Methods of Mathematical Physics

§2 Complex Numbers

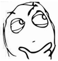
Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/mmp

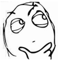
Outline

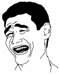
欧拉公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$


你知道欧拉公式吗?


$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$


这是不是可以看作对$e^{i\theta}$的定义?
(言下之意：欧拉公式不是等于什么都没说吗！)


年轻人，你想得太简单了！

从实变函数到复变函数的推广

实变函数

$$f(x) = x^2, \quad (x \in \Re)$$

可以推广为复变函数

$$f(z) = z^2. \quad (z \in C)$$

从实变函数到复变函数的推广

实变函数

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad (x \in \Re)$$

可以推广为复变函数

$$f(z) = \frac{z}{1+z^2}. \quad (z \in C)$$

这种推广简直弱爆了！

那我们继续

实变函数

$$f(x) = e^x, \quad (x \in \Re)$$

推广为复变函数

$$f(z) = ? \quad (z \in C)$$

当然是e^z啊！

但，e^z到底是什么意思？

e^{2+3i}是什么意思？

转化为加减乘除的问题

实变的指数函数可以用“加减乘除”来替代:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

由此自然而然地定义复变的指数函数

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

思考题

对推广到复数域的指数函数，证明“它是指数函数“。即对任意$z_1, z_2 \in C$，有

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

Euler公式

对实数θ，按定义

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \theta^n}{n!}$$

上式右边n为偶数的项是实数项，n为奇数的项是虚数项。分离实虚部即得：

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

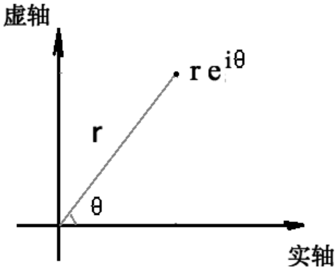
实部和虚部恰好分别是三角函数$\cos\theta$和$\sin\theta$的级数展开式，于是

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

这就是著名的欧拉公式。

复数的指数表示和复数的乘法规则

模为r，幅角为θ的复数可以写成$re^{i\theta}$。



对两个复数$r_1 e^{i\theta_1}$和$r_2 e^{i\theta_2}$，利用刚刚证明的$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$，就有

$$\left(r_1 e^{i\theta_1}\right)\left(r_2 e^{i\theta_2}\right) = (r_1 r_2)\left(e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}\right) = (r_1 r_2)e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

这就是模相乘，幅角相加的复数乘法法则。

思考题

我们采用从零开始"C语言"计数习惯，定义一个$N \times N$的方阵E的第m行第n列(m, n遍历$0, 1, \ldots, N-1$)元素为

$$E_{mn} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-\frac{2\pi mni}{N}}$$

证明E是个酉矩阵。

对数函数 $\ln z$ 是多值函数

设z的模为r，幅角为θ，则

$$e^{\ln r + i\theta} = re^{i\theta} = z$$

那么，是否可以定义推广的对数函数:

$$\ln z := \ln |z| + i \arg z$$

（$|\cdot|$表示取模，arg表示取幅角）
不幸地是，因为$\arg z$可以随意加上2π的整数倍，所以上式是一对多的映射，不是普通意义上的函数。在复变函数论里把这样的映射称为**“多值函数”**。

$\ln z$的多值性直接导致了柯西积分公式、留数定理等。我们稍后就会接触到。

又高又瘦的δ函数

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x)\, dx = f(x_0)$$

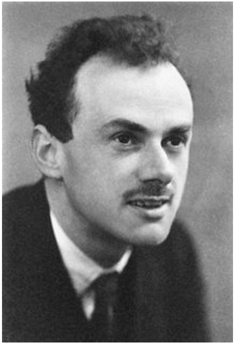
物理里的理想化模型

物理里有很多“无穷大×无穷小 = 有限“的模型:

- 瞬时冲量: 力无限大，作用时间无穷短，但两者的乘积（冲量）是有限的。
- 质点: 质量密度无穷大，体积无穷小，但两者的乘积（总质量）是有限的。
- 点电荷: 电荷密度无穷大，体积无穷小，但两者的乘积（总电荷）是有限的。

在数学上这些表述都是不合法的，需要搞很多事情才能把这些模型说清楚。不喜欢搞事情的物理学家们于是发明了δ函数。

重量级dalao —— Paul Dirac （狄拉克）



你们不要搞事情

Dirac δ function

Dirac δ function 不是传统意义上的函数。它可以通过下面的单位脉冲函数取脉冲时间为零的极限得到：

$$\delta_D(x) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon}, & \text{if } -\frac{\epsilon}{2} < x < \frac{\epsilon}{2} \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

其中$\epsilon \to 0^+$。

在本课程中，我们简称Dirac δ function为δ函数，并简写为$\delta(x)$。

δ函数的另一种逼近方式

有时候需要计算δ函数的导数甚至高阶导数，这时可以考虑用高斯函数逼近方式:

