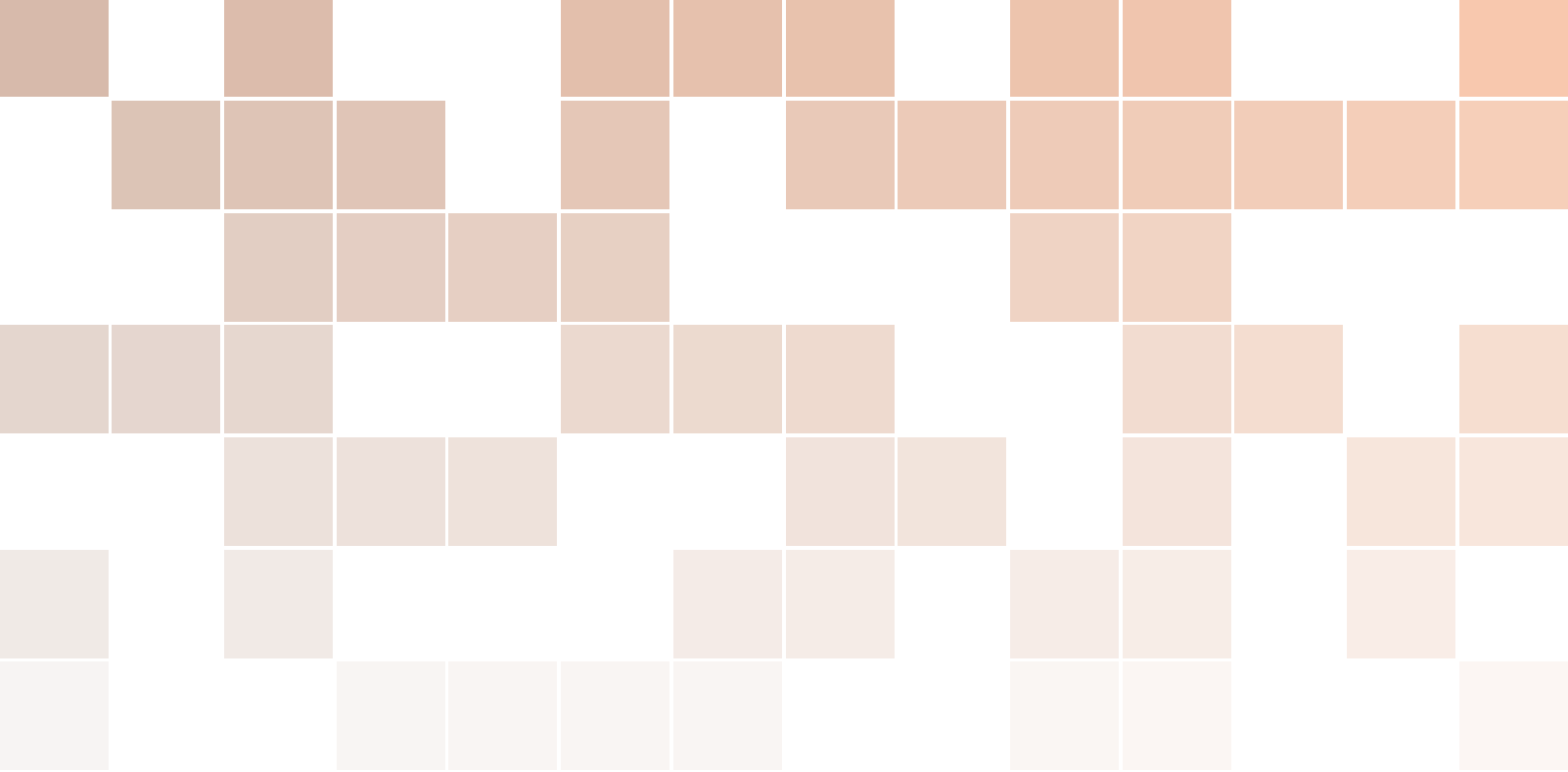
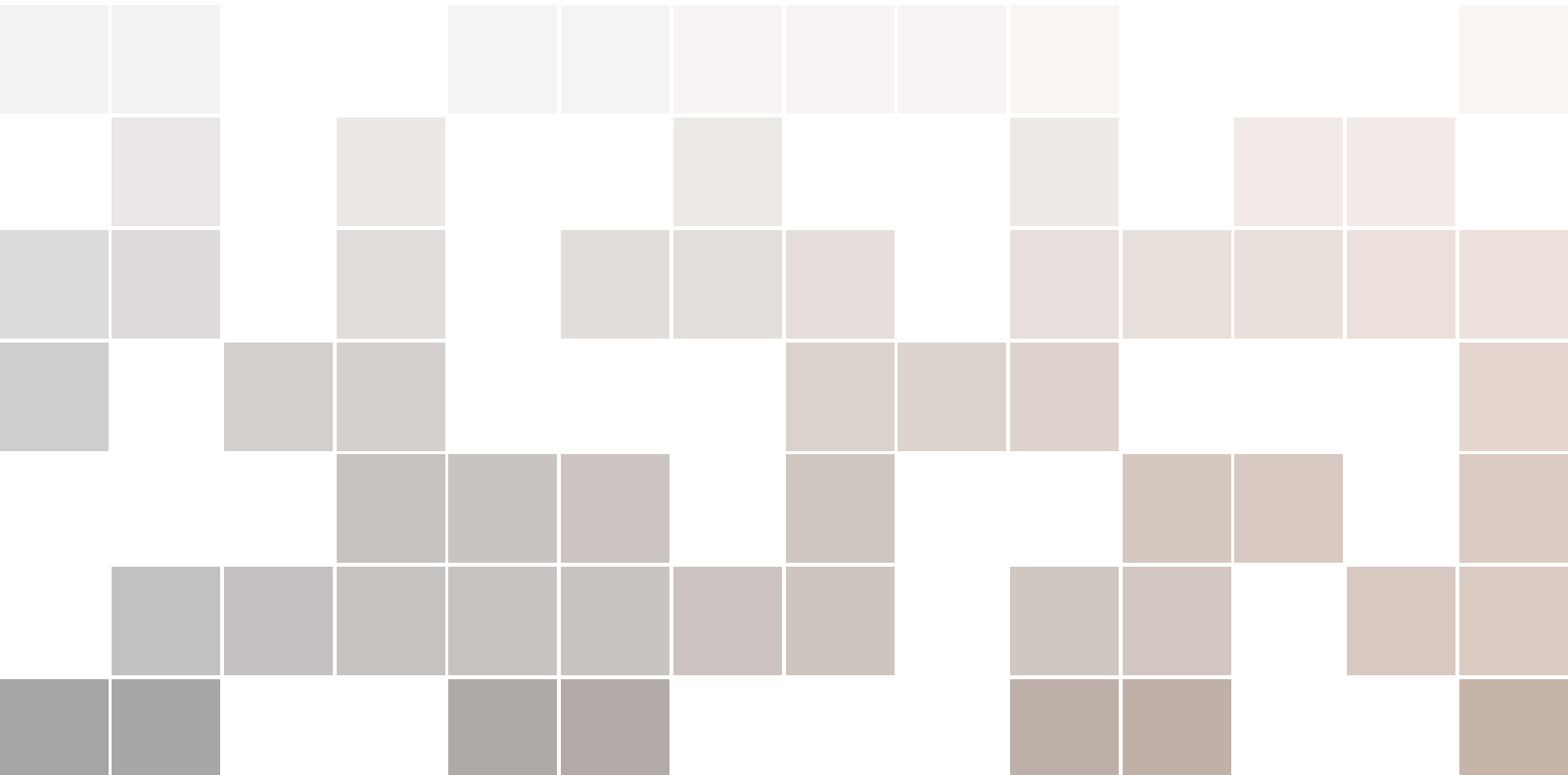




幼儿园版广义相对论

Kindergarten General Relativity

黄志琦著



First printing, Oct 2026

Contents

1	标架和张量	9
1.1	狭义相对论	9
1.2	标架、度规和逆标架	11
1.3	张量	13
1.4	构造新张量的方法	14
1.4.1	张量的指标重排序	14
1.4.2	张量积	14
1.4.3	张量指标的缩并	15
1.5	课后练习	15
2	测地线方程	17
2.1	坐标系和自然标架	17
2.2	张量分量的坐标系变换	18
2.3	张量场的梯度	19
2.3.1	联络	19
2.3.2	局域惯性系	21
2.3.3	矢量的“平行”移动	21
2.3.4	张量的协变导数	22

2.3.5	沿着参数化曲线的协变导数	24
2.4	测地线方程	25
2.5	广义相对论中的粒子测地线方程	26
2.6	课后练习	28
3	黎曼张量	29
3.1	矢量“移动一圈”	29
3.2	比安基 (Bianchi) 代数恒等式	31
3.2.1	黎曼张量的独立分量个数	32
3.3	比安基 (Bianchi) 微分恒等式	33
3.4	黎曼张量的缩并 (里奇张量和黎曼曲率)	34
3.5	矢量场的二次协变导数的不可交换性	35
3.6	测地线偏离方程	36
3.7	课后练习	37
4	引力场方程	39
4.1	矩阵理论的回顾	39
4.1.1	共轭转置	39
4.1.2	矩阵的迹	41
4.1.3	对角矩阵的矩阵函数	41
4.1.4	实对称矩阵的矩阵函数	43
4.1.5	行列式的绝对值	45
4.2	物理体积元	46
4.2.1	弯曲空间的高斯定理	46
4.3	在度规扰动下张量的变化	47
4.3.1	关于 $\delta g_{\mu\nu}$ 是不是张量的理解	47
4.3.2	其他张量在度规扰动下的变化	48
4.3.3	响应张量	49
4.4	作用量和爱因斯坦方程	51
4.5	作用量和度规的符号问题	52
4.6	弯曲空间的“平移对称性”和守恒方程	54
4.7	课后练习	56

5	低速弱场近似	57
5.1	进入现实世界后的一些符号约定	57
5.2	简单物理对象的能量动量张量	58
5.3	等效原理	61
5.4	牛顿规范	62
5.5	确定作用量中待定参数	63
5.6	引力场中的光线偏折	64
5.7	课后练习	65
6	广义相对论的球对称解	67
6.1	球对称的度规	67
6.1.1	计算联络	68
6.1.2	计算里奇张量	69
6.2	伯克霍夫定理和史瓦西度规	71
6.3	水星近日点进动	72
6.4	课后练习	73
7	观测理论	75
7.1	观测标架的定义	75
7.2	观测标架的应用	77
7.3	观测者参考系的深入理解	80
7.3.1	观测者参考系和局域惯性系的差别	80
7.3.2	狭义相对论和广义相对论中的“上帝视角叙事”	80
7.4	课后练习	80
8	黑洞	81
8.1	白矮星、中子星和黑洞	81
8.1.1	钱德拉塞卡的故事	81
8.1.2	估算钱德拉塞卡极限	82
8.1.3	中子星和黑洞	84
8.2	史瓦西黑洞	84
8.2.1	一场说走就走的旅行	86

8.2.2	r 函数	90
8.2.3	Kruskal 坐标系	92
8.2.4	纯数学模型：白洞和另一个宇宙	96
8.3	课后练习	97
9	引力波	99
9.1	平面传播引力波 (pp-wave)	99
9.1.1	pp-wave 的度规	99
9.1.2	pp-wave 势函数	101
9.1.3	引力波测地线偏离方程	102
9.1.4	引力子的“自旋”	103
9.1.5	弱场近似下测试粒子的周期性偏移	104
9.2	弱场近似下的引力辐射	106
9.2.1	横向无迹规范	106
9.2.2	洛伦兹规范下的引力辐射公式	107
9.2.3	引力波的“能量密度”	109
9.2.4	周期性源的引力辐射	111
9.2.5	空空投影算符	112
9.2.6	低速近似下的四极矩引力辐射	113
9.2.7	更一般情形的讨论	117
9.3	课后练习	118
10	宇宙学	119
10.1	FLRW 度规	120
10.1.1	共动坐标、尺度因子和宇宙学红移	121
10.1.2	空间曲率参数	123
10.2	Friedmann 方程	124
10.3	课后练习	126
11	附录	127
11.1	重要公式表	127
11.2	后记	128
	Bibliography	129

序

谁还不是个宝宝呢？

1. 标架和张量

1.1 狭义相对论

即使忽略引力，我们所在的“平直”四维时空并不是一个欧几里德 (Euclid) 空间，因为“时间”这个维度和空间维度有明显的不同。狭义相对论的给出的“平直时空”坐标系 (t, x, y, z) （其中 t 为时间， x, y, z 为三维直角坐标）对应的度规（邻近点之间的距离平方和坐标差的关系）为

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (1.1)$$

通常采用 $c = 1$ 的自然单位制（可以理解为我们把 ct 简单记作了 t ）。这样

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (1.2)$$

这和我们在小班学过的欧几里德空间中的勾股定理有所不同： dt^2 前面的符号是负的。

如果惯性参考系 K' （坐标 (t', x', y', z') ）相对于惯性参考系 K （坐标 (t, x, y, z) ）以速度 $(\beta, 0, 0)$ 运动，且两个坐标系的坐标轴均对齐，在 $t = t' = 0$ 时刻两坐标系原点重合。那么有如下的洛伦兹变换公式：

$$t' = \frac{t - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (1.3)$$

$$x' = \frac{x - \beta t}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (1.4)$$

$$y' = y, \quad (1.5)$$

$$z' = z. \quad (1.6)$$

其反变换为

$$t = \frac{t' + \beta x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (1.7)$$

$$x = \frac{x' + \beta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (1.8)$$

$$y = y', \quad (1.9)$$

$$z = z'. \quad (1.10)$$

例题 1: 假设某种机器人的使用寿命为 $\tau = 100$ 年。让机器人乘坐宇宙飞船去探索 $L = 1000$ 光年外的行星，飞船的速率 v 至少需要多大？

解答： 在地球参考系，机器人到达行星事件坐标为 $t = L/v$, $x = L$ 。在机器人参考系

$$t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{L}{v} \sqrt{1 - v^2}$$

令 $t' = 100$ 年，即可算出 v 的下限为 $\frac{10}{\sqrt{101}}$ 。

例题 2: 孪生兄弟张三和李四同时出生，在他们 20 岁的时候，张三乘坐宇宙飞船以大小为 $v_0 = \frac{3}{5}$ 的初始速度从地球出发，李四则留在地球上生活。张三的宇宙飞船在地球参考系中做匀加速直线运动（加速度方向指向地球）。在李四 80 岁时，张三回到了地球，这时张三多少岁？

解答： 容易看出在地球参考系中，张三的速度为 $v(t) = \frac{3}{5} - at$ ，这里的 $a = \frac{1}{60\text{yr}} \frac{6}{5} = \frac{1}{50\text{yr}}$ 。张三在每段短暂的时间间隔内都可以看成一个近似的惯性系 K' , $dx' = 0$ ，于是根据四维间隔不变性 $-(dt')^2 = -dt^2 + dx^2$ ，以及 $dx = v(t)dt$ ，有 $dt' = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5} - at\right)^2} dt$ 。积分得到

$$t' = \int_0^{6/(5a)} \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5} - at\right)^2} dt = \frac{1}{a} \int_{-3/5}^{3/5} \sqrt{1 - u^2} du = \frac{1}{a} \left(\frac{12}{25} + \arcsin \frac{3}{5} \right) = \left(24 + 50 \arcsin \frac{3}{5} \right) \text{ yr.}$$

于是张三是 $44 + 50 \arcsin \frac{3}{5} \approx 76.175$ 岁。

要注意区分狭义相对论默认的“上帝视角”叙事方式（用坐标描述事件）和现实观测的差别：实际的观测者并不能随意地获得事件的坐标，而需要通过实测手段。请仔细体会下面这道例题中的“动钟变慢”效应和其他教科书上的“上帝视角”描述有何不同。

例题 3: 一个速度为 $v = \frac{5}{13}$ 的航天旅行者和他的地球上的朋友在出发时对好了钟的时刻为 $t' = 0$ (旅行者的时钟) 和 $t = 0$ (地球上的钟)。地球上的朋友同时观察两个钟, 直接观察 t , 用望远镜观察 t' 。当看到 t' 读数为 1h 时, 看到 t 的读数为多少 h?

解答: 旅行者时钟读数为 1h 的事件 A 在旅行者参考系的坐标为: $t'_A = 1\text{h}$, $x'_A = 0$ 。在地球坐标系

$$t_A = \frac{t'_A + vx'_A}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{13}{12}\text{h}.$$

$$x_A = \frac{x'_A + vt'_A}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{5}{12}\text{h}.$$

这里的 $t_A > t'_A$ 就是通常所说的狭义相对论“动钟变慢”效应, 然而对于题中所述的实际观测, 我们需要考虑这个事件以光信号的形式传播到地球, 被地球上的朋友观测到, 还需要 $x_A = \frac{5}{12}\text{h}$, 因此 $t = t_A + x_A = \frac{3}{2}\text{h}$ 。

1.2 标架、度规和逆标架

在比较形式的讨论中, 我们经常用度规矩阵 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ (即 $\eta_{00} = -1, \eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1$, 其余元素均为零) 来描述狭义相对论的闵可夫斯基(Minkowski)时空。时空的任意点用四维坐标 x^0, x^1, x^2, x^3 来描述 (注意这里的上标只是个指标, 并不代表次幂), 指标 0 代表时间维度, 指标 1, 2, 3 代表空间维度。邻近点的时空距离可以写作:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.11)$$

在上面的写法中, 我们使用了爱因斯坦求和规则: 默认对一上一下重复的希腊字母指标对空间所有维度指标 (在狭义相对论里, 就是从 0 到 3) 求和。 $\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ 实际上代表 $\sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ 。爱因斯坦求和规则的写法将贯穿本书。

狭义相对论的惯性系可以用标架 (一组基矢) $\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 来描述, 它们之间的内积满足: $\vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu = \eta_{\mu\nu}$ (注意这意味着时间基矢满足 $\vec{e}_0 \cdot \vec{e}_0 = -1$)。由于惯性系的“平直性”, 在任何点的四维矢量 $\vec{A}$ 都可以用这个固定的标架线性组合出来, 写成 $A^\mu \vec{e}_\mu$ (这里的 A^μ 的上标 μ 也只是个指标, 不代表次幂; 注意这里对 μ 指标进行了默认求和) 的形式。但是在我们将讨论的更一般理论 (广义相对论) 中, 一般不存在这样的“普适”标架, 每个时空点的标架可以不同。因此每个矢量都是定义在一个时空点上的, 它可以分解为这个时空点的标架的线性组合。

在非欧氏空间, 我们要区分矢量“按标架分解的系数”和“在标架上的投影”——两者一般来说是不同的, 前者指把矢量 $\vec{A}$ 写成 $A^\mu \vec{e}_\mu$ 的形式, 后者指把矢量 $\vec{A}$

和各个基矢取内积 $A_\mu \equiv \vec{A} \cdot \vec{e}_\mu$ 。我们把“在标架上的投影” A_μ 称为“协变分量”，而把“按标架分解的系数” A^μ 称为“逆变分量”。这个“逆”字涉及到我们实际上如何计算 A^μ ：我们将构造一组“逆标架” $\vec{e}^0, \vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3$ ，使得**矢量在逆标架上的投影就等于它按标架分解的系数**，即 $A^\mu = \vec{A} \cdot \vec{e}^\mu$ 。对狭义相对论时空而言，很容易发现只要取 $\vec{e}^0 = -\vec{e}_0, \vec{e}^1 = \vec{e}_1, \vec{e}^2 = \vec{e}_2, \vec{e}^3 = \vec{e}_3$ 就能满足要求。不过，我们要稍微深入讨论下对任意标架该怎样获得逆标架——这将是讨论广义相对论的关键步骤。

假设（未必是平直的） m 维空间的每个点都有一组标架 $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \dots, \vec{n}_m$ ，满足 $\vec{n}_\mu \cdot \vec{n}_\nu = g_{\mu\nu}$ （这里我们要求内积满足交换律，即度规矩阵 $g_{\mu\nu}$ 为对称矩阵）。如果存在一组完备的“逆标架” $\vec{N}^1, \vec{N}^2, \dots, \vec{N}^m$ 使得 $\vec{n}_\mu \cdot \vec{N}^\nu = \delta_\mu^\nu$ ，这里克罗内克 (Kronecker) 符号 δ_μ^ν 即当且仅当 $\mu = \nu$ 时取值为 1，否则取值为零，我们就可以证明 $A_\mu \vec{N}^\mu$ 和 $A^\mu \vec{n}_\mu$ 都和 $\vec{A}$ 相等（这里 $A_\mu \equiv \vec{A} \cdot \vec{n}_\mu, A^\mu \equiv \vec{A} \cdot \vec{N}^\mu$ ）。事实上，对任意指标 ν ，有

$$(A_\mu \vec{N}^\mu) \cdot \vec{n}_\nu = A_\mu \delta_\nu^\mu = A_\nu = \vec{A} \cdot \vec{n}_\nu,$$

