Methods of Mathematical Physics

§3 Orthogonal Coordinates

Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/mmp

Outline

正交曲面坐标系

先作平坦近似，再修正

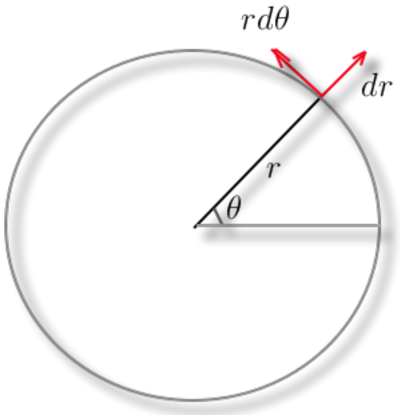
正交曲面坐标系

如果任意点附近的坐标轴方向总是两两垂直，则称该坐标系为**正交曲面坐标系**。

(所谓附近的坐标轴方向，是指仅变化一个坐标分量所得的曲线在这个点的切线方向。)

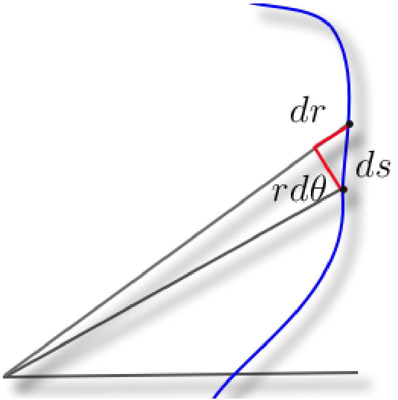
二维的直角坐标系 x, y;
二维的极坐标系 r, θ;
三维的直角坐标系的 x, y, z;
三维的柱坐标系 r, θ, z;
三维的球坐标系r, θ, φ。

极坐标是正交坐标系的图示



变化r和变化θ对应的小长度元分别为dr和$rd\theta$，且方向垂直。

极坐标弧长公式



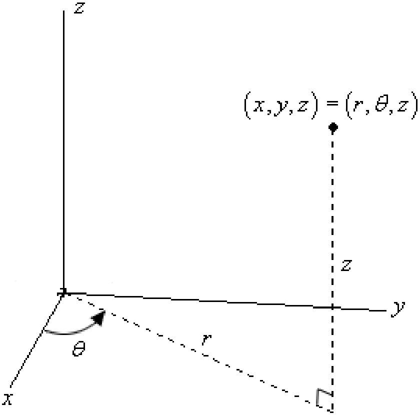
根据勾股定理，显然有

$$ds^2 = dr^2 + (rd\theta)^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

如果曲线以$r(\theta)$的函数形式表示，则得到弧长公式

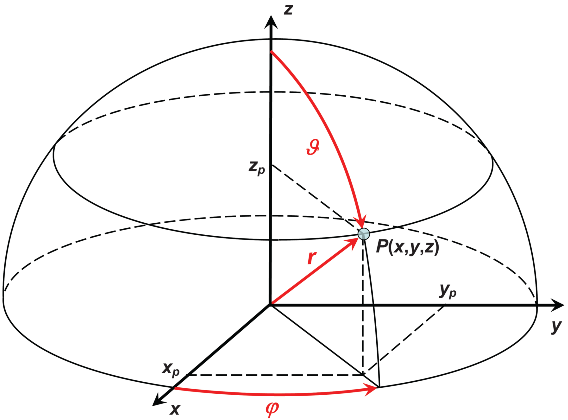
$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = \sqrt{r'^2 + r^2}\, d\theta$$

思考题



写出柱坐标系(r, θ, z)的正交长度元，由此推导柱坐标系弧长公式。

思考题



写出球坐标系(r, θ, ϕ)的正交长度元，由此推导球坐标系弧长公式。

正交曲面坐标系中的算符

梯度不需要修正；散度需要面积元修正；旋度需要长度元修正

梯度 = 单位长度内标量函数的变化

以球面坐标系为例：正交长度元分别为dr，$rd\theta$，$r\sin\theta d\phi$。

设f为某个标量函数（如温度，电势等不带方向的量）

- 沿着dr方向（保持θ, ϕ不变，变化r)，f的梯度分量为

$$\lim_{\delta r\to 0}\frac{\delta f}{\delta r}=\frac{\partial f}{\partial r}.$$

- 沿着$rd\theta$方向（保持r, ϕ不变，变化θ)，f的梯度分量为

$$\lim_{\delta\theta\to 0}\frac{\delta f}{r\delta\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}$$

- 沿着$r\sin\theta d\phi$方向（保持r, θ不变，变化ϕ)，f的梯度分量为

$$\lim_{\delta\phi\to 0}\frac{\delta f}{r\sin\theta\delta\phi}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\phi}$$

梯度 = 单位长度内标量函数的变化

因此，球坐标系下的梯度为

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi} \right).$$

(注意这个只是沿着局域的三个正交长度元方向进行分解，不同于线性代数里的用三个固定的基进行分解)

