Methods of Mathematical Physics

§11 Contour Integration

Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/mmp

思考题

请计算一下

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 4z + 1}$$

在每个孤立奇点处的留数。

Outline

围道积分

让你怀疑人生

例1 (研究生面试题)

计算积分

$$\int_0^1 \ln x \, dx.$$

例 1 解答

$$\int_0^1 \ln x \, dx = (x \ln x - x)\Big|_0^1 = -1$$

例2

计算积分

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos x}\,dx.$$

例2 解法一（三角函数有理分式标准推土法）

回忆下高数课学过的(?)的知识：凡是三角函数有理分式，**原则上都能用变量替换$t = \tan\frac{x}{2}$求出原函数。**
请先验算：

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

例2 解法一（三角函数有理分式标准推土法)

剩下的就是毫无技巧地推土：

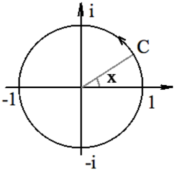
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2+\cos x}dx &= \int \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2} \\ &= \int \frac{2}{3+t^2}dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}+c \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+c\end{aligned}$$

不必为原函数在$x=\pi$不连续而惊慌，利用一下三角函数周期性把积分换到$(-\pi,\pi)$:

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{2+\cos x}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{2+\cos x}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

例2 解法二 （围道积分法）

考虑逆时针方向的单位圆$|z| = 1$，



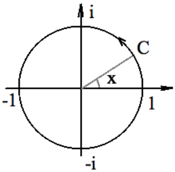
记幅角为x，则$z = e^{ix}$，请先验算：

$$dx = \frac{dz}{iz}$$

$$\cos x = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}$$

$$\sin x = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}$$

例2 解法二 （围道积分法）



$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos x} dx &= \oint_C \frac{1}{2+\frac{z+\frac{1}{z}}{2}} \frac{dz}{iz} \\
&= -2i \oint_C \frac{1}{4z+z^2+1} dz \\
&= -2i \left(2\pi i \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

其实我更喜欢毫无技巧地推土

例3

计算积分

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta \, d\theta$$

例3 解法一

利用一个非常有用的B函数和Γ函数的关系来解决问题。

对$\alpha,\beta>0$，B函数定义为：

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$$

它和Γ函数有如下关系：

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

令$x=\cos^2\theta$ 即得到所求积分：

$$\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\theta\,d\theta=2\int_0^1 x^{n-1/2}(1-x)^{-1/2}dx=2B(n+\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{\pi}{2^{2n-1}}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

附：补充证明B函数和Γ函数的关系（技巧似曾相识）

根据Γ函数定义：

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^\infty u^{\alpha-1}e^{-u}du \int_0^\infty v^{\beta-1}e^{-v}dv$$

做替换$u = s^2, v = t^2$;

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = 4\int_0^\infty s^{2\alpha-1}e^{-s^2}ds \int_0^\infty t^{2\beta-1}e^{-t^2}dt$$

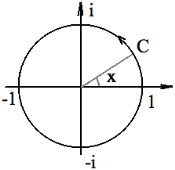
然后转换到极坐标$s = r\cos\theta, t = r\sin\theta$;

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = 4\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2\alpha+2\beta-2}r\,dr \int_0^{\pi/2} \cos^{2\alpha-1}\theta \sin^{2\beta-1}\theta d\theta$$

最后做变量替换$w = r^2$, $x = \cos^2\theta$，即得证。

例3 解法二 围道积分

还是取单位圆进行围道积分：



$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} x \, dx = \oint_C \left(\frac{1+z^2}{2z} \right)^{2n} \frac{dz}{iz}.$$

等式右边是标准的围道积分，围道内只有$z=0$一个孤立奇点。易看出留数为

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2 i}$$

乘以$2\pi i$即得积分结果。

例4

计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos x \, dx.$$

例4 解法一 （级数展开大法）

回忆热学课上的高斯积分：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\pi}a^{-1/2}\,.$$

两边对a求导n次并除以$(2n)!$：

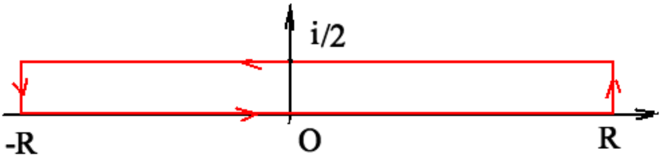
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\pi}\frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^n}{n!} a^{-\frac{1}{2}-n}$$

（上面我们用到了$(2n)! = (2^n n!) \times 1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)$.)