根据 $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \dots, \vec{n}_m$ 的完备性即可知道 $A_\mu \vec{N}^\mu = \vec{A}$ 。

$$(A^\mu \vec{n}_\mu) \cdot \vec{N}^\nu = A^\mu \delta_\mu^\nu = A^\nu = \vec{A} \cdot \vec{N}^\nu.$$

根据 $\vec{N}^1, \vec{N}^2, \dots, \vec{N}^m$ 的完备性即可知道 $A^\mu \vec{n}_\mu = \vec{A}$ 。

那么问题就归结为寻找满足 $\vec{n}_\mu \cdot \vec{N}^\nu = \delta_\mu^\nu$ 的 $\vec{N}^1, \vec{N}^2, \dots, \vec{N}^m$ 。我们只需要把 $g_{\mu\nu}$ 看成一个 $m \times m$ 的矩阵并求逆，把逆矩阵记作 $M^{\mu\nu}$ （这里我们把“逆”矩阵的指标放到了上边，是为了更方便地使用爱因斯坦规则）。那么容易验证 $\vec{N}^\nu \equiv M^{\nu\alpha} \vec{n}_\alpha$ 满足要求。实际上对任意指标 μ ，有

$$(M^{\nu\alpha} \vec{n}_\alpha) \cdot \vec{n}_\mu = M^{\nu\alpha} g_{\alpha\mu} = \delta_\mu^\nu.$$

我们后面会做一件现在看上去还比较奇怪的事情：把 $g_{\mu\nu}$ 的逆矩阵 M 也换成用 g 来表示，通过它的指标在上边，我们可以判断 $g^{\mu\nu}$ 代表的是逆矩阵的元素。我们把 $g^{\mu\nu}$ 叫作度规的“逆变形式”——它和度规的“协变形式” $g_{\mu\nu}$ 都是物理量“度规”的不同数学表述形式。

总结一下：我们通过计算逆标架的流程如下：

- (1) 计算标架的内积获得度规矩阵 $g_{\mu\nu} = \vec{n}_\mu \cdot \vec{n}_\nu$ 。
- (2) 把度规矩阵求逆获得度规的逆变形式 $g^{\mu\nu}$ 。
- (3) 用度规的逆变形式对标架进行线性组合获得“逆标架”： $\vec{N}^\mu = g^{\mu\nu} \vec{n}_\nu$ 。

标架和逆标架的地位是完全对称的，容易验证标架也可以用逆标架表示出来： $\vec{n}_\mu = g_{\mu\nu} \vec{N}^\nu$ 。矢量按照标架分解的系数是矢量在逆标架上的投影；矢量按照逆标架分解的系数是矢量在标架上的投影。

1.3 张量

k 阶张量 A 是这样的“机器”：它依次“吃”进 k 个矢量 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ ，“吐”出一个实数 $A(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$ 。这个吐出的实数线性地依赖于每一个“吃”进去的矢量。也就是说对任意指标 $1 \leq i \leq k$ 以及实数 a, b ，都有

$$A(\dots, a\vec{v}_i + b\vec{u}_i, \dots) = aA(\dots, \vec{v}_i, \dots) + bA(\dots, \vec{u}_i, \dots). \quad (1.12)$$

从一般的时空理论考虑，每个张量必须“居住”在时空点上——它的“食谱”也仅限于这个时空点的矢量。

如果在时空每个点都放置一个 k 阶张量，我们就称之为 k 阶张量场。

标量不需要“吃”进矢量，直接就“吐”出一个实数，所以标量就是零阶张量。

矢量 $\vec{A}$ “吃”进任意矢量 $\vec{B}$ 后，可以吐出一个实数 $\vec{A} \cdot \vec{B}$ ，所以矢量就是一阶张量。

度规张量 g 是这样定义的：它吃进任意矢量 $\vec{A}, \vec{B}$ ，吐出实数 $g(\vec{A}, \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B}$ 。显然度规张量是二阶张量。

在一般的 m 维空间中，如果 k 阶张量 A 所居住的点建立了标架 $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \dots, \vec{n}_m$ （并用上一小节所述方法求出了逆标架），就可以用“协变分量”，“逆变分量”或者“混合分量”来表示 A 。协变分量 $A_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}$ 是指把 $\vec{n}_{\mu_1}, \vec{n}_{\mu_2}, \dots, \vec{n}_{\mu_k}$ 喂给 A 之后获得的实数，也就是说 $A_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}$ 是 $A(\vec{n}_{\mu_1}, \vec{n}_{\mu_2}, \dots, \vec{n}_{\mu_k})$ 的简写。逆变分量 $A^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}$ 则是 $A(\vec{N}^{\mu_1}, \vec{N}^{\mu_2}, \dots, \vec{N}^{\mu_k})$ 的简写。混合分量则是把标架基矢和逆标架基矢混合着喂给张量获得的实数。例如：二阶张量的混合分量 $A_\mu^\nu = A(\vec{n}_\mu, \vec{N}^\nu)$ ；四阶张量的混合分量 $A_\alpha^{\beta\mu}{}_\nu = A(\vec{n}_\alpha, \vec{N}^\beta, \vec{N}^\mu, \vec{n}_\nu)$ 。

利用标架和逆标架之间的转换关系： $\vec{N}^\mu = g^{\mu\nu} \vec{n}_\nu$ 和 $\vec{n}_\mu = g_{\mu\nu} \vec{N}^\nu$ ，容易把张量的分量的指标进行“升降”。例如，

$$A_\nu^\mu = A(\vec{N}^\mu, \vec{n}_\nu) = A(g^{\mu\alpha} \vec{n}_\alpha, \vec{n}_\nu) = g^{\mu\alpha} A_{\alpha\nu}.$$

$$A_{\mu\nu\rho} = A(\vec{n}_\mu, \vec{n}_\nu, \vec{n}_\rho) = A(g_{\mu\alpha} \vec{N}^\alpha, g_{\nu\beta} \vec{N}^\beta, g_{\rho\gamma} \vec{N}^\gamma) = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} g_{\rho\gamma} A^{\alpha\beta\gamma}.$$

熟练之后，就无须写中间过程。

最后，我们来研究一下度规张量的协变、逆变和混合分量。

按照定义， $g_{\mu\nu} = g(\vec{n}_\mu, \vec{n}_\nu) = \vec{n}_\mu \cdot \vec{n}_\nu$ ，这和一开始引入度规时的表达式一致。

把协变形式的度规矩阵 $g_{\mu\nu}$ 的逆矩阵记作 M ，则 $g^{\mu\nu} = \vec{N}^\mu \cdot \vec{N}^\nu = (M^{\mu\alpha} \vec{n}_\alpha) \cdot (M^{\nu\beta} \vec{n}_\beta) = M^{\mu\alpha} M^{\nu\beta} g_{\beta\alpha} = M^{\mu\alpha} \delta_\alpha^\nu = M^{\mu\nu}$ 。这验证了我们之前直接把 M 写成 g 的合法性。

最后，度规张量的混合形式 $g_\mu^\nu = g(\vec{n}_\mu, \vec{N}^\nu) = \vec{n}_\mu \cdot \vec{N}^\nu = \delta_\mu^\nu$ ，以及 $g^\mu_\nu = g(\vec{N}^\mu, \vec{n}_\nu) = \vec{N}^\mu \cdot \vec{n}_\nu = \delta_\nu^\mu$ 。就是说，度规张量的混合形式等价于克罗内克符号。

1.4 构造新张量的方法

1.4.1 张量的指标重排序

设 A 为 k 阶张量, 对 $1, 2, \dots, k$ 的任意一个排列 $P = (i_1, i_2, \dots, i_k)$, 都可以定义一个张量

$$AP(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k) \equiv A(\vec{v}_{i_1}, \vec{v}_{i_2}, \dots, \vec{v}_{i_k}).$$

这相当于把 A 的输入端重新排了一下次序。

定义偶排列 ($1, 2, \dots, k$ 经过偶数次置换得到的排列) P 的取值为 $\sigma(P) = 1$, 奇排列 P 的取值为 $\sigma(P) = -1$, 可以构造完全反对称张量 (指交换任意两个输入矢量, 都会使得输出的实数反号):

$$[A] = \sum_P \sigma(P) AP. \quad (1.13)$$

例如, 二阶张量 A 经过反对称化之后为:

$$[A](\vec{v}_1, \vec{v}_2) = A(\vec{v}_1, \vec{v}_2) - A(\vec{v}_2, \vec{v}_1) \quad (1.14)$$

三阶张量 A 经过反对称化之后为

$$[A](\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = A(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) + A(\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_1) + A(\vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_2) - A(\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_2) - A(\vec{v}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_3) - A(\vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_1). \quad (1.15)$$

k 阶完全反对称张量也叫做 k -形式。

1.4.2 张量积

我们可以把一个 p 阶张量 A 和一个 q 阶张量 B “组合” 成一个 $p+q$ 阶张量: 当你依次输入 $p+q$ 个矢量时, 我把前 p 个依次喂给 A , 后 q 个依次喂给 B , 并把它们吐出来的实数相乘, 就得到一个输出实数。这样的“组装机”我们称之为张量 A 和张量 B 的“张量积”¹, 记作 $A \otimes B$ 。

如果建立了标架 $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \dots, \vec{n}_m$ 。我们可以用标架或者逆标架构造张量积, k 阶张量 A 可以写成

$$A = A^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \vec{n}_{\mu_1} \otimes \vec{n}_{\mu_2} \otimes \dots \otimes \vec{n}_{\mu_k}. \quad (1.16)$$

或

$$A = A_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \vec{N}^{\mu_1} \otimes \vec{N}^{\mu_2} \otimes \dots \otimes \vec{N}^{\mu_k} \quad (1.17)$$

¹有的场合也叫“直积”, 但直积这个名字容易和线性空间的直积概念混淆。

所以高阶张量虽然不一定直接能写成一堆矢量的张量积，但它一定能写成这样的张量积的线性组合！所以我们可以把矢量当成构建张量世界的基本砖块。

等式 (1.16) 的证明如下：对任意一组空间维度指标 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ ，有

$$A^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} (\vec{n}_{\mu_1} \otimes \vec{n}_{\mu_2} \otimes \dots \otimes \vec{n}_{\mu_k}) (\vec{N}^{\alpha_1}, \vec{N}^{\alpha_2}, \dots, \vec{N}^{\alpha_k}) = A^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \delta_{\mu_1}^{\alpha_1} \delta_{\mu_2}^{\alpha_2} \dots \delta_{\mu_k}^{\alpha_k} = A^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}.$$

也就是说 (1.16) 两边作用于 $\vec{N}^{\alpha_1}, \vec{N}^{\alpha_2}, \dots, \vec{N}^{\alpha_k}$ 的结果相同。由逆标架的完备性即完成证明。

1.4.3 张量指标的缩并

我们来考虑怎样降低张量的阶数。设有 k 阶张量 A ，它有 k 个“输入端”。在建立了标架之后，我们可以给一个输入端投喂标架 $\vec{n}_\mu$ ，另一个输入端投喂逆标架 $\vec{N}^\mu$ ，并对 μ 按爱因斯坦求和规则进行求和。问题是：这样得到的是一个（和标架的选择无关的）张量吗？

假设有另一组标架 $\vec{n}'_1, \vec{n}'_2, \dots, \vec{n}'_m$ 以及逆标架 $\vec{N}'^1, \vec{N}'^2, \dots, \vec{N}'^m$ 。设标架之间的变换关系为 $\vec{n}'_\mu = T_\mu^\alpha \vec{n}_\alpha$ ， $\vec{N}'^\nu = S_\beta^\nu \vec{N}^\beta$ ，这里 T, S 均为 $m \times m$ 的常数矩阵。那么 $\delta_\mu^\nu = \vec{n}'_\mu \cdot \vec{N}'^\nu = T_\mu^\alpha S_\beta^\nu \delta_\alpha^\beta = T_\mu^\alpha S_\alpha^\nu$ 。于是 T 和 S 互为逆矩阵，也满足 $S_\mu^\alpha T_\alpha^\nu = \delta_\mu^\nu$ 。那么

$$\begin{aligned} A(\dots, \vec{N}'^\mu, \dots, \vec{n}'_\mu, \dots) &= A(\dots, S_\beta^\mu \vec{N}^\beta, \dots, T_\mu^\alpha \vec{n}_\alpha, \dots) \\ &= S_\beta^\mu T_\mu^\alpha A(\dots, \vec{N}^\beta, \dots, \vec{n}_\alpha, \dots) \\ &= \delta_\beta^\alpha A(\dots, \vec{N}^\beta, \dots, \vec{n}_\alpha, \dots) \\ &= A(\dots, \vec{N}^\alpha, \dots, \vec{n}_\alpha, \dots). \end{aligned} \quad (1.18)$$

另外，要注意缩并只和选定的两个输入端有关，和哪个指标输入端喂逆标架，哪个输入端喂标架没有关系。这是因为缩并可以写成下面的对称形式：

$$A(\dots, \vec{N}^\mu, \dots, \vec{n}_\mu, \dots) = g^{\nu\mu} A(\dots, \vec{n}_\nu, \dots, \vec{n}_\mu, \dots). \quad (1.19)$$

在建立了标架，张量用分量来表示的情况下，我们可以直接把张量的缩并用重复指标写出来。例如二阶张量 A 的缩并 A^μ_μ 为一个标量。三阶张量 B 的前两个指标缩并后的 $B^\mu_{\mu\nu}$ 为矢量。

1.5 课后练习

习题 1: 证明两个坐标分别为 (t_1, x_1, y_1, z_1) 和 (t_2, x_2, y_2, z_2) 的事件之间的距离平方 $\Delta s^2 \equiv -(t_1 - t_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$ 在洛伦兹变换下是不变量。

2. 测地线方程

2.1 坐标系和自然标架

在这一章里，我们将用坐标系来描述弯曲的空间。我们假想一个嵌入在 n 维平直空间（由固定的标架 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ 以及固定度规 $h_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ 描述）中的 m 维弯曲空间。弯曲空间可以嵌入在高维的平直空间（例如球面可以嵌入三维欧几里德空间）其实是个完全没有必要的假设（高斯首先发现了这一点），做这个假设只是为了照顾我们（或者其实只有我）可怜想象力。

在 n 维平直空间（后面我们称之为超空间）中，每个点可以用坐标 $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ 描述，对应的矢量 $\vec{x} = x^i \vec{e}_i$ （拉丁字母自动从 1 到 n 求和）。在我们的想象中，每个点对应的 $\vec{x}$ 是一个物理存在，和固定标架 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ 的选择无关。

在超空间中，两个邻近点之间的“距离平方”由矢量差的自内积给出：

$$ds^2 = h_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.1)$$

和之前的讨论一样，我们把度规 h_{ij} 看成一个 $n \times n$ 矩阵并计算它的逆矩阵，把逆矩阵元素记为 h^{ij} 。超空间中的逆标架 $\vec{e}^i = h^{ij} \vec{e}_j$ 。超空间中的每个点 $\vec{x}$ 也可以用它的协变分量 $x_i \equiv \vec{x} \cdot \vec{e}_i = x^j \vec{e}_j \cdot \vec{e}_i = h_{ij} x^j$ 来表示。

当然，超空间只是为了描述问题方便而引入的假想空间。现在我们回到“真实”的 m 维弯曲空间，为了更加形象我后面将称之为“曲面”。假设在曲面上建立了光滑的坐标系 $(u^1, u^2, \dots, u^m)$ 。我们可以结合超空间的概念和坐标系来建立标架：

$$\vec{n}_\mu = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^\mu}. \quad (2.2)$$

就是说 $\vec{n}_\mu$ 是沿着 u^μ 坐标线的切矢量。标架 (2.2) 称为坐标系 $(u^1, u^2, \dots, u^m)$ 的自然标架。

从超空间的角度看，自然标架张成的矢量空间代表了曲面的“切平面”——该点的张量都只“吃”切平面上的矢量。我们可以用上一章的方法构造出自然标架的逆标架 $\vec{N}^1, \vec{N}^2, \dots, \vec{N}^n$ 。逆标架只是标架的重新线性组合，所以张成的空间仍然是切平面。

曲面上的度规 $g_{\mu\nu} = \vec{n}_\mu \cdot \vec{n}_\nu$ 给出了曲面上邻近点的距离平方：

$$ds^2 = g_{\mu\nu} du^\mu du^\nu. \quad (2.3)$$

2.2 张量分量的坐标系变换

如果曲面上有另外一个坐标系 $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \dots, \tilde{u}^n)$ ，它的自然标架为

$$\vec{n}_\mu = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \tilde{u}^\mu} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^\nu} \frac{\partial u^\nu}{\partial \tilde{u}^\mu} = \frac{\partial u^\nu}{\partial \tilde{u}^\mu} \vec{n}_\nu. \quad (2.4)$$

利用 Jacobi 矩阵 $\frac{\partial u^\mu}{\partial \tilde{u}^\nu}$ 和 $\frac{\partial \tilde{u}^\mu}{\partial u^\nu}$ 互为逆矩阵，可以证明逆标架

$$\vec{N}^\mu = \frac{\partial \tilde{u}^\mu}{\partial u^\nu} \vec{N}^\nu. \quad (2.5)$$

事实上，按上式给出的 $\vec{N}^\mu$ ，

$$\vec{N}^\mu \cdot \vec{n}_\nu = \frac{\partial \tilde{u}^\mu}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^\beta}{\partial \tilde{u}^\nu} \vec{N}^\alpha \cdot \vec{n}_\beta = \frac{\partial \tilde{u}^\mu}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^\beta}{\partial \tilde{u}^\nu} \delta_\beta^\alpha = \frac{\partial \tilde{u}^\mu}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^\nu} = \delta_\nu^\mu. \quad (2.6)$$

满足逆标架的定义。

利用 (2.4) 和 (2.5) 可以把张量的任意形式分量在不同坐标系之间转换。例如

$$\tilde{A}^\mu_{\alpha\beta} = \frac{\partial \tilde{u}^\mu}{\partial u^{\mu'}} \frac{\partial u^{\alpha'}}{\partial \tilde{u}^\alpha} \frac{\partial u^{\beta'}}{\partial \tilde{u}^\beta} A^{\mu'}_{\alpha'\beta'} \quad (2.7)$$

请仔细体会上述混合分量的变换规则——它可以推广到任意阶张量的任意混合分量形式。

上述坐标变换规则的更重要应用是它的逆命题也成立：分量在坐标变换下满足上述变换规则的量是张量。事实上，很多教材把坐标变换规则作为张量的定义。

2.3 张量场的梯度

我们对一个固定点处的张量的研究到此告一段落。从现在开始，我们要考虑曲面上的张量场的梯度。

2.3.1 联络

要定义张量场的梯度，必须把邻近点的张量作一个比较。在超空间里，由于标架是固定的，不同点张量的比较非常容易，只要喂给它们相同的矢量，然后看它们输出的实数的差异就行了。但是，曲面上的张量“吃”的矢量只能在切平面里，而一般来说不同点的切平面（从超空间的视角看）不一样，根本就没法喂给它们相同的矢量！

因为“梯度”只比较邻近的点的张量，我们先来研究邻近点的切平面的变化，我们把自然标架的变化率分解为其自身的线性组合：

$$\frac{\partial \vec{n}_\mu}{\partial u^\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \vec{n}_\lambda. \quad (2.8)$$

上式中的“联络” (connection) $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ 作为“按标架分解的系数”，等价于被分解量在逆标架上的投影：

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv \vec{N}^\lambda \cdot \frac{\partial \vec{n}_\mu}{\partial u^\nu}. \quad (2.9)$$

因为 $\vec{N}^\lambda \cdot \vec{n}_\mu = \delta_\mu^\lambda$ 不依赖于坐标，所以上式也可以写成

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = -\vec{n}_\mu \cdot \frac{\partial \vec{N}^\lambda}{\partial u^\nu}. \quad (2.10)$$

