Methods of Mathematical Physics

§8 Risidue Theorem

Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/mmp

Outline

洛朗展开

挖掉中心后再展开就会出现负次幂

泰勒展开定理的另一种证法

对$|z-z_0|=s<r$，取$s<q<r$并以q为半径作圆区域C_q：$|z-z_0|<q$。根据柯西积分公式：

$$\begin{aligned} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial C_q}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial C_q}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial C_q}\frac{1}{\zeta-z_0}\frac{f(\zeta)}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial C_q}\frac{1}{\zeta-z_0}f(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \end{aligned}$$

其中$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial C_q}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$.

在一个环里解析的函数：洛朗展开定理

设$f(z)$在环区域$r < |z - z_0| < R$ (这里允许$r = 0$和$R = \infty$)内解析，则

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta,$$

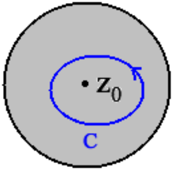
积分路径C可以是环内任意的一条逆时针绕z_0一周的分段光滑曲线。

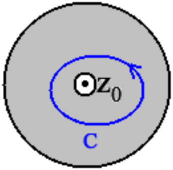
这个展开式称为洛朗展开。注意和Taylor展开不同，指标的求和范围从$-\infty$到∞。而且a_n不再和f在z_0处的n阶导数相关（🤔z_0根本就不在函数的定义域内)。

思考题

你能参考我们刚才证明泰勒展开定理的方法，证明洛朗展开定理吗?

总结: Taylor展开和洛朗展开





$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$$

思考题

你能不通过柯西积分公式，用很直观的方式说出为什么Taylor和洛朗级数展开中n次幂项的系数总是

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

吗?

求洛朗展开的例子

$f(z) = \frac{1}{z(1+z)}$在环区域$0 < |z| < 1$内解析，洛朗展开为：

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(1+z)} &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+z} \\ &= \frac{1}{z}\left(1 - z + z^2 - z^3 + \dots\right) \\ &= \frac{1}{z} - 1 + z - z^2 + \dots \end{aligned}$$

级数展开的很多技巧我们之后会结合习题进行专门讲解，先不展开讨论。

留数定理

其实就是$\frac{1}{z-z_0}$的原函数$\ln(z-z_0)$绕z_0一圈变化$2\pi i$

孤立奇点

如果$f(z)$在z_0的邻域$0 < |z - z_0| < \delta$内解析（δ可以是任意一个小的正数)，但在$z = z_0$不解析（没有定义或者有定义却不可导），则称z_0为$f(z)$的**孤立奇点**。

$0, 1, 2$都是函数$\frac{1}{z^2(z^2-3z+2)}$的孤立奇点。

$\pm i$都是函数$\frac{1}{z^2+1}$的孤立奇点。

孤立奇点的留数

如果z_0是$f(z)$的孤立奇点，则f可在邻域$0 < |z - z_0| < \delta$ 内洛朗展开。因为我们知道$(z - z_0)^n$绕z_0积分一圈当且仅当$n = -1$时结果不为零(为$2\pi i$)，所以我们特别关注$(z - z_0)^{-1}$前的系数a_{-1}，并把它称为f在z_0处的**留数**，**记作**$\operatorname{res} f(z_0)$.

$$\operatorname{res} f(z_0) \equiv a_{-1}$$

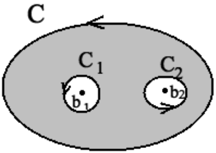
留数定理

留数定理：设f在区域T内除有限个孤立奇点$b_1, b_2, \ldots, b_n$之外解析，在T的边界上连续，则f沿T的边界的积分等于$2\pi i$乘以f在所有孤立奇点处的留数之和

$$\oint_{\partial T} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f\left(b_k\right)$$

