frac{\mathcal{E}}{L}$$

对上式进行拉普拉斯变换，设$Q(t) \xRightarrow{\mathcal{LT}} \tilde{Q}(p)$:

$$\left[p^2\tilde{Q} - pQ(0) - Q'(0)\right] + \frac{1}{CR}\left[p\tilde{Q} - Q(0)\right] + \frac{1}{CL}\tilde{Q} = \frac{\mathcal{E}}{Lp}$$

利用$Q(0) = Q'(0) = 0$，得到

$$\tilde{Q} = \frac{\mathcal{E}}{Lp\left(p^2 + \frac{p}{CR} + \frac{1}{CL}\right)}$$

回到电路题

记$I_2 = Q'(t)$的拉普拉斯变换为$\tilde{I}_2$，注意到$Q(0) = 0$，

$$\tilde{I}_2 = p\tilde{Q} - Q(0) = \frac{\mathcal{E}}{L\left(p^2 + \frac{p}{CR} + \frac{1}{CL}\right)}$$

做因式分解 $p^2 + \frac{1}{CR}p + \frac{1}{CL} = (p-\alpha)(p-\beta)$ （即求出一元二次多项式的两个根α, β）。如果$L = 4CR^2$，则$\alpha = \beta = -\frac{1}{2CR}$.

$$\tilde{I}_2 = \frac{\mathcal{E}}{L(p-\alpha)^2}$$

利用前面所列的第一条公式进行反演

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{L} t e^{\alpha t}.$$

回到电路题

如果$L \neq 4CR^2$，则

$$\tilde{I}_2 = \frac{\mathcal{E}}{L(\alpha-\beta)}\left(\frac{1}{p-\alpha}-\frac{1}{p-\beta}\right)$$

即

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{L(\alpha-\beta)}\left(e^{\alpha t}-e^{\beta t}\right).$$

最后，利用

$$I_1 = \frac{Q}{CR} = \frac{\int_0^t I_2(t')dt'}{CR}$$

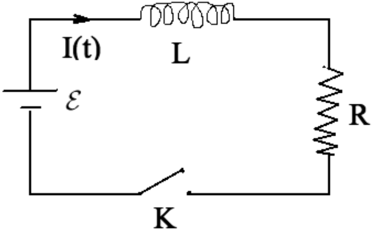
以及

$$I = I_1 + I_2$$

即可算出电路中的总电流I。

Homework

- 求$f(t) = \int_0^t \frac{\sin x}{x} dx$的拉普拉斯变换。
- 求$F(p) = \frac{1}{p^2-2p+2}$的拉普拉斯逆变换。
- 如图电动势为$\mathcal{E}$的直流稳压电源和电感L以及电阻R串联，在$t=0$时刻合上开关K，求之后电路中的电流$I(t)$。



附录

常见性质和变换公式（别有压力，能学多少就学多少）

利用定义

利用拉普拉斯变换的定义，容易算出：

$$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{LT}} 1$$

$$1 \xrightarrow{\mathcal{LT}} \frac{1}{p}$$

幂函数因子

设有拉普拉斯变换

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt,$$

两边对p求导得到

$$F'(p) = \int_0^\infty (-tf(t))e^{-pt}dt,$$

反复利用上式即得

$$\boxed{t^n f(t) \xrightarrow{\mathcal{LT}} \left(-\frac{d}{dp}\right)^n F(p).}$$

幂函数的拉普拉斯变换

利用 $1 \overset{\mathcal{LT}}{\Longrightarrow} \frac{1}{p}$，左边乘上$t^n$，右边作用$\left(-\frac{d}{dp}\right)^n$，得到

$$t^n \overset{\mathcal{LT}}{\Longrightarrow} \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

实际上，直接用拉普拉斯变换以及Γ函数的定义，可以得到更一般的结论：

$$t^{\alpha-1} \overset{\mathcal{LT}}{\Longrightarrow} \frac{\Gamma(\alpha)}{p^\alpha}, \qquad \mathrm{Re}(\alpha) > 0.$$

缩放

设$f(t)$的拉普拉斯变换为$F(p)$，则导函数$f(at)$的拉普拉斯变换为

$$\int_0^\infty f(at)e^{-pt}dt = \int_0^\infty f(u)e^{-\frac{p}{a}u} d\left(\frac{u}{a}\right) = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right),$$

即

$$\boxed{f(at) \xRightarrow{\mathcal{LT}} \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right).}$$

指数函数因子

设$f(t)$的拉普拉斯变换为$F(p)$，则$e^{at}f(t)$的拉普拉斯变换为

$$\int_0^\infty e^{at}f(t)e^{-pt}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(p-a)t}dt = F(p-a)\,,$$

即

$$\boxed{e^{at}f(t) \xrightarrow{\mathcal{LT}} F(p-a)\,.}$$

指数函数的拉普拉斯变换

利用 $1 \overset{\mathcal{LT}}{\Longrightarrow} \frac{1}{p}$ 以及乘指数函数因子的规则，得到

$$e^{at} \overset{\mathcal{LT}}{\Longrightarrow} \frac{1}{p-a}, \qquad \mathrm{Re}(p-a) > 0.$$

