附录：广义相对论公式表

- Cristoffel联络：
$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(g_{\mu\rho,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho} \right) \tag{1}$$

- 协变微商公式：
$$\left(T^{\mu_1\mu_2\ldots}{}_{\nu_1\nu_2\ldots} \right)_{;\lambda} = \left(T^{\mu_1\mu_2\ldots}{}_{\nu_1\nu_2\ldots} \right)_{,\lambda} + \Gamma^{\mu_1}_{\rho\lambda} T^{\rho\mu_2\ldots}{}_{\nu_1\nu_2\ldots} + \Gamma^{\mu_2}_{\rho\lambda} T^{\mu_1\rho\ldots}{}_{\nu_1\nu_2\ldots} + \ldots - \Gamma^{\rho}_{\nu_1\lambda} T^{\mu_1\mu_2\ldots}{}_{\rho\nu_2\ldots} - \Gamma^{\rho}_{\nu_2\lambda} T^{\mu_1\mu_2\ldots}{}_{\nu_1\rho\ldots} - \ldots \tag{2}$$

- 黎曼张量：
$$R^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta} \equiv \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\alpha,\beta} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\beta,\alpha} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\alpha}\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\beta} - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\beta}\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\alpha} \tag{3}$$
Ricci张量定义为 $R_{\mu\nu} \equiv R^{\lambda}{}_{\mu\nu\lambda}$.

- 测地线方程
$$\frac{d^2 x^{\lambda}}{ds^2} + \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} = 0 \tag{4}$$

- 爱因斯坦方程：
$$G^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu} \tag{5}$$
这里的爱因斯坦张量$G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu}$

- 理想流体能量动量张量；
$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) u^{\mu} u^{\nu} - p g^{\mu\nu} \tag{6}$$

- 史瓦西度规：
$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) d\tau^2 - \frac{1}{1 - \frac{2GM}{r}} dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \right) \tag{7}$$

- 引力波四极矩辐射公式：
$$\frac{dP}{d\Omega} \approx \frac{G\omega^6}{4\pi} Q^*_{ij} Q_{kl} \mathcal{P}^{ijkl}(\mathbf{n}) \tag{8}$$

- FRW度规
$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right) \tag{9}$$

- Friedmann方程：
$$\frac{k + \dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho \tag{10}$$
$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) \tag{11}$$

- ΛCDM宇宙学：定义 $\Omega_X = \frac{8\pi G \rho_{X0}}{3H_0^2}$ (即红移为零处X成分的密度和 $\frac{3H_0^2}{8\pi G}$ 之比)；对空间曲率，则定义 $\Omega_k \equiv -\frac{k}{a_0^2 H_0^2}$，这样有
$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_m (1+z)^3 + \Omega_k (1+z)^2 + \Omega_r (1+z)^4} \tag{12}$$
这里的 Λ, m, r 分别对应宇宙学常数，冷物质 和辐射形式能量。