上式又等价于

$$\frac{\partial \vec{N}^\lambda}{\partial u^\nu} = -\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \vec{N}^\mu. \quad (2.11)$$

也就是说：“逆标架的联络”和“标架的联络”相差一个符号。

有趣的是，我们可以直接对度规求导计算出联络。利用

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \vec{N}^{\lambda} \cdot \frac{\partial \vec{n}_{\mu}}{\partial u^{\nu}} = g^{\lambda\alpha} \vec{n}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{n}_{\mu}}{\partial u^{\nu}} = g^{\lambda\alpha} \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^{\alpha}} \cdot \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^{\nu} \partial u^{\mu}}. \quad (2.12)$$

以及

$$\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial u^{\nu}} = \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^{\mu} \partial u^{\nu}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^{\alpha}} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^{\mu}} \cdot \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^{\alpha} \partial u^{\nu}}, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial u^{\mu}} = \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^{\nu} \partial u^{\mu}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^{\alpha}} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^{\nu}} \cdot \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^{\alpha} \partial u^{\mu}}, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial u^{\alpha}} = \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^{\mu} \partial u^{\alpha}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^{\nu}} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^{\mu}} \cdot \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^{\alpha} \partial u^{\nu}}, \quad (2.15)$$

就可以得到

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial u^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial u^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial u^{\alpha}} \right). \quad (2.16)$$

上面这个由度规给出的联络叫作克利斯朵夫符号 (Cristoffel Symbols)。嗯，别问还有别的什么联络。幼儿园的宝宝们不宜知道得太多！

要注意的是：联络并不是张量。在坐标变化 $u \rightarrow \tilde{u}$ 下，

$$\tilde{N}^{\lambda} = \frac{\partial \tilde{u}^{\lambda}}{\partial u^{\lambda'}} \vec{N}^{\lambda'}. \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \tilde{n}_{\mu}}{\partial \tilde{u}^{\nu}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^{\nu}} \left(\frac{\partial u^{\mu'}}{\partial \tilde{u}^{\mu}} \vec{n}_{\mu'} \right) = \frac{\partial u^{\mu'}}{\partial \tilde{u}^{\mu}} \frac{\partial \vec{n}_{\mu'}}{\partial \tilde{u}^{\nu}} + \frac{\partial^2 u^{\mu'}}{\partial \tilde{u}^{\mu} \partial \tilde{u}^{\nu}} \vec{n}_{\mu'} = \frac{\partial u^{\mu'}}{\partial \tilde{u}^{\mu}} \frac{\partial u^{\nu'}}{\partial \tilde{u}^{\nu}} \frac{\partial \vec{n}_{\mu'}}{\partial u^{\nu'}} + \frac{\partial^2 u^{\mu'}}{\partial \tilde{u}^{\mu} \partial \tilde{u}^{\nu}} \vec{n}_{\mu'}. \quad (2.18)$$

取上面两式的点乘，得到

联络的坐标变换公式：

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial \tilde{u}^{\lambda}}{\partial u^{\lambda'}} \frac{\partial u^{\mu'}}{\partial \tilde{u}^{\mu}} \frac{\partial u^{\nu'}}{\partial \tilde{u}^{\nu}} \Gamma_{\mu'\nu'}^{\lambda'} + \frac{\partial \tilde{u}^{\lambda}}{\partial u^{\alpha}} \frac{\partial^2 u^{\alpha}}{\partial \tilde{u}^{\mu} \partial \tilde{u}^{\nu}}. \quad (2.19)$$

右边第一项按照张量的变换规则给出，第二项的存在说明联络不是张量。

2.3.2 局域惯性系

坐标系选取的任意性不代表我们可以在所有点随意地画坐标线（取自然标架），因为那样就会没法拼成一个连续光滑的坐标网格。不过，我们总是可以从一个固定点开始画坐标线。也就是说，我们可以在一个选定的点任意地取自然标架以及自然标架的变化率，然后其他点的标架和标架变化率需要满足一定的光滑性限制。这类似于微分方程的初条件可以随意选取。

那么，对任意选定的一个点 P ，能否让自然标架的局域变化率为零呢？从超空间的视角看，答案一般是否定的：从超空间的角度看，不同点的切平面不同，当从一个点开始移动时，自然标架也必须随之变化。不过，我们总是可以在该点让自然标架“最经济”地变化，即变化率是垂直于切平面的（一边移动一边不停地把标架“压”回到切平面上）。也就是说：所有的 $\frac{\partial \vec{n}_\mu}{\partial u^\nu}$ 都和 $\vec{N}^\lambda$ 正交，即在该点的联络的所有分量都是零。我们称这样建立的坐标系为 P 点的**局域惯性系**。从曲线上的蚂蚁的视角看，在 P 点的局域惯性系里，标架的变化率在 P 点就消失了（因为标架的“真正”变化是垂直于曲面的，蚂蚁看不到）。

如果某个点上的某个张量在一个坐标系里的所有分量都是零，那么它在任何坐标系里都是零；反之，一个非零张量，无论怎样作坐标变换，也不可能把它所有分量变为零。不过，联络并不是张量：它的坐标变换规则里除了张量项之外，还多了一项坐标的二次偏导和一次偏导的乘积。正是这个多出来的项可以和张量项抵消，使得在一个选定点的联络完全消失。要注意的是，不同点的局域惯性系一般而言不同，我们一般只能选取坐标系使得一个点的联络消失，而不是所有点的联络同时消失——除非空间本身就是平直的。

2.3.3 矢量的“平行”移动

在超空间中，一个矢量 $\vec{A}$ 可以平行地从一个点移动到另一个点，从而建立不同点的矢量的等同关系。在曲面上，矢量 $\vec{A}$ 移动时会脱离切平面，我们在移动它的过程中必须不断地把它“压回”到切平面上。最经济的办法当然是沿垂直于切平面的方向压，也就是 $\vec{A}$ 的变化率和标架、逆标架都正交：

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial u^\nu} \cdot \vec{n}_\mu = 0. \quad (2.20)$$

把 $\vec{A} = A_\lambda \vec{N}^\lambda$ 代入上式，得到

$$\frac{\partial A_\lambda}{\partial u^\nu} (\vec{N}^\lambda \cdot \vec{n}_\mu) + A_\lambda \vec{n}_\mu \cdot \frac{\partial \vec{N}^\lambda}{\partial u^\nu} = 0. \quad (2.21)$$

利用 (2.10)，就有

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial u^\nu} - A_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0. \quad (2.22)$$

我们可以从另一个角度来理解 (2.22): 因为矢量的分量 $A_\mu = \vec{A} \cdot \vec{n}_\mu$ 是矢量在标架上的投影, 在矢量“不变”的情况下, 标架的变化是导致矢量的分量变化的唯一因素。于是可以写出

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial u^\nu} = \vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{n}_\mu}{\partial u^\nu} = A_\lambda \tilde{N}^\lambda \cdot \frac{\partial \vec{n}_\mu}{\partial u^\nu}. \quad (2.23)$$

再利用 (2.9), 就得到和 (2.22) 等价的

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial u^\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda. \quad (2.24)$$

把 (2.24) 沿着矢量的移动路径积分, 由于“沿途”矢量 $\vec{A}$ 的改变量都不可见 (和切平面正交), 曲线上的蚂蚁可以认为矢量“没有变化”。这样, 我们就建立了一种把矢量从一个点“平行”地移到另一个点的方案。在移动距离的一阶近似下, (2.24) 实际上给出了平行移动的“唯一”结果。但要注意的是, 对有限大小的移动距离, 矢量平行移动的结果一般和移动路径有关。我们在下一章会对此进行深入的讨论。

在坐标系中, 设 $\vec{N}^\mu(P)$ 沿着 $\vec{n}_\nu$ 平行移动 du^ν 后得到 (一阶近似意义下) $\vec{B}$, 那么在移动终点 Q 处 $\vec{B}$ 的分量为:

$$B_\alpha = \delta_\alpha^\mu + \Gamma_{\alpha\nu}^\beta \delta_\beta^\mu du^\nu = \delta_\alpha^\mu + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu du^\nu. \quad (2.25)$$

也就是在移动终点 Q,

$$\vec{B} = B_\alpha \vec{N}^\alpha(Q) = \vec{N}^\mu(Q) + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu du^\nu \vec{N}^\alpha. \quad (2.26)$$

(由于右边第二项已经是一阶小量, 我们不强调位置)。

设有 k 阶张量 A , 在移动前的 P 点, A 吃进 $\vec{N}^{\mu_1}(P), \vec{N}^{\mu_2}(P), \dots, \vec{N}^{\mu_k}(P)$, 吐出 $A^{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}(P)$ 。然后沿着 $\vec{n}_\nu$ 移动 du^ν 到达 Q 点, 在移动终点, 让张量吃进“平行”移动后的 $\vec{N}^{\mu_1}(Q) + \Gamma_{\alpha\nu}^{\mu_1} du^\nu \vec{N}^\alpha, \vec{N}^{\mu_2}(Q) + \Gamma_{\alpha\nu}^{\mu_2} du^\nu \vec{N}^\alpha, \dots, \vec{N}^{\mu_k}(Q) + \Gamma_{\alpha\nu}^{\mu_k} du^\nu \vec{N}^\alpha$, 吐出 (一阶近似意义下) $A^{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}(Q) + du^\nu (\Gamma_{\alpha\nu}^{\mu_1} A^{\alpha\mu_2\dots\mu_k} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\mu_2} A^{\mu_1\alpha\mu_3\dots\mu_k} + \dots + \Gamma_{\alpha\nu}^{\mu_k} A^{\mu_1\mu_2\dots\mu_{k-1}\alpha}) = A^{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}(P) + du^\nu \left(\frac{\partial A^{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}}{\partial u^\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\mu_1} A^{\alpha\mu_2\dots\mu_k} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\mu_2} A^{\mu_1\alpha\mu_3\dots\mu_k} + \dots + \Gamma_{\alpha\nu}^{\mu_k} A^{\mu_1\mu_2\dots\mu_{k-1}\alpha} \right)$ 。于是张量的梯度的分量可以定义为:

$$(\nabla A)^{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}_\nu \equiv \frac{\partial A^{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}}{\partial u^\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\mu_1} A^{\alpha\mu_2\dots\mu_k} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\mu_2} A^{\mu_1\alpha\mu_3\dots\mu_k} + \dots + \Gamma_{\alpha\nu}^{\mu_k} A^{\mu_1\mu_2\dots\mu_{k-1}\alpha}. \quad (2.27)$$

2.3.4 张量的协变导数

在其他文献中, 张量的梯度也叫做张量的“协变导数”或者“协变微商”。我们会交替使用这些名称, 但以文献中最常见的名称“协变导数”为主。

在上一小节中, 我们建立了邻近点的矢量的“等价关系”, 并借此推导出了矢量场的逆变形式的梯度的表达式 (2.27)。下面我们采用更加简明的一种方式推导

张量的梯度的任意形式分量表达式：在定义联络时，我们已经默认忽略了标架在不可见维度上的变化，这相当于把标架的基矢平行移动到邻近点和那里的标架基矢做比较。所以我们可以把标架的变化率写成联络的办法来取代平行移动。

考虑曲面上的一个 k 阶张量场 A ，它的协变导数 ∇A 会使 A 的分量随着坐标变化；同时，标架本身的变化也会导致 A 的分量随着坐标变化。我们只要把标架本身的变化的贡献给“抠掉”，就能得到 ∇A 。

对标量场 φ 而言，它不需要在标架上进行投影，因此啥也不需要抠——协变导数就是普通偏导数。

$$(\nabla\varphi)_\mu = \frac{\partial\varphi}{\partial u^\mu}. \quad (2.28)$$

对矢量场 $\vec{A}$ ，我们要从其协变分量的变化率里抠掉标架变化率的贡献。在下面的推导中，我们把 $A(\dots)$ 看成一个吃进一个矢量，吐出一个实数的操作。

$$\begin{aligned} (\nabla A)_{\mu\nu} &= \frac{\partial A_\mu}{\partial u^\nu} - A \left(\frac{\partial \vec{n}_\mu}{\partial u^\nu} \right) \\ &= \frac{\partial A_\mu}{\partial u^\nu} - A \left(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \vec{n}_\lambda \right) \\ &= \frac{\partial A_\mu}{\partial u^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda A(\vec{n}_\lambda) \\ &= \frac{\partial A_\mu}{\partial u^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda. \end{aligned} \quad (2.29)$$

对逆变分量，我们要抠掉逆标架变化率的贡献，注意逆标架的变化率由负的联络给出（见 (2.11)）

$$\begin{aligned} (\nabla A)^\mu_\nu &= \frac{\partial A^\mu}{\partial u^\nu} - A \left(\frac{\partial \vec{N}^\mu}{\partial u^\nu} \right) \\ &= \frac{\partial A^\mu}{\partial u^\nu} - A \left(-\Gamma_{\lambda\nu}^\mu \vec{N}^\lambda \right) \\ &= \frac{\partial A^\mu}{\partial u^\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu A(\vec{N}^\lambda) \\ &= \frac{\partial A^\mu}{\partial u^\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu A^\lambda. \end{aligned} \quad (2.30)$$

类似地，对二阶张量 A ，有

$$(\nabla A)_{\mu\nu\rho} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial u^\rho} - A \left(\frac{\partial \vec{n}_\mu}{\partial u^\rho}, \vec{n}_\nu \right) - A \left(\vec{n}_\mu, \frac{\partial \vec{n}_\nu}{\partial u^\rho} \right) = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial u^\rho} - A_{\alpha\nu} \Gamma_{\mu\rho}^\alpha - A_{\mu\alpha} \Gamma_{\nu\rho}^\alpha, \quad (2.31)$$

$$(\nabla A)^{\mu\nu}_\rho = \frac{\partial A^{\mu\nu}}{\partial u^\rho} - A \left(\frac{\partial \vec{N}^\mu}{\partial u^\rho}, \vec{N}^\nu \right) - A \left(\vec{N}^\mu, \frac{\partial \vec{N}^\nu}{\partial u^\rho} \right) = \frac{\partial A^{\mu\nu}}{\partial u^\rho} + A^{\alpha\nu} \Gamma_{\alpha\rho}^\mu + A^{\mu\alpha} \Gamma_{\alpha\rho}^\nu, \quad (2.32)$$

和

$$(\nabla A)^\mu_{\nu\rho} = \frac{\partial A^\mu_\nu}{\partial u^\rho} - A \left(\frac{\partial \vec{N}^\mu}{\partial u^\rho}, \vec{n}_\nu \right) - A \left(\vec{N}^\mu, \frac{\partial \vec{n}_\nu}{\partial u^\rho} \right) = \frac{\partial A^\mu_\nu}{\partial u^\rho} + A^\alpha_\nu \Gamma^\mu_{\alpha\rho} - A^\mu_\alpha \Gamma^\alpha_{\nu\rho}, \quad (2.33)$$

显然，对更高阶的张量的协变导数也可以如法炮制。我们的口诀是：上指标加，下指标减。

协变导数具有如下重要的性质：

- 1 **度规的协变导数都是零。**这是因为度规的定义不依赖于坐标： $g(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ 。
- 2 **协变导数是一个线性操作，因此和缩并可交换，并能保留求协变导数前的张量的指标对称性。**
- 3 **和普通导数类似，张量积的协变导数可以按照莱布尼兹法则展开，但要注意求导指标要添加在协变导数的作用对象上。**例如，如果 φ 是标量场， $\vec{A}$ 是矢量场，那么 $\left[\nabla(\varphi \vec{A}) \right]_{\mu\nu} = A_\mu (\nabla \varphi)_\nu + \varphi (\nabla A)_{\mu\nu}$ 。又如 A 和 B 都是二阶张量，那么 $(\nabla(A \otimes B))_{\alpha\beta\mu\nu\rho} = A_{\alpha\beta} (\nabla B)_{\mu\nu\rho} + (\nabla A)_{\alpha\beta\rho} B_{\mu\nu}$ 。
- 4 **和偏导数不同，两次协变导数一般不能交换次序。**例如对矢量场 $\vec{A}$ ， $\left[\nabla(\nabla \vec{A}) \right]_{\lambda\mu\nu}$ 一般和 $\left[\nabla(\nabla \vec{A}) \right]_{\lambda\nu\mu}$ 不同。

前面三条性质可以用协变导数的计算法则严格证明。最后一条会引出一个重要的概念——黎曼张量——它是下一章的主题。

2.3.5 沿着参数化曲线的协变导数

假设有一条曲线 $u^\mu(t)$ （这里 t 是任意的参数，不一定是“长度参量”），张量场可以沿着曲线对参量 t 求协变导数——即当沿着曲线移动很小距离时，张量变化量和参量 t 的变化量之比。张量 A 沿着曲线的协变导数可以通过把 ∇A 求导指标（按我们的约定，为最后一个指标）和 $\frac{du^\mu}{dt}$ 缩并获得。我们以矢量 A 为例来说明，沿曲线的协变导数的协变分量为

$$\left(\frac{dA}{dt} \right)_\mu = \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A_\lambda \right) \frac{dx^\nu}{dt} = \frac{dA_\mu}{dt} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{dt} A_\lambda, \quad (2.34)$$

逆变分量为

$$\left(\frac{dA}{dt} \right)^\mu = \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} A^\lambda \right) \frac{dx^\nu}{dt} = \frac{dA^\mu}{dt} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} \frac{dx^\nu}{dt} A^\lambda. \quad (2.35)$$

如果曲线是物理的（不依赖于坐标系选取的），那么 k 阶张量场沿着曲线的协变导数仍然是 k 阶张量。但是它仅在曲线上有定义，所以严格来说不能说是张量场。

2.4 测地线方程

在曲面上参数化的曲线 $u^\mu(\lambda)$ 的长度可以写成

$$\int \frac{ds}{d\lambda} d\lambda = \int \sqrt{g_{\rho\beta} \frac{du^\rho}{d\lambda} \frac{du^\beta}{d\lambda}} d\lambda. \quad (2.36)$$

取极值对应的欧拉-拉格朗日方程是

$$\frac{d}{d\lambda} g_{\rho\beta} \frac{du^\beta}{d\lambda} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\rho} \frac{du^\alpha}{d\lambda} \frac{du^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (2.37)$$

如果用“长度参量” s 来替代任意的参量 λ ，上面的方程等价于

$$\frac{d}{ds} \left(g_{\rho\beta} \frac{du^\beta}{ds} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\rho} \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} = 0 \quad (2.38)$$

也就是

$$\frac{\partial g_{\rho\beta}}{\partial u^\alpha} \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} + g_{\rho\beta} \frac{d^2 u^\beta}{ds^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\rho} \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} = 0. \quad (2.39)$$

即

$$g_{\rho\beta} \frac{d^2 u^\beta}{ds^2} + \frac{\partial g_{\rho\beta}}{\partial u^\alpha} \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\rho} \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} = 0. \quad (2.40)$$

两边乘以 $g^{\mu\rho}$ 得到

$$\frac{d^2 u^\mu}{ds^2} + g^{\mu\rho} \frac{\partial g_{\rho\beta}}{\partial u^\alpha} \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} - \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\rho} \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} = 0. \quad (2.41)$$

注意到第二项里的指标 α 和 β 是可以交换的，并利用 Cristoffel 符号，就立刻得到

测地线方程:

$$\frac{d^2 u^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} = 0. \quad (2.42)$$

我们换一种更加直观的方法来理解测地线方程。曲线的单位切矢量可以写成 $\frac{d\vec{x}}{ds}$ 。用逆标架可以投影得到单位切矢量的分量

$$\frac{du^\mu}{ds} = \vec{N}^\mu \cdot \frac{d\vec{x}}{ds}. \quad (2.43)$$

两边对 s 求导，得到

$$\frac{d^2 u^\mu}{ds^2} = \frac{d\vec{N}^\mu}{ds} \cdot \frac{d\vec{x}}{ds} + \vec{N}^\mu \cdot \frac{d^2 \vec{x}}{ds^2}. \quad (2.44)$$

因为要求切矢量始终在曲面上，单位切矢量“不得不变化”： $\frac{d^2\vec{x}}{ds^2}$ 一般而言非零。但是，为了让路径最短，单位切矢量的“最经济”的变化方式当然是垂直于曲面变化。也就是说，对测地线，有 $\vec{N}^\mu \cdot \frac{d^2\vec{x}}{ds^2} = 0$ 。于是对于测地线，有

$$\frac{d^2 u^\mu}{ds^2} = \frac{d\vec{N}^\mu}{ds} \cdot \frac{d\vec{x}}{ds}. \quad (2.45)$$