三角函数的拉普拉斯变换

有了指数函数，三角函数就简单了：

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \xRightarrow{\mathcal{LT}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{p + i\omega}\right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \xRightarrow{\mathcal{LT}} \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

源的积分

源的积分比较简单：

设$f \xrightarrow{\mathcal{LT}} F$，令$g(t)=\int_0^t f(u)du$，并设$g \xrightarrow{\mathcal{LT}} G$。
因$g'(t)=f(t)$，且$g(0)=0$，根据导函数的拉普拉斯变换规则：

$$F(p)=pG(p)-0=pG(p)$$

即

$$\boxed{\int_0^t f(u)du \xrightarrow{\mathcal{LT}} \frac{F(p)}{p}}$$

像的积分

像的积分则稍显复杂。

设$f \xrightarrow{\mathcal{LT}} F$，令$g(t) = \frac{f(t)}{t}$，并设$g \xrightarrow{\mathcal{LT}} G$。
根据幂函数因子的拉普拉斯变换规则：

$$F(p) = -G'(p).$$

一般情况下，$G(\infty) = 0$。积分得到

$$\boxed{\frac{f(t)}{t} \xrightarrow{\mathcal{LT}} \int_p^{\infty} F(v)dv}$$

思考：你能设计一个不一般的情况让$G(\infty) = 0$不成立吗?

平移

设$f(t)$的拉普拉斯变换为$F(p)$，则 $f(t-a)h(t-a)$ $(a>0)$ 的拉普拉斯变换为

$$\int_a^{\infty} f(t-a)e^{-pt}dt = e^{-ap}\int_0^{\infty} f(u)e^{-pu}du = e^{-ap}F(p)$$

即

$$\boxed{f(t-a)h(t-a) \overset{\mathcal{LT}}{\Longrightarrow} e^{-ap}F(p),\ (a>0)}$$

卷积

对拉普拉斯变换， f和g的卷积$f * g$定义为

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

这跟我们学习傅立叶变换时的卷积定义不太一样。但不必担心符号混乱：一般拉普拉斯变换和傅立叶变换不会同时进行。

拉普拉斯变换的卷积定理

拉普拉斯变换的卷积定理和傅立叶变换的卷积定理在形式上完全相同。

如果$f \overset{\mathcal{LT}}{\Longrightarrow} F$, $g \overset{\mathcal{LT}}{\Longrightarrow} G$，则$f \star g \overset{\mathcal{LT}}{\Longrightarrow} FG$.

卷积定理的证明

$$(f \star g) \overset{\mathcal{LT}}{\Longrightarrow} \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau.$$

做变量替换$u = t - \tau, \upsilon = \tau$，注意$0 < \tau < t$的条件转化为$u > 0, \upsilon > 0$。转换矩阵的行列式为1，所以$dtd\tau$直接改为$dud\upsilon$：

$$(f \star g) \overset{\mathcal{LT}}{\Longrightarrow} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-p(u+\upsilon)} f(u) g(\upsilon) dud\upsilon = F(p)G(p)$$

思考题

试利用卷积定理以及$h(t) \xrightarrow{\mathcal{LT}} \frac{1}{p}$，证明积分的拉普拉斯变换性质：

$$\int_0^t f(u)du \xrightarrow{\mathcal{LT}} \frac{F(p)}{p}.$$

拉普拉斯变换的反演

拉普拉斯变换是否像傅立叶变换一样存在反演公式呢?

梅林反演公式(了解这样的公式存在即可)

若$f(t) \xrightarrow{\mathcal{LT}} F(p)$，则$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} F(p)e^{pt}dp$。
其中β是足够大的正数。

我们计算拉普拉斯变换的反演一般**不用**这个公式。

我就喜欢这样看起来很厉害又不会用到的公式

总结

学了这么多公式，真是太开心了

除了都记不住，没别的毛病

精简版

$$
\begin{aligned}
t^{\alpha-1} \quad & \stackrel{\mathcal{LT}}{\Longrightarrow} \frac{\Gamma(\alpha)}{p^\alpha}, \quad \mathrm{Re}(\alpha) > 0; \\
e^{\alpha t} \quad & \stackrel{\mathcal{LT}}{\Longrightarrow} \frac{1}{p-\alpha}; \\
\cos\omega t \quad & \stackrel{\mathcal{LT}}{\Longrightarrow} \frac{p}{p^2+\omega^2} \\
\sin\omega t \quad & \stackrel{\mathcal{LT}}{\Longrightarrow} \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \\
f'(t) \quad & \stackrel{\mathcal{LT}}{\Longrightarrow} pF(p) - f(0); \\
f''(t) \quad & \stackrel{\mathcal{LT}}{\Longrightarrow} p^2F(p) - pf(0) - f'(0); \\
\int_0^t f(\tau)d\tau \quad & \stackrel{\mathcal{LT}}{\Longrightarrow} \frac{F(p)}{p}.
\end{aligned}
$$