令$a = 1$并两边对n从0到∞求和

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos x\,dx = \sqrt{\pi}e^{-1/4}$$

例4 解法二 围道积分



在如图的围道上对函数e^{-x^2}进行积分。
容易验证当$R\to\infty$时，两条短边上的积分趋向于零。因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+\frac{i}{2})^2}dx=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$$

化简并取实部即得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos x\,dx=\sqrt{\pi}e^{-1/4},$$

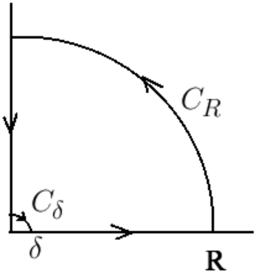
（思考：取虚部可以得到什么结论）

例5

计算积分

$$\int_0^\infty \frac{\cos x - e^{-x}}{x}\,dx.$$

例5 解答概要



对$\frac{e^{iz}}{z}$在如图围道上积分，易估算出当$R \to \infty$时在C_R上积分趋向于零。$\delta \to 0^+$时在C_δ上积分为$-\frac{\pi}{2}i$。因此得到

$$\int_0^\infty \frac{e^{ix}}{x}dx - \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{ix}d(ix) = \frac{\pi}{2}i$$

对比两边实部即得

$$\int_0^\infty \frac{\cos x - e^{-x}}{x}dx = 0.$$

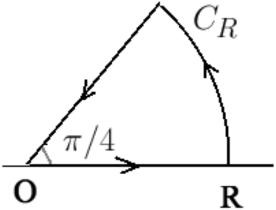
（思考：对比两边虚部得到什么结论？）

例 6

计算积分

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\, dx$$

例6 解答概要



对e^{iz^2}在如图围道上积分。不难估算出当$R \to \infty$时在C_R上积分趋向于零（请自行补充完整这部分证明）。

$$\int_0^\infty e^{ix^2}\,dx - e^{\frac{\pi}{4}i}\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = 0$$

对比两边虚部即得

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

（思考：对比两边实部得到什么结论？）

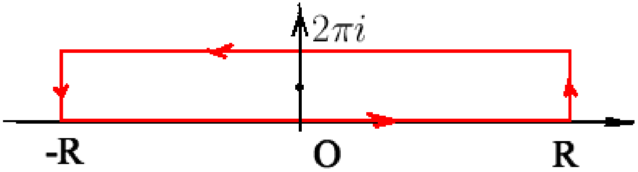
例 7

计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x}\,dx,$$

其中实常数α满足$0<\alpha<1$。

例7 解答概要



按如图的围道对$f(z)=\frac{e^{\alpha z}}{1+e^z}$进行积分，并注意到围道内有一个孤立奇点$z=\pi i$。记所求积分为$I$，则有

$$(1-e^{2\pi\alpha i})I = 2\pi i\,\mathrm{res}\, f\,(\pi i) = -2\pi i e^{\alpha\pi i}$$

从而得出

$$I=\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

Γ函数的互余宗量关系

作变量替换$t=\frac{e^x}{1+e^x}$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\alpha x}}{1+e^x}\,dx=\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{-\alpha}dt=B(\alpha,1-\alpha)$$

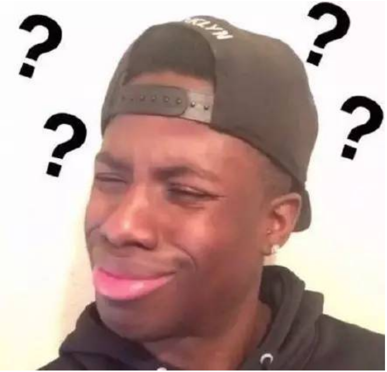
再结合之前的B函数和Γ函数的关系，就得到著名的Γ函数的互余宗量关系

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

用解析延拓的办法可以把上式推广到α为任何非整数的情形。

（请思考：我们是怎样做到从一条线$(0<\alpha<1)$出发进行解析延拓的.)

总结



完全不知道这些围道哪来的.jpg

技艺无止境：留给学神们的思考题

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1}\, dx;$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx, \quad 0 < \alpha < 1;$$

$$\int_0^1 \frac{x^{1/4}(1-x)^{3/4}}{(1+x)^3}\, dx;$$

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\, dx\,;$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-\frac{1}{2}}}{(x+a)^p(x+b)^p}\, dx, \quad p > \frac{1}{2}, a > 0, b > 0.$$

Homework

- 计算积分
$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2},$$
其中常数α满足$0 < \alpha < 1$。
- 计算积分
$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{1 + x^2}\, dx.$$
- 计算积分
$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + \alpha^2} dx,$$
其中常数$\alpha > 0$。