注意到 $\frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{du^\beta}{ds} \vec{n}_\beta$ ，以及 $\frac{d\vec{N}^\mu}{ds} = \frac{\partial \vec{N}^\mu}{\partial u^\alpha} \frac{du^\alpha}{ds}$ ，就得到

$$\frac{d^2 u^\mu}{ds^2} = \vec{n}_\beta \cdot \frac{\partial \vec{N}^\mu}{\partial u^\alpha} \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds}. \quad (2.46)$$

在最后一步我们用了(2.10)。

上面的“最经济”的表述可以用沿着曲线的协变导数来更准确地描述：**测地线的单位切向量沿着测地线本身的协变导数为零**。如果考虑一般的参数 t ，直接用沿曲线的协变导数公式(2.35)可以写出：

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{d\vec{x}}{ds} \right)^\mu = \frac{d}{dt} \left(\frac{du^\mu}{ds} \right) + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{dt} = 0. \quad (2.47)$$

这里的 $\frac{du^\mu}{ds}$ 是单位切矢量 $\frac{d\vec{x}}{ds}$ 的分量。在(2.47)中取 $t = s$ 显然又回到了(2.42)。

关于测地线方程，我们来划几条重点：

- 1 测地线方程(2.42)里的 s 可以换成 s 的任意线性变换 $as + b$ ($a \neq 0$)，但不能换成任意参量（因为那样会对二阶导那项产生额外的贡献）。
- 2 测地线和平行移动有很直接的联系：测地线就是不断把轨迹的单位切矢量做平行移动形成的。
- 3 过一个给定点的测地线一般有无穷多条——你可以随意选定方向开始移动。但一旦选定初始方向后，后续就是不断把轨迹的单位切矢量做平行移动，测地线就唯一了。
- 4 连接两个点的测地线使路径长度取“稳定值”（路径长度变分为零），但不一定让路径长度取到最小值或最大值。连接两点的测地线也不一定只有有限条（例如球面的南北极之间的大圆弧有无穷多条）。

2.5 广义相对论中的粒子测地线方程

在广义相对论中，经常用 (x^0, x^1, x^2, x^3) 来描述时空点或者质点的坐标， $d\tau = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$ （在平直时空或者狭义相对论中 $d\tau = \sqrt{dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$ ）描述有静止质量的粒子的“原时”或“固有时”（就是粒子“感觉”自身经过的时间，或者说假想粒子携带的钟走过的时间）。对有质量且不受外力（在纯几何观点的广义相对论里，“引力”被认为并不存在）的点粒子，就可以用测地线方程(2.42)来描述

它的运动:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \quad (2.48)$$

或者用粒子的四维动量 $p^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau}$ 来描述, 就是

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{p^\alpha p^\beta}{m} = 0. \quad (2.49)$$

有时, 我们会用“时间坐标” x^0 来书写上述方程, 利用上面的测地线方程以及 $p^0 = m \frac{dx^0}{d\tau}$, 就有

$$\frac{dp^\mu}{dx^0} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{p^\alpha p^\beta}{p^0} = 0. \quad (2.50)$$

对静止质量为零的粒子, 例如光子, 它的原时为零(嗯, 光子无法“感受”到时间的流动!) 但是四维动量非零, 我们就只能使用方程(2.50)。

最后, 我们把联络的表达式 (2.16) 代入 (2.50), 得到

$$\frac{dp^\mu}{dx^0} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \right) \frac{p^\alpha p^\beta}{p^0} = 0. \quad (2.51)$$

方程两边同时乘以 $g_{\lambda\mu}$, 得到

$$g_{\lambda\mu} \frac{dp^\mu}{dx^0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} \right) \frac{p^\alpha p^\beta}{p^0} = 0. \quad (2.52)$$

注意到括号里前两项的贡献是一样的, 因为

$$\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^\beta} \frac{p^\beta p^\alpha}{p^0} = \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^\beta} \frac{dx^\beta}{dx^0} p^\alpha = \frac{dg_{\alpha\lambda}}{dx^0} p^\alpha = \frac{dg_{\mu\lambda}}{dx^0} p^\mu \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^\alpha} \frac{p^\alpha p^\beta}{p^0} = \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{dx^0} p^\beta = \frac{dg_{\beta\lambda}}{dx^0} p^\beta = \frac{dg_{\mu\lambda}}{dx^0} p^\mu \quad (2.54)$$

把上面两式代入(2.52), 并把括号里最后一项的贡献移到方程右边, 就得到一个非常有趣的结果:

$$\frac{d(g_{\mu\lambda} p^\mu)}{dx^0} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} \frac{p^\alpha p^\beta}{p^0}. \quad (2.55)$$

也就是

协变动量的测地线方程:

$$\frac{dp_\lambda}{dx^0} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} \frac{p^\alpha p^\beta}{p^0}. \quad (2.56)$$

这个方程的意义在于它指出了这样一件事情: 如果度规不依赖于某个坐标, 那么对应指标的动量协变分量是个守恒量! 我们后面在实战中会频繁用到这个结论。

2.6 课后练习

习题 2: 用张量的坐标变换规则证明张量的缩并仍然是张量。

习题 3: 用参数 (u, v) 描述的曲面上的度规为 $ds^2 = (u^2 + \cosh u)du^2 + 2\sinh u du dv + \cosh u dv^2$ 。曲面上某条测地线经过点 $(0, 0)$ ，且在点 $(0, 0)$ 处满足 $\frac{dv}{du} = 0$ 。求这条测地线和曲线 $e^{-v} - e^{-u} = 1$ 的交点。

3. 黎曼张量

空间的内禀（指表面上的蚂蚁就能感受到的，而非超空间视角的）弯曲以“度量的扭曲”为特征。我们已经知道，度量由度规张量描述，而度规张量的本质是取内积的运算。当两个矢量沿同一条路径平行移动时，它们的内积保持不变（请思考为什么），所以直接对度规张量计算协变导数行不通（度规的协变导数恒为零）。不过，我们可以保持一个矢量不动，另一个矢量“移动一圈”回来，这时两矢量之间的内积就会发生变化。“移动一圈”的路径至少涉及两个两个方向。这样，描述空间内禀弯曲的张量至少要涉及两个矢量以及两个不同的移动方向，也就是说，它至少得是四阶张量。这一章的主题就是研究这样一个四阶张量，它叫曲率张量或者黎曼张量，一般用字母 R 来表示。

内禀弯曲的空间还有很多其他的特征，例如：平行线会相交（三角形内角和不等 π ）；协变导数不可交换次序等等；这些性质都可以用矢量平行移动来描述，因此也可以被黎曼张量描述。

要注意的是，和上一章讨论协变导数时只需保留一阶小量的情况不同，在讨论曲率时需要保留二阶小量。

3.1 矢量“移动一圈”

我们在上一章找到了把矢量在曲面上“平行”移动的方法。不过这种“平行”从超空间的角度来看并非真正平行，而是忽略了垂直于曲面的“不可观测分量”的变化。

当曲面可以“展开”成一个平直空间（例如圆柱面或圆锥面可以展成平面），

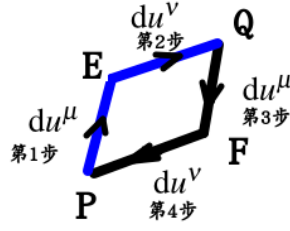


Figure 3.1: 矢量移动一圈的路径

曲面上的“平行”移动可以简化为在展开的空间中的严格平行的移动（把矢量“压向”曲面的操作和把曲面“展开”是等价的）。因此，在平直空间或者可以展开成平直空间的曲面上，“平行”移动是一个只和起点、终点相关的操作，与移动路径无关。在这种情况下，我们可以在任意两点间建立矢量的等价关系，而不只是在邻近点取一阶近似意义下的等价关系。

像球面这样不可展开为平直空间的“真正弯曲”的曲面，“平行”移动的结果一般和路径相关。为了更加具体地说明这个问题，如图3.1所示，我们来选取一个非常简单的小平行四边形：第一步沿着 $\vec{n}_\mu$ 方向移动 du^μ ，第二步沿着 $\vec{n}_\nu$ 方向移动 du^ν ，第三步沿着 $\vec{n}_\mu$ 方向移动 $-du^\mu$ ，第四步沿着 $\vec{n}_\nu$ 方向移动 $-du^\nu$ 。注意在一阶近似下，第一步和第三步中 $\vec{A}$ 的变化的贡献互相抵消，第二步和第四步中 $\vec{A}$ 的变化互相抵消，所以最后 $\vec{A}$ 在一阶近似意义下不变。但是，如果考虑二阶修正，情况就不同了：第一步和第三步导致 A_α 的净变化为

$$\Delta A_\alpha = -\frac{\partial (A_\beta \Gamma_{\alpha\mu}^\beta)}{\partial u^\nu} du^\nu du^\mu, \quad (3.1)$$

这里右边的 A_β 要视为在平行移动过程中的 A 的分量，满足 $\frac{\partial A_\beta}{\partial u^\nu} = \Gamma_{\beta\nu}^\lambda A_\lambda$ 。

第二步和第四步导致 A_α 的净变化为

$$\Delta A_\alpha = \frac{\partial (A_\beta \Gamma_{\alpha\nu}^\beta)}{\partial u^\mu} du^\mu du^\nu. \quad (3.2)$$

等式右边的 A_β 同样视为在平行移动过程中的 A 的分量，满足 $\frac{\partial A_\beta}{\partial u^\mu} = \Gamma_{\beta\mu}^\lambda A_\lambda$ 。

于是最后净变化

$$\begin{aligned} \Delta A_\alpha &= \left[\frac{\partial (A_\beta \Gamma_{\alpha\nu}^\beta)}{\partial u^\mu} - \frac{\partial (A_\beta \Gamma_{\alpha\mu}^\beta)}{\partial u^\nu} \right] du^\mu du^\nu \\ &= \left[A_\lambda \Gamma_{\mu\beta}^\lambda \Gamma_{\alpha\nu}^\beta + A_\beta \frac{\partial \Gamma_{\alpha\nu}^\beta}{\partial u^\mu} - A_\lambda \Gamma_{\nu\beta}^\lambda \Gamma_{\alpha\mu}^\beta - A_\beta \frac{\partial \Gamma_{\alpha\mu}^\beta}{\partial u^\nu} \right] du^\mu du^\nu \\ &= A_\lambda \left[\Gamma_{\mu\beta}^\lambda \Gamma_{\alpha\nu}^\beta + \frac{\partial \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda}{\partial u^\mu} - \Gamma_{\nu\beta}^\lambda \Gamma_{\alpha\mu}^\beta - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda}{\partial u^\nu} \right] du^\mu du^\nu \end{aligned} \quad (3.3)$$

定义黎曼张量的分量为

$$R^\lambda_{\alpha\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\alpha\nu} + \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\alpha\nu}}{\partial u^\mu} - \Gamma^\lambda_{\nu\beta}\Gamma^\beta_{\alpha\mu} - \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\alpha\mu}}{\partial u^\nu}. \quad (3.4)$$

就有

$$\Delta A_\alpha = R^\lambda_{\alpha\mu\nu} A_\lambda du^\mu du^\nu. \quad (3.5)$$

在 P 点黎曼张量吃掉四个在 P 点的四个矢量 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ ，就进行如下操作，把 $\vec{v}_1$ 沿着 $\vec{v}_3$ “平行”移动 ε (这里的 $\varepsilon \rightarrow 0^+$)；然后沿着 $\vec{v}_4$ “平行”移动 ε ；然后沿着 $\vec{v}_3$ “平行”移动 $-\varepsilon$ ；然后沿着 $\vec{v}_4$ “平行”移动 $-\varepsilon$ 回到 P 点，矢量 $\vec{v}_1$ 的变化量除以 ε^2 后再和 $\vec{v}_2$ 取点积作为输出的实数。

我们刚才计算的其实是 $R(\vec{N}^\lambda, \vec{n}_\alpha, \vec{n}_\mu, \vec{n}_\nu)$ ，所以确实是黎曼张量的分量 $R^\lambda_{\alpha\mu\nu}$ 。

按照黎曼张量的定义，知道 $R(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ 关于 $\vec{v}_3, \vec{v}_4$ 是反对称的，即 $R(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4) = -R(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4, \vec{v}_3)$ 。另外，如果同时把 $\vec{v}_1$ 也沿着闭合曲线“平行”移动，由于 $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ 是一个标量，在移动过程中并不会改变 (或者按照“最经济”的规则，直接计算 $d(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) = \vec{v}_2 \cdot d\vec{v}_1 + \vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_2 = 0 + 0 = 0$)。也就是说： $(\vec{v}_1 + \Delta\vec{v}_1) \cdot (\vec{v}_2 + \Delta\vec{v}_2) = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ 。因为 $\Delta\vec{v}_1$ 和 $\Delta\vec{v}_2$ 都是 $O(\varepsilon^2)$ ，所以 $\Delta\vec{v}_1 \cdot \Delta\vec{v}_2$ 可以忽略掉。那就表示 $\vec{v}_1 \cdot \Delta\vec{v}_2 = -\vec{v}_2 \cdot \Delta\vec{v}_1$ 。也就是说黎曼张量对前两个吃掉的矢量也是反对称的： $R(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4) = -R(\vec{v}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ 。

由于黎曼张量的坐标分量仅仅是把标架喂给它的输出，就有

黎曼张量的反对称性质：

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} \quad (3.6)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu}. \quad (3.7)$$

3.2 比安基 (Bianchi) 代数恒等式

在局域惯性系里面，

$$R^\lambda_{\alpha\mu\nu} + R^\lambda_{\mu\nu\alpha} + R^\lambda_{\nu\alpha\mu} = \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\alpha\nu}}{\partial u^\mu} - \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\alpha\mu}}{\partial u^\nu} + \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\alpha}}{\partial u^\nu} - \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\nu\mu}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\nu\alpha}}{\partial u^\mu} = 0. \quad (3.8)$$

因为张量恒等式和坐标系选择无关，所以这个等式在任意坐标系成立，它被称之为：

比安基代数恒等式，或第一比安基恒等式

$$R_{\lambda\alpha\mu\nu} + R_{\lambda\mu\nu\alpha} + R_{\lambda\nu\alpha\mu} = 0. \quad (3.9)$$

(注意我们把指标 λ 降了下来，因右边是零，这不影响等式的成立)。
轮换指标，容易写出

$$R_{\alpha\lambda\mu\nu} + R_{\alpha\mu\nu\lambda} + R_{\alpha\nu\lambda\mu} = 0. \quad (3.10)$$

$$R_{\mu\alpha\lambda\nu} + R_{\mu\lambda\nu\alpha} + R_{\mu\nu\alpha\lambda} = 0. \quad (3.11)$$

$$R_{\nu\alpha\lambda\mu} + R_{\nu\lambda\mu\alpha} + R_{\nu\mu\alpha\lambda} = 0. \quad (3.12)$$

把上述四个等式全部相加，并利用黎曼张量的反对称性质，就得到

$$2R_{\lambda\nu\alpha\mu} + 2R_{\mu\alpha\lambda\nu} = 0. \quad (3.13)$$

也就是

黎曼张量的块对称性：

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (3.14)$$

注意，它是由第一比安基恒等式和黎曼张量的两条反对称性质推导出来，并不是一个独立的对称性。

容易证明：黎曼张量的对称性对“吃”进去的矢量也是成立的。例如，

$$\begin{aligned} R(\vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_1, \vec{v}_2) &= (\vec{v}_3 \cdot \vec{N}^\alpha)(\vec{v}_4 \cdot \vec{N}^\beta)(\vec{v}_1 \cdot \vec{N}^\mu)(\vec{v}_2 \cdot \vec{N}^\nu) R_{\alpha\beta\mu\nu} \\ &= (\vec{v}_3 \cdot \vec{N}^\alpha)(\vec{v}_4 \cdot \vec{N}^\beta)(\vec{v}_1 \cdot \vec{N}^\mu)(\vec{v}_2 \cdot \vec{N}^\nu) R_{\mu\nu\alpha\beta} \\ &= R(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4) \end{aligned} \quad (3.15)$$

3.2.1 黎曼张量的独立分量个数

在 m 维空间里，虽然黎曼张量有 m^4 个分量，但是它们很多恒为零（平凡分量），还有很多相同或者只相差一个符号。那么一共有多少个非平凡的独立分量呢？

考虑非平凡的分量 $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ ，根据反对称性和块对称性，不妨可以设 $\mu < \nu$, $\alpha < \beta$ 。这样 (μ, ν) 有 $N = \frac{m(m-1)}{2}$ 种选择。同样 (α, β) 也有 N 种选择。总计 N^2 种选

Table 3.1: 黎曼张量非恒为零的独立分量的个数

空间维数	1	2	3	4	5	6
独立 $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ 个数	0	1	6	20	50	105

择。但是里面 $N(N-1)$ 种 $(\mu, \nu) \neq (\alpha, \beta)$ 的情况其实被重复计算了 (因为根据块对称性, 交换 (μ, ν) 和 (α, β) 不产生新的独立分量)。这样有 $N + \frac{N(N-1)}{2} = \frac{N(N+1)}{2} = \frac{m(m-1)(m^2-m+2)}{8}$ 种分量。

问题在于, 这些分量也不完全是独立的。我们还要扣去 $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{24}$ 个四个指标都不重复的比安基恒等式代表的自由度 (指标重复的情况或者是平凡的, 或者已经在块对称性里完全使用了; 四个指标不重复的情况只能推出三个块对称性, 所以还留有一个自由度)。这样最后一共有

$$\frac{m(m-1)(m^2-m+2)}{8} - \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{24} = \frac{m^2(m^2-1)}{12}$$

个独立分量。由此我们制作了表 3.1。可以看到, 1 维空间没有非零分量 (没有内禀弯曲), 2 维空间只有一个独立分量 (曲面在每点的内禀弯曲可以由单个参数表述)。

3.3 比安基 (Bianchi) 微分恒等式

在 P 点的局域惯性系里, P 点的所有联络为零 (但是联络的偏导数一般不为零), 协变导数和普通偏导数相等。因此

$$(\nabla R)^\alpha_{\beta\mu\nu\rho} = \frac{\partial^2 \Gamma^\alpha_{\beta\nu}}{\partial u^\mu \partial u^\rho} - \frac{\partial^2 \Gamma^\alpha_{\beta\mu}}{\partial u^\nu \partial u^\rho}. \quad (3.16)$$

轮换指标可以得到:

$$(\nabla R)^\alpha_{\beta\nu\rho\mu} = \frac{\partial^2 \Gamma^\alpha_{\beta\rho}}{\partial u^\nu \partial u^\mu} - \frac{\partial^2 \Gamma^\alpha_{\beta\nu}}{\partial u^\rho \partial u^\mu}. \quad (3.17)$$

$$(\nabla R)^\alpha_{\beta\rho\mu\nu} = \frac{\partial^2 \Gamma^\alpha_{\beta\mu}}{\partial u^\rho \partial u^\nu} - \frac{\partial^2 \Gamma^\alpha_{\beta\rho}}{\partial u^\mu \partial u^\nu}. \quad (3.18)$$

把上面三个等式相加, 并降下指标 α , 就得到

比安基微分恒等式, 也叫做第二比安基恒等式:

$$(\nabla R)_{\alpha\beta\mu\nu\rho} + (\nabla R)_{\alpha\beta\nu\rho\mu} + (\nabla R)_{\alpha\beta\rho\mu\nu} = 0. \quad (3.19)$$

虽然比安基微分恒等式是在局域惯性系推导的，但是张量恒等式和坐标系选择无关，所以它在任意坐标系都成立。

由于 ∇ 是线性操作， ∇R 对前四个指标（或前四个“吃”进去的矢量）保留了 R 的所有对称性。写出黎曼张量的梯度的显示表达，也可以更加清晰地确认这一点。例如，对比

$$(\nabla R)_{\alpha\beta\mu\nu\rho} = \frac{\partial R_{\alpha\beta\mu\nu}}{\partial u^\rho} - R_{\sigma\beta\mu\nu}\Gamma_{\alpha\rho}^\sigma - R_{\alpha\sigma\mu\nu}\Gamma_{\beta\rho}^\sigma - R_{\alpha\beta\sigma\nu}\Gamma_{\mu\rho}^\sigma - R_{\alpha\beta\mu\sigma}\Gamma_{\nu\rho}^\sigma, \quad (3.20)$$