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} e^{-\frac{x^2}{2\epsilon}},$$

其中$\epsilon \to 0^+$。

δ函数的抽象定义

借助上述两种逼近方式的辅助，我们归纳出δ函数的下述抽象定义：

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \neq 0; \\ +\infty, & \text{if } x = 0; \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1.$$

从上述抽象定义中可以看出δ函数是偶函数：

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

此外，积分的范围可以限定在0的任意小领域。

$$\int_{0^-}^{0^+} \delta(x)\, dx = 1.$$

δ函数最重要的性质

从被使用频率上来讲，下式至关重要:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x)\, dx = f(x_0).}$$

（请自行用物理图像理解上式）

n维空间的δ函数

n维δ函数标记为$\delta^{(n)}(\mathbf{x})$，既可以理解为

$$\delta^{(n)}(\mathbf{x}) = \delta(x_1)\delta(x_2)\ldots\delta(x_n)$$

（其中$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是$\mathbf{x}$的坐标分量），
也可以直接抽象地理解为在原点附近体积为$\epsilon \to 0^+$的邻域内，函数值为$\frac{1}{\epsilon} \to \infty$，而在其余位置函数值均为零的函数。

三维空间某点$\mathbf{x}'$处的点电荷的电荷密度可以写成

$$\rho(\mathbf{x}) = Q\,\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

n维空间的δ函数的性质

和一维空间类似，

$$\boxed{\int \delta^{(n)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)f(\mathbf{x})\,d^n\mathbf{x} = f(\mathbf{x}_0)}$$

这里的$\int d^n\mathbf{x}$是n重积分$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n$的简写，物理文献中经常碰到这种写法。

思考题

原点处的静电势可以用积分

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|} d^3\mathbf{x},$$

来计算。

由此计算在$\mathbf{x}_0$处点电荷Q在原点产生的电势。

傅立叶变换

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx$$

一维傅立叶变换的定义

傅立叶变换把“x空间”的函数$f(x)$变换到“k空间”的函数：

$$\tilde{f}(k) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx$$

- 注意x和k都是实参量；但$f(x)$和$\tilde{f}(k)$的取值可以为复数。
- 在实际物理问题中，x空间和k空间（也叫傅立叶空间）往往对应明确的物理空间。例如在量子力学中，x空间对应坐标空间，k空间对应动量空间；在频谱分析中，x空间对应时间轴，k空间对应频率空间。
- 注意在有些文献中没有$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$这个因子，很多公式的系数会有所区别。

思考题

设$f(x)$在区间$[-1,1]$上取值为1，其余处处为零。计算$f(x)$的傅立叶变换。

傅立叶变换的逆变换

请阅读附录B理解傅立叶变换本质上是一个酉变换（复向量的旋转）。
附录B的离散傅立叶变换的逆变换过渡到连续情况就是：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \widetilde{f}(k) dk$$

n维空间的傅立叶变换

n维空间的函数$f(\mathbf{x})$的傅立叶变换就是对每个维度都进行一维傅立叶变换：

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^n\mathbf{x}$$

这里的$\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} = k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_nx_n$.
显然，其逆变换为

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^n\mathbf{k}.$$

$\delta(x)$的积分表示

通过把$\delta(x)$傅立叶变换再求逆变换，可以得到：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}dk = \delta(x).$$

这个结论连续运用n次，可以把结果推广到n维空间：

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d^n\mathbf{k} = \delta^{(n)}(\mathbf{x})$$

在大量的物理问题中会用到它。

傅立叶变换保内积不变

设$f(x)$, $g(x)$的傅立叶变换分别为$\widetilde{f}(k)$和$\widetilde{g}(k)$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{\dagger}(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}^{\dagger}(k)\widetilde{g}(k)dk$$

证明：由于傅立叶变换是酉变换（见附录B），所以保内积不变。

思考题

计算积分

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx.$$

Homework

- 仿照复数域上指数函数e^z的定义方法，用全复平面收敛的幂级数把正弦和余弦函数推广到复数域：

$$\sin z \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad \cos z \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

  (1) 用指数函数来表示正弦和余弦函数；
  (2) 求出满足$\sin z = 0$的全部复数解z。
- 课堂上用傅立叶变换的逆变换证明了δ函数的积分表示，请反过来用δ函数的积分表示证明傅立叶变换的逆变换。
- 用δ函数的积分表示证明傅立叶变换的保内积性。
- 计算积分

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

附录A

"指数函数是指数函数" 的证明

$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$的证明

按照e^z的定义，命题等价于

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = \sum_{n_1,n_2\geq 0}\frac{z_1^{n_1}z_2^{n_2}}{n_1!n_2!}$$