图解留数定理

两个孤立奇点的例子: 由柯西定理



$$\oint_C f(z)dz - \oint_{C_1} f(z)dz - \oint_{C_2} f(z)dz = 0$$

在C_1和C_2上的积分前多了个负号，是因为C_1和C_2方向和左内法则规定的正方向相反。

再利用$(z-b_1)^n$沿C_1积分当且仅当$n=-1$时不为零(为$2\pi i$)，即可得到

$$\oint_{C_1} f(z)dz = 2\pi i \,\mathrm{res}\, f(b_1)$$

同理有

$$\oint_{C_2} f(z)dz = 2\pi i \,\mathrm{res}\, f(b_2)$$

代回最上面的式子即得证。当孤立奇点个数更多时同理可证。

留数定理应用举例

计算定积分

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

留数定理应用举例

思路：首先$\frac{\sin x}{x}$是偶函数，所以

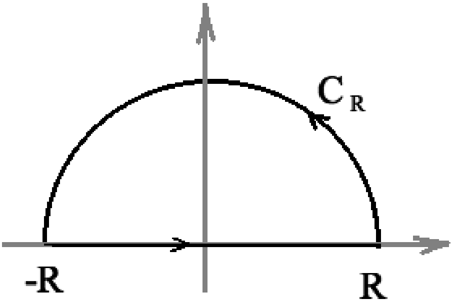
$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

$\sin x$是e^{ix}的虚部，即

$$I = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx\right)$$

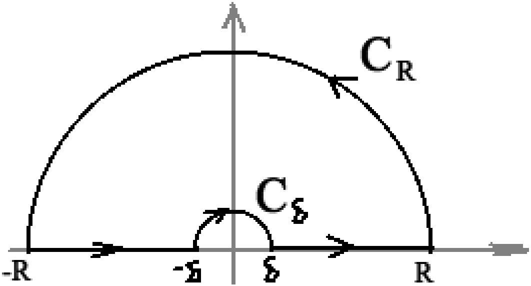
留数定理应用举例

想使用留数定理就必然要把积分路径补成一个闭合围道。考虑到e^{iz}当z的虚部很大时趋向于零，我们就尽量在上半平面补。最简单当然是补一个上半圆C_R(半径$R \to \infty$)，如下图所示：

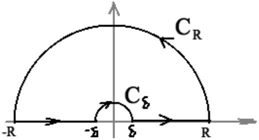


留数定理应用举例

问题是，在这个围道上$\frac{e^{iz}}{z}$在$z=0$处没有定义，我们就要想办法绕开这个奇点。
如下图所示，在原点附近拐个弯，再取一个小半圆C_δ (半径$\delta \to 0^+$)。



留数定理应用举例



在这个围道内部，$\frac{e^{iz}}{z}$处处解析，根据柯西定理或留数定理，

$$\left(\int_{-R}^{-\delta} + \int_{\delta}^{R} + \int_{C_R} + \int_{C_\delta}\right) \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

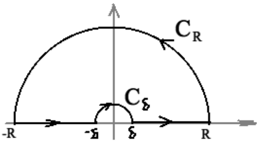
当$\delta \to 0^+$时，

$$\int_{C_\delta} \frac{e^{iz}}{z} dz \to \int_{C_\delta} \frac{1}{z} dz = \Delta \ln z = -i\pi$$

当$R \to \infty$时，可以(这里还是要稍作思考)估算出

$$\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \to 0$$

留数定理应用举例



所以我们最后得到$\delta \to 0$, $R \to \infty$时,

$$\left(\int_{-R}^{-\delta} + \int_{\delta}^{R} \right) \frac{e^{iz}}{z} dz \to i\pi$$

即

$$I = \frac{1}{2}\mathrm{Im}(i\pi) = \frac{\pi}{2}.$$

Homework

- 函数$\frac{e^{iz}}{z}$在环形区域$0 < |z| < \infty$内解析，试求它的洛朗展开。
- 计算函数$\frac{e^{iz}}{z}$在$z = 0$处的留数。
- 仿照课上用$\frac{e^{iz}}{z}$的围道积分计算

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

的方法，但是取围道时把小半圆C_δ取成下半圆，如图所示。用这个围道重新计算I。