和

$$(\nabla R)_{\beta\alpha\mu\nu\rho} = \frac{\partial R_{\beta\alpha\mu\nu}}{\partial u^\rho} - R_{\sigma\alpha\mu\nu}\Gamma_{\beta\rho}^\sigma - R_{\beta\sigma\mu\nu}\Gamma_{\alpha\rho}^\sigma - R_{\beta\alpha\sigma\nu}\Gamma_{\mu\rho}^\sigma - R_{\beta\alpha\mu\sigma}\Gamma_{\nu\rho}^\sigma, \quad (3.21)$$

就可以确认 $(\nabla R)_{\alpha\beta\mu\nu\rho} = -(\nabla R)_{\beta\alpha\mu\nu\rho}$ 。

结合比安基代数恒等式，(3.20) 和

$$(\nabla R)_{\alpha\mu\nu\beta\rho} = \frac{\partial R_{\alpha\mu\nu\beta}}{\partial u^\rho} - R_{\sigma\mu\nu\beta}\Gamma_{\alpha\rho}^\sigma - R_{\alpha\sigma\nu\beta}\Gamma_{\mu\rho}^\sigma - R_{\alpha\mu\sigma\beta}\Gamma_{\nu\rho}^\sigma - R_{\alpha\mu\nu\sigma}\Gamma_{\beta\rho}^\sigma, \quad (3.22)$$

以及

$$(\nabla R)_{\alpha\nu\beta\mu\rho} = \frac{\partial R_{\alpha\nu\beta\mu}}{\partial u^\rho} - R_{\sigma\nu\beta\mu}\Gamma_{\alpha\rho}^\sigma - R_{\alpha\sigma\beta\mu}\Gamma_{\nu\rho}^\sigma - R_{\alpha\nu\sigma\mu}\Gamma_{\beta\rho}^\sigma - R_{\alpha\nu\beta\sigma}\Gamma_{\mu\rho}^\sigma, \quad (3.23)$$

就可以得到 $(\nabla R)_{\alpha\beta\mu\nu\rho} + (\nabla R)_{\alpha\mu\nu\beta\rho} + (\nabla R)_{\alpha\nu\beta\mu\rho} = 0$ 。

3.4 黎曼张量的缩并（里奇张量和黎曼曲率）

定义黎曼张量的非平凡缩并：

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} \equiv R^\rho_{\mu\rho\nu}. \quad (3.24)$$

为里奇张量（Ricci tensor）。里奇张量再次缩并，就得到黎曼曲率

$$R = \mathcal{R}^\mu_\mu = R^\rho{}_\rho. \quad (3.25)$$

黎曼曲率 R 也叫里奇标量（Ricci scalar）

最后，我们定义爱因斯坦张量

$$G = \mathcal{R} - \frac{1}{2}Rg. \quad (3.26)$$

它的协变导数满足下面的重要性质：

$$(\nabla G)^\mu_{\nu\mu} = 0. \quad (3.27)$$

证明如下：注意到

$$G^\mu_\nu = \mathcal{R}^\mu_\nu - \frac{1}{2}R\delta^\mu_\nu. \quad (3.28)$$

以及 $\nabla\delta^\mu_\nu = 0$ ，就有

$$(\nabla G)^\mu_{\nu\mu} = (\nabla\mathcal{R})^\mu_{\nu\mu} - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu(\nabla R)_\mu = (\nabla\mathcal{R})^\mu_{\nu\mu} - \frac{1}{2}(\nabla R)_\nu. \quad (3.29)$$

把上式右边写成完整的 ∇R 的形式，并利用它的对称性：

$$\begin{aligned} (\nabla G)^\mu_{\nu\mu} &= (\nabla R)^{\alpha\mu}_{\alpha\nu\mu} - \frac{1}{2}(\nabla R)^{\alpha\mu}_{\alpha\mu\nu} \\ &= (\nabla R)^{\alpha\mu}_{\alpha\nu\mu} + \frac{1}{2}\left[(\nabla R)^{\alpha\mu}_{\mu\nu\alpha} + (\nabla R)^{\alpha\mu}_{\nu\alpha\mu}\right] \\ &= (\nabla R)^{\alpha\mu}_{\alpha\nu\mu} + \frac{1}{2}\left[-(\nabla R)^{\mu\alpha}_{\mu\nu\alpha} - (\nabla R)^{\alpha\mu}_{\alpha\nu\mu}\right] \\ &= \frac{1}{2}(\nabla R)^{\alpha\mu}_{\alpha\nu\mu} - \frac{1}{2}(\nabla R)^{\mu\alpha}_{\mu\nu\alpha} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

在最后一步，我们在第二项交换了求和指标 μ 和 α 。

3.5 矢量场的二次协变导数的不可交换性

考虑矢量场 A ，它取二次协变导数后成为三阶张量 $(\nabla(\nabla A))$ 。和普通偏微商不同，协变导数一般是不可交换次序的，也就是说 $\nabla(\nabla A)$ 对两个求导指标一般不是对称的。我们先来硬核计算一下：

$$\begin{aligned} (\nabla(\nabla A))_{\alpha\mu\nu} &= \frac{\partial(\nabla A)_{\alpha\mu}}{\partial u^\nu} - \Gamma^\lambda_{\alpha\nu}(\nabla A)_{\lambda\mu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(\nabla A)_{\alpha\lambda} \\ &= \frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial u^\mu \partial u^\nu} - \frac{\partial(\Gamma^\lambda_{\alpha\mu} A_\lambda)}{\partial u^\nu} - \Gamma^\lambda_{\alpha\nu} \left(\frac{\partial A_\lambda}{\partial u^\mu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} A_\alpha \right) - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(\nabla A)_{\alpha\lambda} \\ &= \frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial u^\mu \partial u^\nu} - \left(\Gamma^\lambda_{\alpha\mu} \frac{\partial A_\lambda}{\partial u^\nu} + \Gamma^\lambda_{\alpha\nu} \frac{\partial A_\lambda}{\partial u^\mu} \right) - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(\nabla A)_{\alpha\lambda} - \frac{\partial\Gamma^\beta_{\alpha\mu}}{\partial u^\nu} A_\beta + \Gamma^\lambda_{\alpha\nu} \Gamma^\beta_{\lambda\mu} A_\beta \end{aligned} \quad (3.31)$$

上述结果中只有最后两项关于 μ, ν 不对称，所以就有

$$(\nabla(\nabla A))_{\alpha\mu\nu} - (\nabla(\nabla A))_{\alpha\nu\mu} = A_\beta \left(\Gamma^\lambda_{\alpha\nu} \Gamma^\beta_{\lambda\mu} - \Gamma^\lambda_{\alpha\mu} \Gamma^\beta_{\lambda\nu} - \frac{\partial\Gamma^\beta_{\alpha\mu}}{\partial u^\nu} + \frac{\partial\Gamma^\beta_{\alpha\nu}}{\partial u^\mu} \right). \quad (3.32)$$

利用 (3.4)，就有

$$(\nabla(\nabla A))_{\alpha\mu\nu} - (\nabla(\nabla A))_{\alpha\nu\mu} = R^\beta_{\alpha\mu\nu} A_\beta. \quad (3.33)$$

最后的结果是一个张量方程。张量方程两边遵循一样的坐标变换规则，只要在一个参考系里证明了它成立，它就在任何坐标系里成立。所以我们可以只在局域惯性系里证明它——这可以大大简化计算过程：在局域惯性系里，

$$(\nabla(\nabla A))_{\alpha\mu\nu} = \frac{\partial(\nabla A)_{\alpha\mu}}{\partial u^\nu} = \frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial u^\mu \partial u^\nu} - \frac{\partial(\Gamma_{\alpha\mu}^\beta A_\beta)}{\partial u^\nu} = \frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial u^\mu \partial u^\nu} - \frac{\partial\Gamma_{\alpha\mu}^\beta}{\partial u^\nu} A_\beta \quad (3.34)$$

交换 μ, ν 并做差，得到

$$(\nabla(\nabla A))_{\alpha\mu\nu} - (\nabla(\nabla A))_{\alpha\nu\mu} = -\frac{\partial\Gamma_{\alpha\mu}^\beta}{\partial u^\nu} + \frac{\partial\Gamma_{\alpha\nu}^\beta}{\partial u^\mu} = R_{\alpha\mu\nu}^\beta A_\beta. \quad (3.35)$$

我们看到，用局域惯性系推导张量方程非常便捷，不过要注意的是，局域惯性系里的扔掉所有联络的形式只对一点成立，不能直接对它进行求导。或者说，在局域惯性系里推导张量方程时如果涉及求导，那么求导前的表达式必须保留所有联络。

3.6 测地线偏离方程

我们对测地线方程 $u^\mu(s)$ 做一个扰动 $\delta u^\mu(s) = \zeta^\mu(s)$ ，我们将假设 ζ^μ 是非常小的量，并要求扰动后的方程描述曲线仍然是以 s 为长度参量的测地线，那么就有

$$\frac{d^2(u^\mu + \zeta^\mu)}{ds^2} + \left(\Gamma_{\alpha\beta}^\mu + \frac{\partial\Gamma_{\alpha\beta}^\mu}{\partial u^\nu} \zeta^\nu \right) \frac{d(u^\alpha + \zeta^\alpha)}{ds} \frac{d(u^\beta + \zeta^\beta)}{ds} = 0. \quad (3.36)$$

上式减去微扰前的测地线方程 (2.42)，并保留到 ζ 的一阶小量

$$\frac{d^2\zeta^\mu}{ds^2} + \frac{\partial\Gamma_{\alpha\beta}^\mu}{\partial u^\nu} \zeta^\nu \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} + 2\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{du^\alpha}{ds} \frac{d\zeta^\beta}{ds} = 0. \quad (3.37)$$

在局域惯性系里，方程(3.37)简化为

$$\frac{d^2\zeta^\mu}{ds^2} = -\frac{\partial\Gamma_{\alpha\beta}^\mu}{\partial u^\nu} \zeta^\nu \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} \quad (3.38)$$

在 ζ^μ 都非常小时，可以近似认为 ζ^μ 是一个矢量 $\vec{\zeta}$ 的逆变分量（思考为什么）。那么根据 (2.35)，矢量 $\vec{\zeta}$ 沿着（扰动前的）测地线的协变导数的逆变分量为：

$$\left(\frac{d\zeta}{ds} \right)^\mu = \frac{d\zeta^\mu}{ds} + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu \frac{du^\alpha}{ds} \zeta^\nu. \quad (3.39)$$

如果再对 $\frac{d\zeta}{ds}$ 这个矢量沿着测地线计算协变导数，将会得到一个很复杂的表达式。不过，我们可以在局域惯性系里计算，

$$\left(\frac{d^2\zeta}{ds^2} \right)^\mu = \frac{d^2\zeta^\mu}{ds^2} + \frac{\partial\Gamma_{\alpha\nu}^\mu}{\partial u^\beta} \frac{du^\beta}{ds} \frac{du^\alpha}{ds} \zeta^\nu. \quad (3.40)$$

再利用局域惯性系里的(3.38)，就有

$$\left(\frac{d^2\zeta}{ds^2}\right)^\mu = \left(-\frac{\partial\Gamma_{\alpha\beta}^\mu}{\partial u^\nu} + \frac{\partial\Gamma_{\alpha\nu}^\mu}{\partial u^\beta}\right) \frac{du^\beta}{ds} \frac{du^\alpha}{ds} \zeta^\nu = R^\mu_{\alpha\beta\nu} \frac{du^\beta}{ds} \frac{du^\alpha}{ds} \zeta^\nu. \quad (3.41)$$

最后结果是一个张量方程，所以在任何坐标系成立。这个张量方程被称为

测地线偏离方程

$$\left(\frac{d^2\zeta}{ds^2}\right)^\mu = R^\mu_{\alpha\beta\nu} \frac{du^\beta}{ds} \frac{du^\alpha}{ds} \zeta^\nu. \quad (3.42)$$

它是引力波测量实验的关键依据。请注意左边沿测地线的协变导数 $\left(\frac{d^2\zeta}{ds^2}\right)^\mu$ 里的括号不能去掉——因为在动态标架理论里面，求导和取指标是不可交换次序的（协变导数的公式里也可以看出这一点）。

从测地线偏离方程(3.42)可以看出，即使在 $s=0$ 时让沿测地线的协变导数 $\frac{d\zeta}{ds}$ 为零（两条测地线平行），当改变 s 往前移动时，黎曼曲率的存在会导致 $\frac{d\zeta}{ds}$ 逐渐偏离零（两条测地线变得不再平行）。

3.7 课后练习

习题 4: 计算在 $\mathfrak{R}^3$ 中的半径为 r 的球面的黎曼曲率 R 。

4. 引力场方程

4.1 矩阵理论的回顾

度规的协变分量、逆变分量、混合分量都可以看成是一个实对称矩阵（混合分量实际上是单位矩阵）。为了方便我们后面做深入的研究，有必要回顾一下实对称矩阵的知识。在本小节的讨论中，我们把单位矩阵记作 I 。

（如果你是线性代数大佬，请直接跳过本节）

4.1.1 共轭转置

在学习实数矩阵时，我们比较熟悉“转置”这个概念。一个矩阵 A 的转置记作 A^T 。“转置”的概念推广到任意的复数矩阵就成为了“共轭转置”，就是把矩阵“放倒”的同时，顺手还把每个元素变为其共轭复数。复矩阵的共轭转置通常用 $A^\dagger$ 来表示。

例如

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 2+i & i \\ 3-i & -4-2i & 0 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

取共轭转置后为

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} 1-i & 3+i \\ 2-i & -4+2i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

容易证明，乘积的共轭转置等于共轭转置的倒序乘积

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger, \quad (4.3)$$

$$(ABC)^\dagger = C^\dagger B^\dagger A^\dagger, \quad (4.4)$$

$$\dots \quad (4.5)$$

另外，共轭转置矩阵的行列式是原矩阵的行列式的共轭

$$\det(A^\dagger) = [\det(A)]^*, \quad (4.6)$$

这里 $\det(A)$ 表示 A 的行列式。

一个复数列向量 x 的长度平方就定义为 $x^\dagger x$ 。显然 $x^\dagger x$ 等于 x 的所有元素的模的平方之和，所以 $x^\dagger x \geq 0$ ，等号当且仅当 x 是零矢量时取到。

我们说 P 是正交矩阵，是指它是实数矩阵且满足 $P^T P = I$ 。推广到复数矩阵的情况，我们说 P 是酉矩阵（或么正矩阵），是指它满足 $P^\dagger P = I$ 。酉矩阵对应于把矢量旋转的线性映射。

我们说 A 是实对称矩阵，是指它是实数矩阵且满足 $A = A^T$ 。推广到复数矩阵的情况，我们说 A 是厄米矩阵（或厄米特矩阵），是指它满足 $A = A^\dagger$ 。例如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & -4 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

就是厄米矩阵。

设 A 是 $n \times n$ 厄米矩阵，通过求解方程

$$\det(\lambda I - A) = 0, \quad (4.8)$$

可以得到 n 个本征值（ m 重根视为 m 个），这些本征值一定是实数。这是因为如果存在非零向量 x 使得 $Ax = \lambda x$ ，则 $\lambda x^\dagger x = x^\dagger Ax = (Ax)^\dagger x = \lambda^* x^\dagger x$ 。

只出现 $m = 1$ 次的本征值对应的本征矢方向确定（但允许乘 -1 ），且和其他本征值的本征矢都正交。这是因为对两个本征值 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ （按前面讨论结果，它们都是实数），存在非零向量 x_1, x_2 使得 $Ax_1 = \lambda_1 x_1$ ， $Ax_2 = \lambda_2 x_2$ ，于是有 $\lambda_1 x_1^\dagger x_2 = (Ax_1)^\dagger x_2 = x_1^\dagger Ax_2 = \lambda_2 x_1^\dagger x_2$ ，即 $x_1^\dagger x_2 = 0$ 。

重复 $m > 1$ 次的本征值的所有本征矢构成（和其他本征值的本征矢都正交的） m 维线性子空间。可以取一组正交基，人为地使这些本征矢也两两正交；这样的取法当然有无穷多种。

根据前述讨论，对厄米矩阵 A 总是可以取一组正交归一化的本征矢，令它们为列向量就得到一个酉矩阵 U 。容易根据本征矢的定义直接验证 $U^\dagger A U$ 是一个以 A 的所有本征值为对角元的对角矩阵。

一般地，对一个方阵 S ，如果存在一个酉矩阵 U 使得 $U^\dagger S U$ 是对角矩阵，则称 S 可以酉对角化。在矩阵论中有一个深奥的定理：一个矩阵 S 可以酉对角化的充分必要条件是它和自己的共轭转置矩阵对易（也就是 $SS^\dagger = S^\dagger S$ ）——这样的矩阵叫正规矩阵 (Normal Matrix)。显然，酉矩阵和厄米矩阵都是正规矩阵，所以都能酉对角化。

4.1.2 矩阵的迹

一个方阵 A 的所有对角元素之和称为 A 的迹 (trace)，一般用 $\text{Tr}(A)$ 来表示。

对一个 $n \times m$ 的矩阵 A 和一个 $m \times n$ 的矩阵 B ，有

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A_{ij} B_{ji} = \text{Tr}(BA). \quad (4.9)$$

也就是说，两个矩阵乘积的迹和它们相乘的次序无关。

如果是多个矩阵相乘求迹，我们可以对它们进行“轮换”，例如

$$\text{Tr}(ABCD) = \text{Tr}(DABC) = \text{Tr}(CDAB) = \text{Tr}(BCDA). \quad (4.10)$$

对任意方阵 A 和同阶的满秩方阵 P 有

$$\text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr}(PP^{-1}A) = \text{Tr}(A). \quad (4.11)$$

即相似变换保持迹不变。由此我们知道，可对角化的矩阵（例如，实对称矩阵）的迹等于它所有本征值之和。

4.1.3 对角矩阵的矩阵函数

考虑对角矩阵

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \dots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

显然对任意正整数 k ，有

$$\Lambda^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \lambda_2^k & \\ & & \dots \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

我们约定 $\Lambda^0 = 1$ ，这样上式对 $k = 0$ 也成立。

显然，对任何多项式 P ，有

$$P(\Lambda) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & & \\ & P(\lambda_2) & & \\ & & \dots & \\ & & & P(\lambda_n) \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

我们还可以定义

$$e^\Lambda \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Lambda^k = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \dots & \\ & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

实际上，并不需要把讨论限制在可以展开为幂级数的函数。对任何一元实变量函数 f ，我们都可以直接定义矩阵函数

$$f(\Lambda) \equiv \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & & \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \dots & \\ & & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

如果 f 是一个可导函数，矩阵函数 $f(\Lambda)$ 的微小变化量就可以写成

$$\begin{aligned} \delta f(\Lambda) &= \begin{pmatrix} \delta f(\lambda_1) & & & \\ & \delta f(\lambda_2) & & \\ & & \dots & \\ & & & \delta f(\lambda_n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f'(\lambda_1)\delta\lambda_1 & & & \\ & f'(\lambda_2)\delta\lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & f'(\lambda_n)\delta\lambda_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f'(\lambda_1) & & & \\ & f'(\lambda_2) & & \\ & & \dots & \\ & & & f'(\lambda_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\lambda_1 & & & \\ & \delta\lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \delta\lambda_n \end{pmatrix} \\ &= f'(\Lambda)\delta\Lambda \end{aligned} \quad (4.17)$$

由于两个对角矩阵相乘是可以交换次序的，所以我们可以这样写： $\delta f(\Lambda) = \delta\Lambda f'(\Lambda)$ 。

为了节省纸张（万一这本瞎写的书将来出版了呢！），我们下面把以 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为对角元的对角矩阵简记为 $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

4.1.4 实对称矩阵的矩阵函数

现在我们考虑任意的一个实对称矩阵 A ，它可以正交对角化为

$$P^T A P = \Lambda, \quad (4.18)$$

这里 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 是由本征值构成的对角矩阵。 P 是正交矩阵（满足 $P^T P = I$ ）。

