Methods of Mathematical Physics

§12 Advanced Topics on δ Function and Fourier Transform

Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/mmp

δ函数的高级性质

$$\delta\left(\alpha(x)\right) = \sum_{\text{roots}} \frac{\delta(x - x_i)}{|\alpha'(x_i)|}$$

再复习一下δ函数的积分表示

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\,dk = \delta(x).$$

在大量的物理问题中会用到它。

用围道积分的证明方法

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\,dk \\
= & \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx-\frac{\epsilon}{2}k^2}\,dk \\
= & \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\epsilon}{2}(k-\frac{ix}{\epsilon})^2-\frac{x^2}{2\epsilon}}\,dk \\
= & \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}}e^{-\frac{x^2}{2\epsilon}} \\
= & \delta(x)
\end{aligned}
$$

n维空间的δ函数的积分表示

$$\boxed{\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^n\mathbf{k} = \delta^{(n)}(\mathbf{x})}$$

δ函数的导函数

利用δ函数在两边都是零的特点，可以用分部积分的方法得到δ函数的导数的性质：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{d^n}{dx^n}\delta(x-x_0)\right]f(x)\,dx=(-1)^n f^{(n)}(x_0)$$

思考题

计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x-\frac{\pi}{2}) \cos x \, dx$$

δ函数的终极大招

用变量替换的方法可以得到：

$$\boxed{\delta\left(\alpha(x)\right) = \sum_{\text{roots}} \frac{\delta(x - x_i)}{|\alpha'(x_i)|}}$$

求和对所有$\alpha(x)$的根$x_1, x_2, \ldots$进行。

（请思考当$\alpha(x)$没有根或者有重根的情形上面的等式会如何。）

另一种等价的写法是：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\alpha(x)\right) f(x)\, dx = \sum_{\text{roots}} \frac{f(x_i)}{|\alpha'(x_i)|}.$$

思考题

计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2 - 1) e^x \, dx$$

傅立叶变换的高级性质

$$(f \star g)(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(\mathbf{y})\, g(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, d^n\mathbf{y}$$

$\nabla \to i\mathbf{k}$

对傅立叶逆变换式

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^n\mathbf{k}.$$

两边作用∂_j

$$\partial_j f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int (ik_j \tilde{f}(\mathbf{k})) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^n\mathbf{k}.$$

当j取遍$1, 2, \ldots, n$，上式可以写成矢量形式：

$$\widetilde{\nabla f} = i\mathbf{k}\tilde{f}$$

在量子力学里，我们常常说：位置空间的算符$-i\nabla$对应于（动量空间的）动量$\mathbf{k}$。

思考题

位置空间的拉普拉斯算符 ∇^2 在傅立叶空间对应什么?

卷积

两个函数$f(\mathbf{x})$和$g(\mathbf{x})$的卷积定义为

$$(f \star g)(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(\mathbf{y})\, g(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, d^n\mathbf{y}$$

显然，卷积满足交换律： $f \star g = g \star f$。
更重要的是卷积定理: 设f, g的傅立叶变换依次为$\tilde{f}, \tilde{g}$，则$f \star g$的傅立叶变换为$\tilde{f}\tilde{g}$，即

卷积的傅立叶变换等于傅立叶变换的乘积

思考题

请用666的操作证明卷积定理。

思考题

定义函数

$$f(x) = \int_{x-1}^{x+1} e^{-t^2} dt$$

求$f(x)$ 的傅立叶变换。

思考题

如果在傅立叶空间也定义卷积:

$$\boxed{(\widetilde{f}\star\widetilde{g})(\mathbf{k}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int \widetilde{f}(\mathbf{p})\,\widetilde{g}(\mathbf{k}-\mathbf{p})\,d^n\mathbf{p}}$$

那么是否有

$$\widetilde{fg} = \widetilde{f}\star\widetilde{g}$$

即乘积的傅立叶变换是否等于傅立叶变换的卷积?

Homework

- 计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\sin x\right) e^{-|x|} dx.$$

- 定义函数

$$F(k) = \int_{0}^{\infty} e^{-x+ik(x^2-1)} dx,$$

计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(k) dk.$$

- 把二维空间的δ函数写成积分表示，然后换到极坐标下重新写一遍这个积分表示。