思考题

写出极坐标系和柱坐标系下的梯度。

流j的散度是单位体积的j净流出率

仍以球坐标系为例：
设j沿着长度元dr，$rd\theta$, $r\sin\theta d\phi$的分量为：(j_r, j_θ, j_ϕ).
那么$j_r(rd\theta)(r\sin\theta d\phi)$代表了$j_r$流过垂直于$dr$方向的面积元的量。
它沿dr方向的变化率代表了dr方向的流出流入不平衡，对净流出率的贡献为：

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[(rd\theta)(r\sin\theta d\phi)j_r\right]dr$$

除以体积元$dr(rd\theta)(r\sin\theta d\phi)$，得到贡献：

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 j_r\right)$$

流j的散度是单位体积的j净流出率

同理，沿$rd\theta$方向的贡献为

$$\frac{1}{(dr)(rd\theta)(r\sin\theta d\phi)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[(dr)(r\sin\theta d\phi)j_\theta\right]d\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta j_\theta)$$

沿$r\sin\theta d\phi$方向的贡献为

$$\frac{1}{(dr)(rd\theta)(r\sin\theta d\phi)}\frac{\partial}{\partial\phi}\left[(dr)(rd\theta)j_\phi\right]d\phi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}j_\phi$$

总结快速写出散度的办法

1. 以三个长度元写出直角坐标系形式的“平坦近似散度”：

$$\nabla \cdot \mathbf{j} \approx \frac{\partial}{\partial r} j_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} j_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} j_\phi$$

2. 每一项都在微分号内乘以面积修正因子，在外面除掉。例如垂直dr方向的面积元为$rd\theta r\sin\theta d\phi$，含$r$的因子(即$r^2$，剩余部分$d\theta\sin\theta d\phi$因为可以直接提到偏微分号外面被除掉，所以不用考虑)是面积修正因子。于是 $\frac{\partial}{\partial r} j_r$被修正为$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 j_r)$。

演算草稿

以球坐标系为例

正交长度元:	dr	$rd\theta$	$r\sin\theta d\phi$
垂直面积元:	$rd\theta\, r\sin\theta d\phi$	$dr\, r\sin\theta d\phi$	$dr\, rd\theta$
面积修正因子:	r^2	$\sin\theta$	1

平坦近似散度:

$$\nabla\cdot\mathbf{j}\approx\frac{\partial}{\partial r}j_r+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}j_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}j_\phi$$

修正后:

$$\nabla\cdot\mathbf{j}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2j_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta j_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}j_\phi$$

顺便提下：旋度算符的快速写法

对旋度算符，只要把面积修正换为长度元修正。仍以球坐标系为例

正交长度元: dr $rd\theta$ $r\sin\theta d\phi$

平坦近似旋度:

$$\nabla\times\mathbf{j}\approx\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}j_\phi-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}j_\theta,\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}j_r-\frac{\partial}{\partial r}j_\phi,\frac{\partial}{\partial r}j_\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}j_r\right).$$

修正后右边为

$$\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta j_\phi)-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}j_\theta,\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}j_r-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rj_\phi),\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rj_\theta)-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}j_r\right)$$

思考题

写出柱坐标系下的散度和旋度

总结

先平坦近似， 然后

- 梯度不需要修正
- 散度需要面积元修正
- 旋度需要长度元修正

柱坐标系的拉普拉斯算符

以柱坐标系r, θ, z为例，长度元为：dr，$rd\theta$，dz。
对标量函数f，梯度

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

再对梯度求散度，先作平坦近似：

$$\nabla^2 f \approx \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

然后面积元修正：

$$\begin{aligned}\nabla^2 f &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.\end{aligned}$$

极坐标的拉普拉斯算符

极坐标的拉普拉斯算符，只要去掉z：

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}.$$

Homework

- 椭圆坐标(μ,ν)表示平面直角坐标系里的点$(\cosh\mu\cos\nu,\sinh\mu\sin\nu)$。说明椭圆坐标系是一种正交曲面坐标系，然后写出椭圆坐标系的拉普拉斯算符的表达式。
- 设四维的正交曲面坐标系(t,x,y,z)的正交线元长度分别为dt，$a(t)dx$，$a(t)dy$，$a(t)dz$，其中$a(t)$为某个已知的函数。写出该坐标系的拉普拉斯算符的表达式。
- 先写出三维球坐标的拉普拉斯算符。然后考虑用参数(r,θ,ϕ,α)来表示的四维球坐标系；参数跟直角坐标(x_1,x_2,x_3,x_4)的关系为

$$x_1 = r\sin\theta\sin\phi\cos\alpha, x_2 = r\sin\theta\sin\phi\sin\alpha,$$

,

$$x_3 = r\sin\theta\cos\phi, x_4 = r\cos\theta.$$

写出四维球坐标系的拉普拉斯算符的表达式。