等式 (4.18) 两边右乘 P^T ，左乘 P ，就得到

$$A = P \Lambda P^T, \quad (4.19)$$

对任意一元实变量函数 f ，我们定义

$$f(A) \equiv P f(\Lambda) P^T, \quad (4.20)$$

注意我们通常用 A^{-1} 来表示 A 的逆矩阵。但是对于 $f(x) = x^{-1}$ ，我们是否能把 $f(A)$ 写成 A^{-1} ？这会引入符号的混乱吗？

其实并不会！因为这两个涵义对应的是同一个矩阵。证明如下，设 $f(x) = x^{-1}$ ，则

$$\Lambda f(\Lambda) = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \text{diag}(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}) = I \quad (4.21)$$

于是

$$A f(A) = P \Lambda P^T P f(\Lambda) P^T = P \Lambda f(\Lambda) P^T = P P^T = I. \quad (4.22)$$

so far so good! 但是当我们试图把(4.17)推广到实对称矩阵时，却遭遇了巨大的困难：由于 A 的微小变化 δA 和 A 未必对易，一般来说 $\delta f(A)$ 既不能写成 $f'(A)\delta A$ ，也不能写成 $\delta A f'(A)$ ，而是要写成更加“对称”的形式。

我们先从具体的几个例子入手。

对 $f(A) = A^n$ （ n 为正整数），可以直接计算得出

$$\delta(A^n) = (A + \delta A)^n - A^n = A^{n-1} \delta A + A^{n-2} \delta A A + \dots + A \delta A A^{n-2} + \delta A A^{n-1}. \quad (4.23)$$

对于 $f(A) = A^{-1}$ ，由于 $A f(A) = I$ 是不变量，所以 $\delta A f(A) + A \delta f(A) = 0$ ，左乘 A^{-1} 就可以得到

$$\delta(A^{-1}) = -A^{-1} \delta A A^{-1}. \quad (4.24)$$

容易由此得到对任意正整数 n ，

$$\delta(A^{-n}) = -A^{-1} \delta A A^{-n} - A^{-2} \delta A A^{-n+1} - \dots - A^{-n+1} \delta A A^{-2} - A^{-n} \delta A A^{-1}. \quad (4.25)$$

但是，如果是 $f(x) = e^x$ 这样有无穷多个幂次的，或者像 $f(x) = \ln|x|$ 这样都无法展成统一的幂级数的函数，该怎么办呢？

对于一般的可导函数 $f(x)$ ，我们很难获得 $\delta f(A)$ 和 δA 之间的明确关系。不过，我们可以退而求其次，计算 $\delta f(A)$ 的迹。由于迹的运算允许矩阵相乘交换次序，就可以得到

$$\text{Tr}[\delta f(A)] = \text{Tr}[f'(A)\delta A] = \text{Tr}[\delta A f'(A)]. \quad (4.26)$$

这个结论的证明过程如下：

由于 $P^T P = I$ 是不变量，所以

$$\delta P^T P + P^T \delta P = 0. \quad (4.27)$$

此外，有

$$\delta A = \delta(P\Lambda P^T) = P\delta\Lambda P^T + \delta P\Lambda P^T + P\Lambda\delta P^T. \quad (4.28)$$

和

$$\begin{aligned} \delta f(A) &= \delta(Pf(\Lambda)P^T) \\ &= P[\delta f(\Lambda)]P^T + \delta P f(\Lambda)P^T + P f(\Lambda)\delta P^T \\ &= P\delta\Lambda f'(\Lambda)P^T + \delta P f(\Lambda)P^T + P f(\Lambda)\delta P^T. \end{aligned} \quad (4.29)$$

以及按照定义

$$f'(A) = P f'(\Lambda) P^T. \quad (4.30)$$

于是有

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\delta f(A)] &= \text{Tr}[P\delta\Lambda f'(\Lambda)P^T] + \text{Tr}[\delta P f(\Lambda)P^T] + \text{Tr}[P f(\Lambda)\delta P^T] \\ &= \text{Tr}[\delta\Lambda f'(\Lambda)] + \text{Tr}[(P^T \delta P + \delta P^T P) f(\Lambda)] \\ &= \text{Tr}[\delta\Lambda f'(\Lambda)] \end{aligned} \quad (4.31)$$

和

$$\begin{aligned} \text{Tr}[f'(A)\delta A] &= \text{Tr}[P f'(\Lambda)P^T (P\delta\Lambda P^T + \delta P\Lambda P^T + P\Lambda\delta P^T)] \\ &= \text{Tr}[P f'(\Lambda)P^T P\delta\Lambda P^T] + \text{Tr}[P f'(\Lambda)P^T \delta P\Lambda P^T] + \text{Tr}[P f'(\Lambda)P^T P\Lambda\delta P^T] \\ &= \text{Tr}[P f'(\Lambda)\delta\Lambda P^T] + \text{Tr}[\Lambda P^T P f'(\Lambda)P^T \delta P] + \text{Tr}[P f'(\Lambda)\Lambda\delta P^T] \\ &= \text{Tr}[P^T P f'(\Lambda)\delta\Lambda] + \text{Tr}[\Lambda f'(\Lambda)P^T \delta P] + \text{Tr}[f'(\Lambda)\Lambda\delta P^T P] \\ &= \text{Tr}[f'(\Lambda)\delta\Lambda] + \text{Tr}[\Lambda f'(\Lambda) (P^T \delta P + \delta P^T P)] \\ &= \text{Tr}[f'(\Lambda)\delta\Lambda] \end{aligned} \quad (4.32)$$

结合 (4.31) 和 (4.32) 即得证 (4.26).

4.1.5 行列式的绝对值

由于正交矩阵的行列式为 1，等式(4.19)意味着

$$\det(A) = \det(\Lambda) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n. \quad (4.33)$$

如果 A 是满秩矩阵（意味着 $\det(A) \neq 0$ ），就可以 (4.33) 两边取绝对值后再取对数，

$$\ln|\det(A)| = \ln|\lambda_1| + \ln|\lambda_2| + \dots + \ln|\lambda_n| = \text{Tr}(\ln|\Lambda|). \quad (4.34)$$

需要注意的是，在很多文献（尤其是数学书）里， $|\Lambda|$ 表示 Λ 的行列式，我们这里不采用这个习惯。在上面的写法里， $\ln|\Lambda|$ 表示对 Λ 取 $f(x) = \ln|x|$ 对应的矩阵函数。

因为 $\text{Tr}[f(A)] = \text{Tr}[Pf(\Lambda)P^T] = \text{Tr}[P^T Pf(\Lambda)] = \text{Tr}[f(\Lambda)]$ 。令 $f(x) = \ln|x|$ ，即有 $\text{Tr}(\ln|A|) = \text{Tr}(\ln|\Lambda|)$ 。再结合(4.34)，就有

$$\ln|\det(A)| = \text{Tr}(\ln|A|). \quad (4.35)$$

注意到 $f(x) = \ln|x|$ 这个函数的导函数为 $\frac{1}{x}$ （注意分母是 x 而不是 $|x|$ ，因为 $\ln|x|$ 在 $x < 0$ 时是单调下降的），就得到

$$\delta \ln|\det(A)| = \text{Tr}(A^{-1} \delta A). \quad (4.36)$$

或者其等价的形式

$$\delta|\det(A)| = |\det(A)| \text{Tr}(A^{-1} \delta A). \quad (4.37)$$

如果取 A 为度规的协变形式 $g_{\mu\nu}$ ，那么根据 (4.37) 就有

$$\delta|\det(g)| = |\det(g)| g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (4.38)$$

这里我们用 $\det(g)$ 来表示协变形式 $g_{\mu\nu}$ 的行列式。之所以可以把下标省略掉，是因为在广义相对论里一般都不讨论逆变 $g^{\mu\nu}$ 的行列式。

根据(4.24)就有

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta g_{\alpha\beta}. \quad (4.39)$$

我们绕了一个大圈，其实主要就是为了获得(4.38)和 (4.39) 这两个结果。

4.2 物理体积元

在坐标变换 $u \rightarrow \tilde{u}$ 下，按张量的变换规则

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^\mu} g_{\alpha\beta} \frac{\partial u^\beta}{\partial \tilde{u}^\nu}. \quad (4.40)$$

把上式右边看成三个矩阵相乘，按照乘积的行列式等于行列式的乘积，知道

$$\det(\tilde{g}) = \left[\det\left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}\right) \right]^2 \det(g). \quad (4.41)$$

注意一个有趣的地方：坐标变换不改变 $\det(g)$ 的正负号。

注意到坐标体积元的变换规则为

$$\left| \det\left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}}\right) \right| |d\tilde{u}^1 d\tilde{u}^2 \dots d\tilde{u}^m| = |du^1 du^2 \dots du^m| \quad (4.42)$$

我们可以取 $\sqrt{|\det(g)|} |du^1 du^2 \dots du^m|$ 作为空间的“物理体积元”——它在坐标变换下是不变量（也就是标量）！为了书写方便，我们采用 dV_{phys} 这个符号来标记物理体积元，用 dV_{coor} 这个符号来标记空间体积元。也就是说 $dV_{\text{coor}} \equiv |du^1 du^2 \dots du^m|$ ， $dV_{\text{phys}} \equiv \sqrt{|\det(g)|} dV_{\text{coor}} = \sqrt{|\det(g)|} |du^1 du^2 \dots du^m|$ 。

体积元当然是用来进行体积分的，我们在进行体积分时，默认都沿着所有坐标增大的方向进行积分，以此来保证 $du^1 du^2 \dots du^m = |du^1 du^2 \dots du^m|$ 。当然，你可能会产生一些困惑——是不是允许“体积元”带符号会更加自然和灵活？答案是肯定的，但是这样会涉及很多可能会毁掉幼儿园快乐时光的新概念（例如，微分形式），我暂时还不打算这么干。

4.2.1 弯曲空间的高斯定理

有了物理体积的概念，我们可以把静电学的高斯定理推广到弯曲空间。

用联络的表达式(2.16)可以直接得到下面的恒等式：

$$\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\mu} \quad (4.43)$$

再利用(4.38)，有

$$\frac{\partial \sqrt{|\det(g)|}}{\partial u^\mu} = \frac{1}{2\sqrt{|\det(g)|}} \frac{\partial |\det(g)|}{\partial u^\mu} = \frac{\sqrt{|\det(g)|}}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\mu} = \sqrt{|\det(g)|} \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda. \quad (4.44)$$

由此可以证明任意一个矢量场 A 的“物理散度” $(\nabla A)_\mu^\mu$ 和物理体积元的乘积等于 $\sqrt{|\det(g)|} A$ 的“坐标散度”和坐标体积元的乘积，也就是

$$(\nabla A)_\mu^\mu dV_{\text{phys}} = \frac{\partial \left(\sqrt{|\det(g)|} A^\mu \right)}{\partial u^\mu} dV_{\text{coor}}. \quad (4.45)$$

实际上，上式两边都代表 A 在小体积元表面上的法向通量（净流出量）。只不过左边是在物理空间进行表述的，右边是在数学坐标空间进行表述的。由于表面净流出量是可加量，所以对一块空间区域 Ω 而言，

$$\int_{\Omega} (\nabla A)^{\mu}_{\mu} dV_{\text{phys}} = \int_{\Omega} \frac{\partial \left(\sqrt{|\det(g)|} A^{\mu} \right)}{\partial u^{\mu}} dV_{\text{coord}} = \int_{\partial\Omega} A^{\mu} dS_{\mu}. \quad (4.46)$$

这里 $\partial\Omega$ 是区域 Ω 的边界， dS 是区域表面上的法向面积元。

4.3 在度规扰动下张量的变化

4.3.1 关于 $\delta g_{\mu\nu}$ 是不是张量的理解

为了更轻松地理解这一章地内容，我们可以采用一种非主流的观点：度规协变形式的变分可以看成是对超空间度量的法则进行了改动，导致 $g_{\mu\nu} = \vec{n}_{\mu} \cdot \vec{n}_{\nu}$ 发生了改变，变化量为 $\delta g_{\mu\nu}$ 。那么在这种观点下， $\delta g_{\mu\nu}$ 是不是张量呢？从我们对张量的幼儿园版定义（吃进矢量吐出数的机器）来看，它还不能完全算张量。微扰前的空间和微扰后的空间其实是两个**共享坐标系**的不同空间。我们可以用原空间的度规对原空间的张量进行指标升降，也可以用新空间的度规（协变形式为 $g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ ，逆变形式为 $g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta g_{\alpha\beta}$ ）对新空间的张量进行指标升降。事实上，容易验证 (4.39) 和下面的“新坐标系指标升降规则”是等价的：

$$g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu} = (g^{\mu\alpha} + \delta g^{\mu\alpha})(g^{\nu\beta} + \delta g^{\nu\beta})(g_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta}). \quad (4.47)$$

但是， δg 作为两个不同空间的张量之差，却不是任何一个空间里的张量——它不能用任何一空间的度规进行指标升降——这就是为什么 (4.39) 中 δg 不符合指标升降规则的原因。

不过，“共享坐标系”这个特殊设定使得微扰前和微扰后的空间里的张量服从一样的坐标变换规则，那么两个空间的张量差 δg 也服从同样的坐标变换规则。从这个观点看， δg 又像是张量。为了更好地区分，我们可以给这种“满足坐标变换规则，但是不满足指标升降规则”的 δg 起个名字，比如叫作**张量变分**。

但是等等，为什么要自己随便起个名字？文献中没有标准的名字吗？大概率是没有的（至少我没看到过）。我们选择的超空间叙事并不是文献中的标准视角。文献中一般的看法是：只要满足坐标变换规则的就是张量，指标升降会把一个张量变成另一个（即不承认不同形式的分量是同一个机器吐的数）。按照这种观点， $\delta g_{\mu\nu}$ 就是货真价实的张量； $\delta g^{\mu\nu}$ 是 $g_{\mu\nu}$ 的逆矩阵的变分，和把 $\delta g_{\mu\nu}$ 指标升上来的张量是两个不同的张量（相差一个负号）。

无论采用何种观点，为了不在混乱的符号中迷失，我们可以定义一个既满足坐标变换规则也满足指标升降规则的货真价实张量 $\delta \hat{g}$ ，并约定 $\delta \hat{g}_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu}$ （或者

等价的 $\delta\hat{g}^{\mu\nu} = -\delta g^{\mu\nu}$)。要注意的是, $\delta\hat{g}^{\mu}_{\nu} \equiv g^{\mu\lambda}\delta\hat{g}_{\lambda\nu}$ 和 δg^{μ}_{ν} 之间并无关系, 前者是通过把 $\delta g_{\mu\nu}$ 升指标获得的 (一般非零), 后者是扰动前后两个空间的 $g^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$ 之差 (恒为零)。

4.3.2 其他张量在度规扰动下的变化

虽然会被冠以非主流之名, 但为了保持“幼儿园版”的风格, 我就继续以我们的叙事角度出发讨论问题。这会导致更多“离经叛道”的理解方式的出现——但不影响任何计算结果。

从超空间的视角看, 扰动后的标架没有改变 (虽然它们之间的内积被重新定义了), 所以所有其他没有被扰动的 (即和空间几何无关的) 张量的协变分量不变。但是, 由于 $g_{\mu\nu}$ 改变了, 其逆矩阵——也就是用来组装逆标架的系数都发生了改变, 这导致扰动后的空间里的逆标架和扰动前空间里的逆标架不同。既然逆标架都发生了改变, 那么所有和空间几何无关的张量的逆变分量也都发生了改变——这实际上正是空间几何和物质作用量对话的方式之一 (另一种方式是通过影响物理体积元的大小)。例如, 设 A 是矢量场, 在扰动 $\delta g_{\mu\nu}$ 下, 其协变分量不变, 逆变分量的变化量 $\delta A^{\mu} = \delta(g^{\mu\nu}A_{\nu}) = \delta g^{\mu\nu}A_{\nu}$ 。

那么和空间几何无关且没有逆变指标的标量, 在度规扰动时就一定没有变化吗? 未必! 这涉及到标量是怎么定义的。如果是原生的标量 (比如圆周率, 或者一个底层的标量场), 确实不会在度规扰动时发生变化。但是如果是用高阶张量缩并得到的标量, 在度规扰动下就会发生改变——原因是我们定义缩并时需要同时投喂标架和逆标架, 而逆标架被度规扰动给改变了。

例如, 一个和空间几何无关的二阶张量场 T 的缩并 T^{μ}_{μ} 在度规扰动时的变化为

$$\delta(T^{\mu}_{\mu}) = \delta(g^{\mu\nu}T_{\nu\mu}) = T_{\nu\mu}\delta g^{\mu\nu} = -T_{\mu\nu}\delta\hat{g}^{\mu\nu} = -T^{\mu\nu}\delta\hat{g}_{\mu\nu}. \quad (4.48)$$

和空间几何无关的矢量场 A 的缩并 $A^{\mu}A_{\mu}$ 在度规扰动下的变化有三种不同的计算方法, 第一种是把它看成是二阶张量场 $A \otimes A$ 的两个指标的缩并, 直接套用上面的结果得到 $\delta(A_{\mu}A^{\mu}) = -A^{\mu}A^{\nu}\delta\hat{g}_{\mu\nu}$ 。第二种是先计算逆变分量的变化

$$\delta A^{\mu} = \delta(g^{\mu\nu}A_{\nu}) = A_{\nu}\delta g^{\mu\nu} = -A_{\nu}\delta\hat{g}^{\mu\nu}. \quad (4.49)$$

那么

$$\delta(A_{\mu}A^{\mu}) = A_{\mu}\delta A^{\mu} = -A_{\mu}A_{\nu}\delta\hat{g}^{\mu\nu} = -A^{\mu}A^{\nu}\delta\hat{g}_{\mu\nu}. \quad (4.50)$$

第三种方法颇有点“故意多绕几个圈”的感觉, 仅仅是为了演示各种算法的自治

性,

$$\begin{aligned}
\delta(A_\mu A^\mu) &= \delta(A^\mu A^\nu g_{\mu\nu}) \\
&= (\delta A^\mu) A^\nu g_{\mu\nu} + A^\mu (\delta A^\nu) g_{\mu\nu} + A^\mu A^\nu \delta g_{\mu\nu} \\
&= (-\delta \hat{g}^{\mu\alpha} A_\alpha) A^\nu g_{\mu\nu} + A^\mu (-\delta \hat{g}^{\nu\alpha} A_\alpha) g_{\mu\nu} + A^\mu A^\nu \delta \hat{g}_{\mu\nu} \\
&= -A_\mu A_\alpha \delta \hat{g}^{\mu\alpha} - A_\nu A_\alpha \delta \hat{g}^{\nu\alpha} + A^\mu A^\nu \delta \hat{g}_{\mu\nu} \\
&= -2A_\mu A_\nu \delta \hat{g}^{\mu\nu} + A^\mu A^\nu \delta \hat{g}_{\mu\nu} \\
&= -A^\mu A^\nu \delta \hat{g}_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{4.51}$$

最后, 我们来看一个特殊的量——联络在度规扰动下的变化量 $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ 。注意到联络的坐标变换规则(2.19)里多出来的那项 $\frac{\partial \tilde{u}^\lambda}{\partial u^\alpha} \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial \tilde{u}^\mu \partial \tilde{u}^\nu}$ 仅依赖于新旧坐标之间的关系, 而度规扰动前后的空间是共享坐标系的, 所以在 $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ 的坐标变换规则里, 多出来的项消掉了, 使得 $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ 满足张量的坐标变换规则——也就是说联络本身虽然不是张量, 但是它在度规扰动下的改变量 $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ 反而是一个张量。

事实上, 利用 (2.16) 可以直接计算得到 $\delta\Gamma$ 的显式张量形式:

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} \left[(\nabla \delta \hat{g})_{\nu\mu}^\lambda + (\nabla \delta \hat{g})_{\mu\nu}^\lambda - (\nabla \delta \hat{g})_{\mu\nu}^\lambda \right]. \tag{4.52}$$

或者把指标 λ 降下来, 得到

$$\delta\Gamma_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[(\nabla \delta \hat{g})_{\nu\lambda\mu} + (\nabla \delta \hat{g})_{\mu\lambda\nu} - (\nabla \delta \hat{g})_{\mu\nu\lambda} \right]. \tag{4.53}$$

因为协变导数保留了张量的指标对称性, 而度规张量的两个指标是对称的, 所以上述结果也可以写成

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} \left[(\nabla \delta \hat{g})_{\mu\nu}^\lambda + (\nabla \delta \hat{g})_{\nu\mu}^\lambda - (\nabla \delta \hat{g})_{\mu\nu}^\lambda \right]. \tag{4.54}$$