对任意$n_1, n_2 \geq 0$，我们来比较两边$z_1^{n_1}z_2^{n_2}$的项的系数：
左边$z_1^{n_1}z_2^{n_2}$的项只能来自于$n = n_1 + n_2$的项的展开，在展开$(z_1+z_2)^n$时在n_1个括号内取z_1，n_2个括号内取z_2，总共有$\frac{n!}{n_1!n_2!}$种取法，即左边$z_1^{n_1}z_2^{n_2}$的系数为

$$\frac{1}{n!}\frac{n!}{n_1!n_2!} = \frac{1}{n_1!n_2!}$$

和右边相同。

附录B

傅立叶变换的本质是复向量的旋转

一维有限格点世界

$\delta(x-x_0)$函数在x_0处的取值是∞，这件事多多少少有点让人不爽。有没有更好的描述δ函数的办法呢?
具体的物理问题总是局限在有限的范围内，对位置的测量精度也总是有限的。因此我们假想x在一根长度为L（L非常非常大）的线段上，且x的位置的测量精度为$dx = L/N$（这里我们稍稍改变了dx的含义，把它看成一个很小很小，但是有限的长度）。x的取值局限为$x_0 = 0, x_1 = dx, x_2 = 2dx, \ldots, x_{N-1} = (N-1)dx$中的一个。
函数$f(x)$退化为一个N维空间矢量

$$\mathbf{f} = \left(f(x_0)\sqrt{dx}, f(x_1)\sqrt{dx}, \ldots, f(x_{N-1})\sqrt{dx}\right).$$

这里的$\sqrt{dx}$的因子看起来有些奇怪，其实去掉也无妨，留着它的好处是可以把很多函数的术语和线性代数的术语统一起来。

积分的离散化形式

在有限格点空间里，积分也被离散化了：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \to \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)dx = \sqrt{dx}\sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{f}_i$$

内积

两个函数$f(x)$, $g(x)$的内积就可以和矢量内积统一起来：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^\dagger(x)g(x)dx \to \sum_{i=0}^{N-1} f^\dagger(x_i)g(x_i)dx = \mathbf{f}^\dagger\mathbf{g}.$$

注意我们把dx拆成两个$\sqrt{dx}$并分别吸收到矢量$\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$的定义中去了。

δ函数

在任意一点x_i处的δ脉冲也变得非常简明:

$$\delta(x - x_i) = \begin{cases} \frac{1}{dx}, & \text{if } x = x_i \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

至少，在我们的游戏规则里$\frac{1}{dx}$是有限的数!

旋转

还记得我们讨论过一个$N \times N$的酉矩阵E吗?

$$E_{mn} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-\frac{2\pi mni}{N}}$$

用这个酉矩阵把函数（向量）**f**旋转一下会发生什么呢?

$$\widetilde{\mathbf{f}} \equiv E\mathbf{f}$$

的第m个分量是:

$$\widetilde{\mathbf{f}}_m = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-\frac{2\pi mni}{N}} f(x_n)\sqrt{dx}.$$

对偶空间

把$\widetilde{\mathbf{f}}_m$看成一个和原空间互为对偶的有限格点空间里的函数（矢量）；为了区别于原来的有限格点空间，我们用k来表示这个对偶空间里的坐标。这两个空间的格点数N是相同的，而且满足$dk\,dx = \frac{2\pi}{N}$ (怎么看着有点像量子力学的不确定性原理）。
（如果你熟悉傅立叶分析，也许你更喜欢把它写成$dk = \frac{2\pi}{N\,dx} = \frac{2\pi}{L}$.）

在k空间里我们关注的格点为$k_0 = 0$, $k_1 = dk = \frac{2\pi}{N\,dx}$, $k_2 = 2dk = \frac{4\pi}{N\,dx}$, $\ldots$
容易验证$\frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{\sqrt{dk\,dx}}{\sqrt{2\pi}}$， $\frac{2\pi mn}{N} = k_m x_n$， 于是

$$\widetilde{\mathbf{f}}_m = \sqrt{dk}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{i=0}^{N-1} e^{-ik_m x_n} f(x_n)dx\right)$$

离散傅立叶变换和逆变换

也就是说，矢量$\tilde{\mathbf{f}}$对应于k空间的函数：

$$\tilde{f}(k_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i=0}^{N-1} e^{-ik_m x_n} f(x_n) dx.$$

利用$E^\dagger E = I$，很容易反过来得到$\mathbf{f} = E^\dagger \tilde{\mathbf{f}}$。经过几乎是一模一样的推理（除了把$-i$换成了$i$），得到：

$$f(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i=0}^{N-1} e^{ik_m x_n} \tilde{f}(k_m) dk.$$

上面的$f \to \tilde{f}$的操作就是离散傅立叶变换；反过来的操作就是离散傅立叶逆变换。它们的本质是对复向量的一种旋转和相应的逆旋转。