Methods of Mathematical Physics

§13 Wavelet Transform

Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/mmp

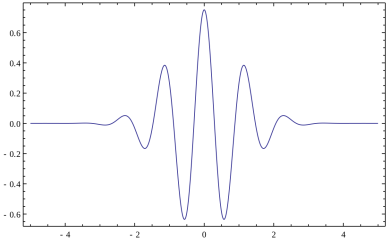
为什么需要小波分析

不同时间段的信号特征不一样

实际世界的波

数学家喜欢研究正弦波，余弦波，各种各样画出来很漂亮的波。

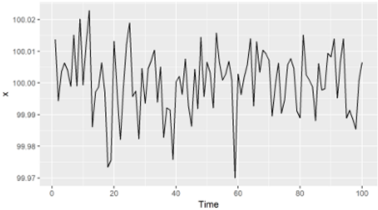
但实际世界的波往往是长这样的：信号在某时出现，过了一会儿消失。信号的频率一般偏高。



对了，往往还要加上一堆噪音——你很有可能用肉眼根本看不到这段信号在哪里。

怎么分析局域的波

如果知道信号在哪个时间段出现，截出该时间段进行频谱（傅立叶）分析就解决问题了。



但实际信号处理往往伴随着大量的噪音，无法预判信号在哪个时间段出现，怎么寻找信号并分析其特征呢?

从傅立叶变换到小波分析

傅立叶变换：
频率 $\to$ 该频率成分的大小

小波分析：
(频率，时间段) $\to$ 在该时间段内该频率成分的大小

小波分析其实就是扫描各个时间段的频谱信息。当扫描低频信息时，时间段的间隔可以取得大些；当扫描高频信息时，时间段的间隔要取得小些。

小波分析的本质

傅立叶变换的本质是把一个函数分解为一堆正交归一化的函数$\frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2\pi}}$的线性组合。

小波变换呢，当然也是把一个函数分解为一堆正交归一化的函数$\psi(t;\tau,\omega)$ 的线性组合。这里τ代表时间段的位置，ω代表圆频率。

离散小波分析

先不谈$\psi(t;\tau,\omega)$如何构造，讲真，这堆函数太多了。毕竟有无数个可以连续变化的τ和ω组合起来让人有些头疼。（好吧，数学家不头疼，物理学家头疼。）

虽然数学家十分热衷于研究连续的小波变换；物理学家们实际用的小波变换往往是离散的：$\psi(t;\tau_n,\omega_m)$或者简单记成$\psi_{n,m}(t)$。

当然，如何合适地选取τ_n,ω_m以及ψ函数的形式，使得这组展开的基“足够完备”（可以对物理信号做足够好的近似），是一个**需要详细讨论的复杂问题。**

但是——

我们这么养生的课，怎么可能讨论复杂的问题！

直接给出大家讨论好的结果就可以了！

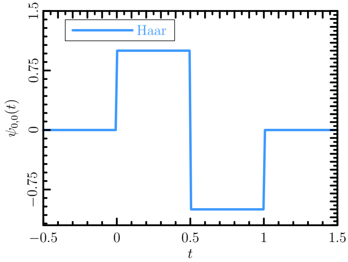
Haar小波

简单，但有点毛糙

Haar小波的母函数

第一个介绍的是应用很广泛的 Haar 小波。
不要着急，我们一个个来：先给出$\psi_{0,0}(t)$（它称为小波分析的母函数）

$$\psi_{0,0}(t) = \begin{cases} 1 & , \text{if } 0 \le t < \frac{1}{2} \\ -1 & , \text{if } \frac{1}{2} \le t < 1 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$



任意m, n

$\psi_{n,m}$可以直接从母函数生成

$$\psi_{n,m} = 2^{n/2}\psi_{0,0}(2^n t - m).$$

这其实就是把母函数进行平移和缩放。

因为Haar小波都是不连续的函数，可以期待近似出来的函数比较"毛糙"。如果你只在意函数数值大小，不大在意函数是否光滑，那么Haar小波是不错的选择。

思考题

证明Haar小波基是正交归一化的，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{n,m}(t)\psi_{n',m'}(t)dt = \delta_{nn'}\delta_{mm'}.$$

截断和展开系数

我们可以把信号按Haar基进行展开。

$$f(t) = \sum_{n,m} c_{n,m}\psi_{n,m}(t).$$

你可以直接用求内积的方法进行投影，得到任意函数$f(t)$的$\psi_{n,m}$分量为：

$$c_{n,m} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi_{n,m}(t)dt.$$

数值计算中存在更便捷的算法，这些就留到你的数值计算课上去学习吧。

实际问题都有一定频率和时间范围，所以可以做个n, m的截断，只要计算有限项的系数就可以了。

Daubechies小波

稍复杂，但更连续光滑

母函数的选取

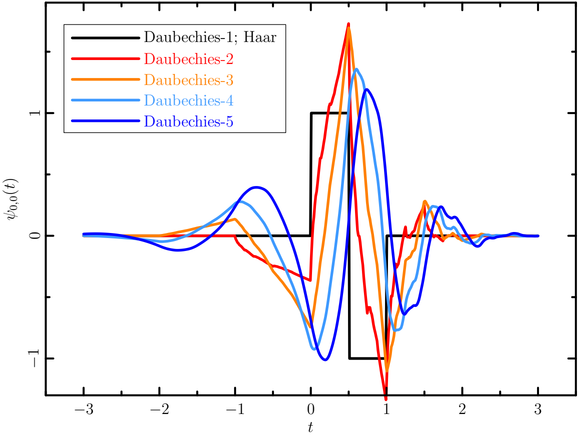
由Haar母函数生成的:

$$\psi_{n,m} = 2^{n/2}\psi_{0,0}(2^n t - m).$$

是正交归一化的函数组。这看起来有些神奇。
这样的"神奇函数"是唯一的吗?

Daubechies系列

寻找产生正交小波的母函数并不容易，相当长时间内大家都只知道Haar这么一个。有一天Daubechies突然搞出来一堆：



1阶的Daubechies就是Haar，高阶的Daubechies则是连续的，越高阶光滑性越好。

怎么计算Daubechies小波函数

高阶的Daubechies小波函数并没有解析表达式，所以只能数值计算。

在Mathematica里有内置函数
WavePsi[DaubechiesWavelet[n],t]
其中n是阶数；t是时间变量。

也可以用C或者Fortran自己写低阶的Daubechies小波函数，这些内容留到数值计算课上去学习吧。

时间序列的Daubechies小波分析

原则上讲，只要小波函数都是正交归一化的，各个小波成份的系数都可以通过用小波函数和待分解函数作内积（即投影）得到。

对于离散的时间序列，Daubechies小波分析就只要做一些简单的求和（相当于求内积的离散版本）。这些快速的算法会在时间序列分析等一些工科学科中接触到。

Homework

- 把函数$\frac{\sin t}{t}$分解为Haar小波的线性组合。取合适的阶段使误差处处不大于10^{-3}.