以及

$$\delta\Gamma_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[(\nabla \delta \hat{g})_{\lambda\mu\nu} + (\nabla \delta \hat{g})_{\lambda\nu\mu} - (\nabla \delta \hat{g})_{\mu\nu\lambda} \right]. \tag{4.55}$$

4.3.3 响应张量

反过来, 如果知道一个标量 W 在任意坐标扰动下的变化为

$$\delta W = F^{\mu\nu} \delta \hat{g}_{\mu\nu}, \tag{4.56}$$

我们考虑在坐标变换 $u \rightarrow \tilde{u}$ 下 $F^{\mu\nu}$ 将如何改变。因为 δW 是坐标变换下的不变量 (这一点和它是不是组装的没关系), 而 $\delta \hat{g}$ 满足坐标变换规则

$$\delta \hat{g}_{\mu\nu} = \frac{\partial \tilde{u}^\alpha}{\partial u^\mu} \frac{\partial \tilde{u}^\beta}{\partial u^\nu} \delta \tilde{g}_{\alpha\beta} \tag{4.57}$$

于是

$$\tilde{F}^{\alpha\beta} \delta \hat{g}_{\alpha\beta} = \delta W = F^{\mu\nu} \delta \hat{g}_{\mu\nu} = F^{\mu\nu} \frac{\partial \tilde{u}^\alpha}{\partial u^\mu} \frac{\partial \tilde{u}^\beta}{\partial u^\nu} \delta \hat{g}_{\alpha\beta} \quad (4.58)$$

由于度规扰动 $\delta \hat{g}_{\alpha\beta}$ 是任意的，所以

$$\tilde{F}^{\alpha\beta} = F^{\mu\nu} \frac{\partial \tilde{u}^\alpha}{\partial u^\mu} \frac{\partial \tilde{u}^\beta}{\partial u^\nu}. \quad (4.59)$$

这说明 F 的逆变形式满足张量的坐标变换规则。或者说，(4.56) 可以作为二阶张量 F 的定义式。

既然 F 是新定义的，我们无须担心它是否满足指标升降规则，而可以直接用张量指标升降规则定义 $F_{\mu\nu}$ ，这样

$$\delta W = F_{\mu\nu} \delta \hat{g}^{\mu\nu} = -F_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (4.60)$$

也是成立的。

为了让语言更加形象，我们把在度规扰动下给出 (4.56)（或者等价的 (4.60)）的二阶张量 F 称为标量 W 的**响应张量**（嗯，这名字也是我随口编的）。根据(4.48)，我们立刻有了一个有趣的定理：

一个和空间几何无关的二阶张量 T 的迹 (T^μ_μ) 的响应张量就是 $-T$ 。

物理体积元作为标量，可以计算响应张量。根据 (4.38) 容易得到

$$\delta \sqrt{|\det(g)|} = \frac{\sqrt{|\det(g)|}}{2} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (4.61)$$

所以

$$\delta dV_{\text{phys}} = \frac{1}{2} dV_{\text{phys}} g^{\mu\nu} \delta \hat{g}_{\mu\nu}. \quad (4.62)$$

也就是说，

物理体积元的响应张量等于它和度规的乘积的一半。

最后，我们来研究里奇标量的响应张量。

$$\delta R = \delta (g^{\mu\nu} \mathcal{R}_{\mu\nu}) = \mathcal{R}_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta \mathcal{R}_{\mu\nu} = -\mathcal{R}^{\mu\nu} \delta \hat{g}_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta \mathcal{R}_{\mu\nu}. \quad (4.63)$$

在共享坐标系的前提下，偏微分算符和微扰算符 δ 可以交换次序，以及注意到 $\delta\Gamma$ 是张量

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{R}_{\mu\nu} &= \delta R_{\mu\alpha\nu}^\alpha \\
&= \delta \left(\frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\alpha}^\alpha}{\partial u^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha \right) \\
&= \frac{\partial\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial\delta\Gamma_{\mu\alpha}^\alpha}{\partial u^\nu} + \Gamma_{\lambda\alpha}^\alpha \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \delta\Gamma_{\lambda\alpha}^\alpha - \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha \delta\Gamma_{\mu\alpha}^\lambda - \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \delta\Gamma_{\lambda\nu}^\alpha \\
&= \left(\frac{\partial\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial u^\alpha} + \Gamma_{\lambda\alpha}^\alpha \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \delta\Gamma_{\lambda\nu}^\alpha - \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda \delta\Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \right) \\
&\quad - \left(\frac{\partial\delta\Gamma_{\mu\alpha}^\alpha}{\partial u^\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha \delta\Gamma_{\mu\alpha}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \delta\Gamma_{\lambda\alpha}^\alpha - \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda \delta\Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \right) \\
&= (\nabla\delta\Gamma)_{\mu\nu\alpha}^\alpha - (\nabla\delta\Gamma)_{\mu\alpha\nu}^\alpha \\
&= \frac{1}{2} \left[(\nabla\nabla\delta\hat{g})_{\mu\nu\alpha}^\alpha + (\nabla\nabla\delta\hat{g})_{\nu\mu\alpha}^\alpha - (\nabla\nabla\delta\hat{g})_{\alpha\mu\nu}^\alpha - (\nabla\nabla\delta\hat{g})_{\mu\nu\alpha}^\alpha \right] \quad (4.64)
\end{aligned}$$

再注意到度规 g 的协变导数为零，所以直接可以把 $g^{\mu\nu}$ 挪到协变导数符号后面进行升指标

$$\begin{aligned}
&g^{\mu\nu} \delta\mathcal{R}_{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2} \left[(\nabla\nabla\delta\hat{g})_{\nu\alpha}^{\alpha\nu} + (\nabla\nabla\delta\hat{g})_{\mu\alpha}^{\alpha\mu} - (\nabla\nabla\delta\hat{g})_{\alpha\nu}^{\alpha\nu} - (\nabla\nabla\delta\hat{g})_{\nu\alpha}^{\alpha\nu} \right] \\
&= (\nabla\nabla\delta\hat{g})_{\mu\nu}^{\mu\nu} - (\nabla\nabla\delta\hat{g})_{\mu\nu}^{\mu\nu} \quad (4.65)
\end{aligned}$$

最后的结果是

$$\delta R = -\mathcal{R}^{\mu\nu} \delta\hat{g}_{\mu\nu} + \left[(\nabla\nabla\delta\hat{g})_{\mu\nu}^{\mu\nu} - (\nabla\nabla\delta\hat{g})_{\mu\nu}^{\mu\nu} \right]. \quad (4.66)$$

虽然我们无法把后面括号内的两项写成一个张量乘以 $\delta\hat{g}_{\mu\nu}$ 的形式，但这两项具有散度的形式，在对物理体积元积分后会转化为边界积分。在做变分推导时，我们一般固定边界上的所有场，所以这两项没有积分贡献。所以，在作用量正比于 R 的情形我们通常认为 R 的“有效”响应张量是 $-\mathcal{R}$ 并直接忽略括号内的两项。

4.4 作用量和爱因斯坦方程

经典的广义相对论认为引力并不是一种真正的力（至少爱因斯坦是这样认为的，但也有一些大物理学家对此仍然持保留意见）：时空的弯曲影响着物质的运动，物质的分布和运动也影响着时空的弯曲。在暂时不考虑量子效应的情况下，我们希望用一个统一的、包含时空度规在内的作用量来描述物质和时空之间的这种互动。

在空间一小块区域内，有物质作用量 $\mathcal{L}_m dV_{\text{phys}}$ （这里 $\mathcal{L}_m$ 是物质作用量密度），我们还想添加描述这块区域有多弯曲的“几何作用量”。最最简单的，包含时空的

内禀弯曲的信息的标量就是里奇标量 $R \equiv R^{\alpha\beta}_{\alpha\beta}$ 。因此我们不妨假设几何作用量是 $\lambda R dV_{\text{phys}}$ ，这里 λ 是个待实验测量的常量——它有两个作用：一是让作用量的量纲正确；二是允许我们调节这个理论中时空对物质的响应的强弱程度。

物质的“能量动量张量”定义为物质作用量 $\mathcal{L}_m dV_{\text{phys}}$ 的响应张量的两倍。因此物质作用量的变化量可以用“能量动量张量密度” T 表示出来

$$\delta(\mathcal{L}_m dV_{\text{phys}}) = \frac{1}{2} (T^{\mu\nu} dV_{\text{phys}}) \delta \hat{g}_{\mu\nu}. \quad (4.67)$$

如果我们在固定坐标区域内对度规进行扰动，并假设在其边界上所有场都没有扰动（这样散度项的积分都可以忽略），那么作用量的变分等于

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int (\mathcal{L}_m dV_{\text{phys}} + \lambda R dV_{\text{phys}}) \\ &= \int (\delta(\mathcal{L}_m dV_{\text{phys}}) + \lambda dV_{\text{phys}} \delta R + \lambda R \delta dV_{\text{phys}}) \\ &= \int \left(\frac{1}{2} T^{\mu\nu} - \lambda \mathcal{R}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \lambda R g^{\mu\nu} \right) \delta \hat{g}_{\mu\nu} dV_{\text{phys}} \\ &= \int \left(\frac{1}{2} T^{\mu\nu} - \lambda G^{\mu\nu} \right) \delta \hat{g}_{\mu\nu} dV_{\text{phys}} \end{aligned} \quad (4.68)$$

我们在推导过程中忽略了体积分为零的散度项。并在最后利用了爱因斯坦张量的定义 $G^{\mu\nu} = \mathcal{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu}$ 。

让作用量的变分为零，即得到爱因斯坦方程

$$G^{\mu\nu} = \frac{1}{2\lambda} T^{\mu\nu}. \quad (4.69)$$

我们后面会展示：通过在弱场低速近似下和牛顿引力理论对比，可确定 $\lambda = \frac{1}{16\pi G_N}$ ，这里 $G_N \approx 6.674 \times 10^{-11} \text{m}^3/\text{s}^2/\text{kg}$ 是牛顿引力常数。所以最后的

爱因斯坦方程：

$$G^{\mu\nu} = 8\pi G_N T^{\mu\nu}. \quad (4.70)$$

这个方程和测地线方程一起构成了广义相对论的基本理论框架。

4.5 作用量和度规的符号问题

我们导出了广义相对论的核心方程：引力场方程（物质导致时空弯曲）和测地线方程（时空曲率影响物质运动）。我们来考虑和它们相关的一些符号问题。

引力场方程由 $\delta S = 0$ 导出，如果把作用量 S 乘以任何非零常系数，引力场方程保持不变。那么我们是怎么“客观”地决定物质的作用量前的系数，使得作用量的响应张量的两倍确实是“能量动量张量”呢？难道“能量”还允许随便乘一

个系数？实际上，我们是反向操作的：我们在 $\mathcal{L}_m$ 前选取合适的系数，使得它在 Minkowski 空间里的响应张量的两倍符合粒子物理或者场论中对能量动量张量的定义（通常要求 T^{00} 具有能量密度的涵义）。只有做了这种“校准”，才能保证 R 前面的符号为 $\frac{1}{16\pi G_N}$ 。

在狭义相对论的 Minkowski 时空中，我们既可以选择 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ （相对论常用），也可以选择 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ （粒子物理常用）。更一般地，改变度规的符号并不改变空间的几何属性，在广义相对论框架内总是被允许的。注意给度规添加一个负号不会导致爱因斯坦张量的逆变形式 $G^{\mu\nu}$ 发生变化，但是 (4.67) 里的 $\delta\hat{g}_{\mu\nu}$ 符号改变会导致 $T^{\mu\nu}$ 的符号随之改变。对此，文献中的处理方式有如下几种（可以采用其中的 1 种或者同时采用其中的 3 种）：

- 1 在所有物质的 $\mathcal{L}_m$ 的定义里也额外添加一个负号，使得 $T^{\mu\nu}$ 保持不变。
- 2 把能量动量张量改定义为物质作用量的响应张量的 -2 倍。
- 3 把里奇张量的定义改为黎曼张量的第一个和第四个指标的缩并，这样里奇张量和爱因斯坦张量的协变或者逆变形式都会相差一个负号。
- 4 修改 λ 的符号，使引力场方程成为 $G^{\mu\nu} = -8\pi GT^{\mu\nu}$ 。

其中第 2 条有一种很隐蔽的方式实现：把 (4.67) 改为 $\delta(\mathcal{L}_m dV_{\text{phys}}) = \frac{1}{2} (T_{\mu\nu} dV_{\text{phys}}) \delta g^{\mu\nu}$ （注意这里的 $\delta g^{\mu\nu} = -\delta\hat{g}^{\mu\nu}$ ）。这一招非常地阴，导致我当年学习相对论时折腾了很久才搞清楚到底发生了什么……

由于相对论社群和粒子物理社群在度规符号选择上的分歧，各种文献出现了千奇百怪的符号差异，折磨着读论文的学生的身心。在和乱七八糟的符号战斗多年之后，我现在倾向于不看其他人写的东西选择第一种方案。原因是它的物理图像更清楚：始终保持 T^{00} 具有“能量密度”的涵义。

例题 4: 在采用 $(-, +, +, +)$ 度规符号习惯时，经典实标量场 φ 的作用量密度等于

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^\mu(\nabla\varphi)_\mu - V(\varphi). \quad (4.71)$$

计算它的能量动量张量密度 $T^{\mu\nu}$ 。

解答： 因为 $-\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^\mu(\nabla\varphi)_\mu$ 是一个和空间几何无关的二阶张量 $-\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^\mu(\nabla\varphi)^\nu$ 的迹，所以它的响应张量为自身乘以 -1 ，即 $\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^\mu(\nabla\varphi)^\nu$ ；而 $V(\varphi)$ 是一个底层标量，响应张量为零。于是 $\mathcal{L}_m$ 的总响应张量为 $\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^\mu(\nabla\varphi)^\nu$ 。

$$\delta(\mathcal{L}_m dV_{\text{phys}}) = dV_{\text{phys}} \delta\mathcal{L}_m + \mathcal{L}_m \delta dV_{\text{phys}} = \frac{1}{2} [(\nabla\varphi)^\mu(\nabla\varphi)^\nu + g^{\mu\nu} \mathcal{L}_m] \delta\hat{g}_{\mu\nu} dV_{\text{phys}}. \quad (4.72)$$

于是能量动量张量，也就是 $\mathcal{L}_m dV_{\text{phys}}$ 的响应张量的两倍，等于 $[(\nabla\varphi)^\mu(\nabla\varphi)^\nu + g^{\mu\nu} \mathcal{L}_m] dV_{\text{phys}}$ 。

能量动量张量密度就是

$$T^{\mu\nu} = (\nabla\varphi)^\mu(\nabla\varphi)^\nu + g^{\mu\nu}\mathcal{L}_m. \quad (4.73)$$

在 Minkowski 度规 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ 下，我们可以检验 (4.73) 给出的 T^{00} 确实为经典标量场的能量密度。按照处理度规符号的第一种方式，在把度规改为粒子物理社群惯用的 $(+, -, -, -)$ 符号时，要把作用量改为 $\mathcal{L}_m = -\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^\mu(\nabla\varphi)_\mu + V(\varphi)$ (注意这并不是简单把 $\mathcal{L}_m$ 乘以 -1 ，而是要考虑到 $(\nabla\varphi)^\mu$ 在改变度规符号时也改变了符号)。这和我们通常在经典力学中拉氏量 $\sim$ “动能减去势能” 并不一致，原因是经典力学总是在三维欧氏空间，也就是 $(-, +, +, +)$ 符号体系的低速弱场近似下考虑问题的。

4.6 弯曲空间的“平移对称性”和守恒方程

我们在幼儿园小班课程《理论力学》中学习过：平直时空里作用量的时空平移对称性对应着动量守恒和能量守恒方程。显然，任何独立系统都具有时空平移对称性，因而其能量和动量守恒。

在弯曲的空间里，每个张量都生活在固定的时空点，并不能被随意地移动到不同的点。那么“时空平移对称性”还会存在吗？

一般情况下的“时空平移对称性”要在物质和时空的“相对虚位移”的概念下理解。也就是说，我们要明目张胆地违反“张量”必须生活在一个固定点的规则，把物质和时空背景相对错位一点点——就好像静力学里“虚位移”一样——这种错位是违反物理规则的。

虽然移动物质和移动时空都可以达到“错位”的效果，为了和前面的讨论更好地契合，我决定采用“移动时空”的方法。注意移动时空和坐标变换的区别：时空是由坐标系和度规联合描述的，“移动时空”的关键是要把坐标系**拖着度规张量一起**相对于物质移动。我们之前讲的坐标变换，其实是光移动坐标系而不改变每个点的度规张量（虽然自然标架变化会导致度规张量的分量变化，但度规张量这个“机器”本质上并没有改变），是没有任何物理效应的纯数学操作。

在平直时空里，我们可以选择一个合适的坐标系使得度规矩阵为常数矩阵，这样“必须拖着度规一起”这件事就可以被忽略掉了，从而轻松地得到“平直坐标系”下的能量动量守恒方程。在更一般的情况下，即使是在弯曲时空，如果度规不依赖于某个坐标，我们总是可以平移这个坐标而忽略“拖着度规一起”这件事情，从而得到对应动量的协变形式守恒（见(2.56)）。

现在，我们要研究最一般的情形，是时候把度规拖下水了！

如果单纯把时空（坐标系 + 度规）移动一下，会导致“移动前”和“移动后”的物质的时空坐标发生变化。这和我们之前讨论的度规变分里“共享坐标系”的概念有所冲突。为了完全转化为“度规变分”的情形，我们先做一个坐标变换把每个点的坐标增加一个小量，然后再通过移动时空把坐标“拉回来”。

考虑一个很微小的坐标变换：

$$\tilde{u}^\mu = u^\mu - \varepsilon^\mu. \quad (4.74)$$

这里的 ε^μ 是一个很小的矢量场（注意它不必是常数矢量），在讨论中仅保留 ε^μ 的一阶贡献。

对每个点 A ，我们都可以找到一个点 B ，使得 B 的新坐标和 A 的旧坐标严格相等。它们之间的关系如下表所示：

物理点	旧坐标	新坐标
A	u^μ	$u^\mu - \varepsilon^\mu$
B	$u^\mu + \varepsilon^\mu$	u^μ

注意在表里我们并没有区分 ε^μ 到底是在 A 点的还是 B 点的，是在旧坐标系还是在新的坐标系。这是因为这些细节并不影响 ε^μ 一阶近似的计算。

现在，我们把坐标系 $\tilde{u}^\mu$ 连带着度规一起“移动” ε^μ ，使得每个物理点处的坐标恢复如初。显然 B 处的新坐标和度规被移到了 A 处。也就是说，物理点 A 的坐标仍然恢复为 u^μ ，但是度规被替换为了 $\tilde{g}_{\mu\nu}(B)$ 。

注意这种“移动”是一种违反物理规律的“虚位移”，一般就破坏了超空间的内积定义，所以“坐标变换 + 移动时空”的净效果就可以看成一种度规变分：操作前后共享坐标系，但是度规发生了变化。

根据坐标变换的张量分量变换法则：

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(B) = \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^\mu} \frac{\partial u^\beta}{\partial \tilde{u}^\nu} g_{\alpha\beta}(B) \quad (4.75)$$

在旧坐标系中， B 的坐标为 $u^\mu + \varepsilon^\mu$ ，因此 $g_{\alpha\beta}(B) \approx g_{\alpha\beta}(A) + \varepsilon^\mu \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\mu}$ 。另外，我们无须区分 $\frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^\mu}$ 到底是在 B 点还是在 A 点计算的，因为在一阶近似下它都等于 $\delta_\mu^\alpha + \frac{\partial \varepsilon^\alpha}{\partial u^\mu}$ 。那么度规变分就是（新度规减去原度规，都在旧坐标系下的 A 点表述）：

$$\begin{aligned} \delta \hat{g}_{\mu\nu} &\approx \left(\delta_\mu^\alpha + \frac{\partial \varepsilon^\alpha}{\partial u^\mu} \right) \left(\delta_\nu^\beta + \frac{\partial \varepsilon^\beta}{\partial u^\nu} \right) \left(g_{\alpha\beta} + \varepsilon^\mu \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\mu} \right) - g_{\mu\nu} \\ &\approx g_{\alpha\nu} \frac{\partial \varepsilon^\alpha}{\partial u^\mu} + g_{\beta\mu} \frac{\partial \varepsilon^\beta}{\partial u^\nu} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial u^\alpha} \varepsilon^\alpha. \end{aligned} \quad (4.76)$$

利用协变微分的计算公式 (2.29) 以及联络的表达式 (2.16)，容易从上式得到

$$\delta \hat{g}_{\mu\nu} = (\nabla \varepsilon)_{\mu\nu} + (\nabla \varepsilon)_{\nu\mu}. \quad (4.77)$$

考虑一个区域 Ω 内的某种物质的作用量。如果让其边界 $\partial\Omega$ 上的 ε^μ 为零，那么坐标变换前后 Ω 都覆盖相同的坐标范围，所以坐标变换不改变物质作用量。如果进一步，如果“移动时空”也不改变物质作用量，我们就说该物质具有“时空平移对称性”。那么，对具有时空平移对称性的物质，“坐标变换 + 移动时空”的操作不改变 Ω 内的作用量，具体写出来就是

$$\int_{\Omega} \delta(\mathcal{L}_m dV_{\text{phys}}) = 0. \quad (4.78)$$

即

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} T^{\mu\nu} [(\nabla\varepsilon)_{\mu\nu} + (\nabla\varepsilon)_{\nu\mu}] = 0. \quad (4.79)$$

由于 $T^{\mu\nu}$ 是对称张量，两个积分项其实是一样的，所以

$$\int_{\Omega} T^{\mu\nu} (\nabla\varepsilon)_{\nu\mu} dV_{\text{phys}} = 0 \quad (4.80)$$

分部积分，

$$\int_{\Omega} \nabla_{\mu} (T^{\mu\nu} \varepsilon_{\nu}) dV_{\text{phys}} - \int_{\Omega} \varepsilon_{\nu} \nabla_{\mu} (T^{\mu\nu}) dV_{\text{phys}} = 0. \quad (4.81)$$

这里我们用了新的符号 ∇_{μ} 来表示 μ 坐标方向的协变导数。这个符号被大量文献采用，其实是协变导数的标准表示之一。其好处是可以清晰地表达是对哪个坐标求导（因此在分部积分时更清楚），缺点是无法体现协变导数是先求导再取指标（求导和取指标不可交换）。

第一个积分是物理空间的散度积分，所以可以转化为边界 $\partial\Omega$ 上的通量积分。因为边界 $\partial\Omega$ 上的 ε^μ 为零，所以第一个积分为零。于是有

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{\nu} \nabla_{\mu} (T^{\mu\nu}) dV_{\text{phys}} = 0. \quad (4.82)$$

因为 ε_{ν} 在 Ω 内部是可以任意取的，所以必须处处都有

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0. \quad (4.83)$$

这个方程叫作**能量动量张量的守恒方程**。

那么，什么样的物质具有“时空平移对称性”从而能量动量张量守恒呢？按照作用量原理，在物质和时空的“错位虚位移”下，独立的物质系统的作用量的一阶改变量 $\delta S = 0$ （这条规则决定了物质的运动方程）。因此，**独立系统的作用量具有时空平移对称性，从而(4.83)成立**。

4.7 课后练习

习题 5: 如果把宇宙的作用量换做

$$S = \int (\mathcal{L}_m + \lambda R + \alpha R^2) dV_{\text{phys}}$$

推导引力场方程。

5. 低速弱场近似

我们要解决在上一章我们遗留的一个问题：作用量里 R 前的待定系数 λ 是如何被确定为 $\frac{1}{16\pi G_N}$ 的？基本的思路是在低速弱场极限下对比广义相对论和牛顿力学。

5.1 进入现实世界后的一些符号约定

之前我们始终是针对一般的任意维弯曲空间讨论的。从这一章开始，我们将把研究对象局限于我们所处四维时空。事实上，如果是任意维空间，就连 $\lambda = \frac{1}{16\pi G_N}$ 这件事情也无法成立（因为量纲对不上）。

在四维时空中，我们遵循绝大多数文献的习惯：把时空坐标写作 (x^0, x^1, x^2, x^3) ，其中 x^0 在绝大多数时候具有类似于“时间”的涵义。我们前面喜欢用的坐标字母 u 在广义相对论的文献中更多地是代表四维速度，我们一般不再用它表示坐标，以免和四维速度混淆。希腊字母指标 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 默认是时空指标，缩并时对 $0, 1, 2, 3$ 求和，而拉丁字母指标 $i, j, k, \dots$ 默认是“空间指标”，在缩并时对 $1, 2, 3$ 求和。最后，我们将用一个更为精简的符号 ∂_μ 来表示 $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ ，用一个文献中非常常用的 ∇_μ 符号表示沿第 μ 个坐标方向的协变导数。例如对矢量场 A ，协变导数 $(\nabla A)^\mu_\nu$ 也可以写成 $\nabla_\nu A^\mu$ ——我们在上一章末尾已经使用过这种符号了。

根据上一章末的讨论：为了明确地写出物质的作用量，我们还需要先选定度规符号习惯 $(-, +, +, +$ 或 $+, -, -, -)$ 。

对一个静止质量非零的粒子，其 ds^2 永远无法穿过零（ $ds^2 = 0$ 意味着在其自身参考系内时间停滞），所以单个粒子的 ds^2 的符号（正负号）是个不变量。对于

存在因果关联的任意两个粒子，我们做一个看上去十分“合理”的假设：总是存在让它们“一起旅行”一段时间（世界线部分重合）的可操作方案（比如用很小的力慢慢地把它们挪到一起），那么它们的 ds^2 符号必须一致。所以可观测宇宙内所有静止质量非零的粒子的 ds^2 符号是相同的。对度规的符号习惯的选择只有两种结果：让所有静止质量大于零的粒子的世界线满足 $ds^2 > 0$ （对应 Minkowski 空间的 $+, -, -, -$ 选择），或者反过来让所有静止质量大于零的粒子的世界线满足 $ds^2 < 0$ （对应 Minkowski 空间的 $-, +, +, +$ 选择）。

在后面的大多数讨论中，除非另作说明，我们默认将采用粒子 $ds^2 \geq 0$ （对应 Minkowski 空间 $+, -, -, -$ ）的“粒子物理社群习惯”。这样做的好处是让长度元 ds 同时具有了粒子固有时变化量的意义（在粒子自身参考系里，空间位移为零，所以 ds^2 等于时间位移的平方）。在另一种选择习惯（相对论社群习惯）里，则需要另外定义一个符号 $d\tau = \sqrt{-ds^2}$ 来标记粒子的固有时变化量。

5.2 简单物理对象的能量动量张量

在上一章我们研究了一个经典标量场的能量动量张量，但宏观世界的绝大多数物质都以很复杂的形式存在。我们需要把宏观物质进行抽象建模才能（近似）计算它们的能量动量张量。下面举几个粒子。

例题 5: 写出一个在自身参考系下质量密度为 ρ 的均匀无转动刚体的能量动量张量密度。设刚体的四维速度 $v^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ 已知。

解答： 先把刚体近似看作质点，其作用量可以写成

$$\mathcal{L}_m dV_{\text{phys}} = C \int ds. \quad (5.1)$$

这里的 C 是待定的系数（我们将按照最后的 T^{00} 具有能量密度的涵义这个要求来确定 C ）。右边积分在 dV_{phys} 所划定的小体积内进行（我们假定了该小体积在刚体世界线内，因为在世界线外的能量动量张量为零无须考虑）。为了进行变分，我们不能直接认定 ds 是测地线给出的解，而是先要把刚体世界线参数化为 $x^\mu(t)$ （ t 为任意沿着世界线单调变化的实参数）。那么

$$\mathcal{L}_m dV_{\text{phys}} = C \int \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} dt. \quad (5.2)$$

两边进行变分，得到

$$\delta(\mathcal{L}_m dV_{\text{phys}}) = \frac{C}{2} \int \frac{\frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}}{\sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}}} \delta \hat{g}_{\mu\nu} dt. \quad (5.3)$$

等式右边分子分母都乘以 $\frac{dt}{ds}$ 得到

$$\delta(\mathcal{L}_m dV_{\text{phys}}) = \frac{C}{2} \int \frac{\frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}}{\sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}}} \delta \hat{g}_{\mu\nu} ds. \quad (5.4)$$

分母的 $g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = \frac{ds^2}{ds^2} = 1$, 所以

$$\delta(\mathcal{L}_m dV_{\text{phys}}) = \frac{C}{2} \int \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \delta \hat{g}_{\mu\nu} ds. \quad (5.5)$$

于是能量动量张量为响应张量的两倍, 即

$$T^{\mu\nu} dV_{\text{phys}} = C \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} ds. \quad (5.6)$$

这里的 ds 是 dV_{phys} 内包含的粒子固有时长度。在刚体自身参考系内 dV_{phys} 就可以写成刚体自身参考系内观测到的三维体积 (记作 dV_3) 和 ds 的乘积, 即 $dV_{\text{phys}} = dV_3 ds$, 于是上面结果可以写成:

$$T^{\mu\nu} = \frac{C}{dV_3} v^\mu v^\nu \quad (5.7)$$

从刚体自身参考系来看, 四维速度 $v^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ 等于 $(1, 0, 0, 0)$, 即 $T^{00} = \frac{c}{dV_3}$, 其余元素均为零。为了使 T^{00} 具有能量密度 ρ (在理想刚性假设下, 可以忽略内能) 的涵义, 必须取 $C = \rho dV_3 = m$ 。最后我们得到

$$T^{\mu\nu} = \rho v^\mu v^\nu. \quad (5.8)$$

在上面习题的讨论中, 我们获得了质点的作用量为 $m \int ds$ 。如果我们采取 $-, +, +, +$ 的度规符号习惯, (按照我们解决符号问题的方案 1) 就会得到作用量为 $-m \int d\tau$ (这里固有时 $d\tau = \sqrt{-ds^2}$)。

利用四维动量 $p^\mu \equiv m v^\mu$, 在一个小体积元内的粒子能量动量张量可以写作

$$T^{\mu\nu} dV_{\text{phys}} = m v^\mu v^\nu ds = \frac{p^\mu p^\nu}{p^0} dx^0. \quad (5.9)$$

这里的 dx^0 是 dV_{phys} 内包含的“时间坐标跨度”。最后这个结果已经不显含质量以及粒子固有时 ds , 所以也适用于 (可以看成 m 和 ds 都趋向于零的) 光子等没有静止质量的粒子。

例题 6: 对在流体元自身静止的参考系内能量密度为 ρ ，压强为 p 的理想流体，计算它的能量动量张量密度。设时空度规以及流体元的四维速度 v^μ 均已知。

解答: 我们先在在流体元自身静止的参考系里进行计算。为了叙述方便，仍然用符号 x^μ 来描述坐标系。这个坐标系在流体元所在点的度规为 Minkowski 度规 $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ ，实际上就是流体元的“观测标架”（关于观测标架的理论我们后面还会详细介绍）。流体元的宏观四维速度 $v^\mu = (1, 0, 0, 0)$ 。

设流体元在自身静止参考系里的三维体积为 dV_3 ，并考虑物理体积元 $dV_{\text{phys}} = dV_3 dx^0$ （这里 dx^0 其实是流体元的一小段固有时）。

流体元实际上包含了大量在运动的微观粒子。要注意流体元的静止参考系不等于微观粒子的静止参考系，微观粒子的四维速度也不等于流体元的四维速度 v^μ 。把微观粒子在流体静止参考系里的四维动量记作 p^μ ，那么按照能量密度和压强的定义，有

$$\rho \equiv \frac{1}{dV_3} \sum p^0; \quad p \equiv \frac{1}{3dV_3} \sum \frac{(p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2}{p^0}. \quad (5.10)$$

求和对流体元内的所有微观粒子进行。

注意到在流体元静止参考系里，(5.9) 可以写作

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{dV_3} \sum \frac{p^\mu p^\nu}{p^0}, \quad (5.11)$$

我们来对各种 μ, ν 取值情况分别计算：

$\mu = \nu = 0$ 的情况最为简单

$$T^{00} = \frac{1}{V_3} \sum \frac{(p^0)^2}{p^0} = \frac{1}{V_3} \sum p^0 = \rho. \quad (5.12)$$

（嗯，很好， T^{00} 还是能量密度。）

对时间指标 0 和空间指标 i ，由于在流体元静止参考系里没有宏观的三维动量，

$$T^{i0} = T^{0i} = \frac{1}{dV_3} \sum \frac{p^0 p^i}{p^0} = \frac{1}{dV_3} \sum p^i = 0. \quad (5.13)$$

对任意两个空间指标 i, j ，由于在自身静止参考系里流体元的微观粒子分布是各向同性的，就有

$$T^{ij} = \frac{1}{dV_3} \sum \frac{p^i p^j}{p^0} = p \delta^{ij}. \quad (5.14)$$

注意到 $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ 以及 $v^\mu = (1, 0, 0, 0)$ 。上面的结果可以写作

理想流体的能量动量张量密度

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}. \quad (5.15)$$

按照定义， ρ 和 p 是流体元“观测自身”得到的能量密度和压强，和坐标系没有关系，因此是标量。这样上面的结果就是个张量等式。所以这个在特殊坐标系下计算的结果可以在任何坐标系下成立。

理想流体可以看作是生活中常见流体的零级近似（平衡态近似）。实际的流体常处于非平衡态，能量动量张量中还会有剪切粘滞修正，体积粘滞修正和热流修正，我们幼儿园小朋友们就不深入探讨那么难的问题了。

5.3 等效原理

等效原理是爱因斯坦广义相对论的思想基石，它深刻揭示了引力与惯性力之间的内在统一性。通俗地说，等效原理包含两个层次：弱等效原理和强等效原理。

弱等效原理（又称伽利略等效原理）指出，惯性质量与引力质量在数值上严格相等。这意味着，在均匀引力场中，所有物体——无论其质量、成分如何——都具有相同的加速度。一个经典的思想实验是：在远离任何星球的太空中，一个封闭的电梯以 9.8m/s^2 的加速度向上飞行，电梯内的人会感到自己被压在地板上，完全无法区分这是地球引力的作用还是在没有引力的太空中加速运动产生的惯性力。换言之，局部的引力效应与加速参考系中的惯性效应不可分辨。

强等效原理则更进一步，它不仅断言引力和惯性力的力学效应无法区分，还认为在时空的任意局部区域内，任何物理实验（包括电磁、原子核等非引力相互作用）都无法区分引力和加速。这意味着，在足够小的时空范围内，引力场可以被“消除”——通过选择一个自由落体的局部惯性参考系（即我们之前所说的让一个点联络全部消失的局域惯性系），所有物理定律恢复为狭义相对论中的形式（即没有引力时的平直时空中的定律）。

千万不要以为我们这里所说的“局域惯性系”就是牛顿力学（或者狭义相对论里）的惯性系。一个自由下落的电梯里（在忽略电梯大小的情况下）是广义相对论的局域惯性系，而停在地上的电梯（在忽略地球本身加速度的情况下）才是牛顿力学里的惯性系。其差别的来源是牛顿力学中认为引力是一种和时空几何无关的力，在惯性系中可以受到引力的作用；广义相对论认为引力的本质和“加速参考系”完全等价——所以感受不到引力的参考系才是真正的惯性系。

5.4 牛顿规范

坐标变换会引起度规各个分量的变化。即使是没有引力的狭义相对论空间，如果坐标系“选得不好”，其度规的形式也可能和 Minkowski 度规截然不同。也就是说，四维时空每个点的度规矩阵的 10 个自由度中有四个自由度仅仅反映了可以对四个坐标进行任意的变换这件事情（仅仅是对相同物理现象的不同数学描述），其余六个自由度才是描述物理的。文献中通常把这四个坐标系选择自由度称为“规范自由度”，把六个描述物理的自由度称为“物理自由度”。

为了和牛顿力学做比较，我们需要寻找一种类似于“牛顿惯性系”的坐标系。从数学上引出“牛顿惯性系”（更专业的说法是“牛顿规范”）需要对广义相对论的规范变换做深入的讨论。为了不严重破坏幼儿园的欢乐气氛，我们在此先避开这些内容，而只采用定性的说明。

在牛顿的时空观里，时间和空间没有关联，空间是各向同性的。按照这些要求，在采取 $+, -, -, -$ 的度规符号习惯时，就只允许下列形式的度规出现

$$g_{00} = e^{2\Phi}; \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -e^{-2\Psi}. \quad (5.16)$$

这里 Φ 和 Ψ 都是时空位置的函数，满足 $|\Phi| \ll 1$ 和 $|\Psi| \ll 1$ 。它们前面的系数 2 和 -2 是为了让 Φ 和 Ψ 有更简明的物理诠释，我们后面会解释。

显然(5.16)最多只能是某种近似，因为它在每个时空点只包含了两个自由度，还有四个体现空间“扭曲形变”的物理自由度被忽略掉了。但我们目前几乎只是基于物理直觉认为这些自由度在牛顿力学适用的场景下并不重要，但并无任何严谨的数学论证作为支撑。因此，我们只能在和牛顿力学的对比中“边打边看”，经验地验证(5.16)的适用性。

在弱场近似下，仅保留到 Φ 和 Ψ 的一阶近似，容易算出

$$\Gamma_{00}^i \approx \partial_i \Phi. \quad (5.17)$$

这里 $i = 1, 2, 3$ 是空间指标。设粒子的四维速度为 v^μ ，在低速近似 ($|v^i| \ll 1$)，以及归一化条件 $g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = 1$ 下，保留到 v^i 和 Φ, Ψ 的一阶近似，可以得到 $v^0 \approx e^{-\Phi} \gg v^i$ 。在测地线方程

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^i v^\mu v^\nu, \quad (5.18)$$

中，注意到联络 $\Gamma_{\mu\nu}^i$ 已经是一阶小量（或零）， $v^\mu v^\nu$ 就仅需保留到零阶近似，即只需要取 $\mu = \nu = 0$ 以及保留 $v^0 \approx 1$ ，即

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = -\partial_i \Phi \quad (5.19)$$

注意到在牛顿极限下固有时变化量 ds 可以直接近似认为是牛顿绝对时间的变化量。那么(5.19) 其实就是粒子在引力场中的加速度方程。右边的 Φ 就是引力势！

下面再来看 Ψ 的物理意义。取一个固定 x^0 的“时间切片”（即一个仅允许 x^1, x^2, x^3 变动的三维空间），可以把 g_{ij} 当成从度规为 $\eta_{ij} = \text{diag}(-1, -1, -1)$ 的欧几里德空间做度规扰动而来，对应 $\delta \hat{g}_{ij} = (1 - e^{-2\Psi})\delta_{ij} \approx 2\Psi\delta_{ij}$, $\delta \hat{g}^{ij} = \eta^{ik}\eta^{jl}\delta \hat{g}_{kl} = 2\Psi\delta^{ij}$ 。由于欧几里德空间 $\mathcal{R}_{\mu\nu} = 0$ ，所以根据(4.66)可以得到，在 Ψ 的一阶近似下，三维时间切片的 Ricci 标量（曲率标量）为

$$R_{3D} \approx -4\nabla_{3D}^2 \Psi. \quad (5.20)$$

这里 $\nabla_{3D}^2 \equiv \sum_{i=1}^3 \partial_i^2$ 是三维空间的拉普拉斯算符。也就是说，空间曲率正比于 Ψ 的空间梯度的单位体积表面净流出量。文献中一般称 Ψ 为曲率势。

5.5 确定作用量中待定参数

爱因斯坦场方程

$$\mathcal{R}^\mu_\nu - \frac{1}{2}Rg^\mu_\nu = \frac{1}{2\lambda}T_{\mu\nu}. \quad (5.21)$$

两边对指标 μ, ν 进行缩并，利用四维时空中 $g^\mu_\mu = 4$ ，得到

$$-R = \frac{1}{2\lambda}T^\alpha_\alpha. \quad (5.22)$$

把(5.22)代入(5.21)，得到爱因斯坦方程的里奇张量形式：

$$\mathcal{R}^\mu_\nu = \frac{1}{2\lambda} \left(T^\mu_\nu - \frac{1}{2}g^\mu_\nu T^\alpha_\alpha \right). \quad (5.23)$$

对理想流体，根据归一化条件可以设其四维速度近似为 $(v^0 \approx 1 - \Phi, v^1, v^2, v^3)$ 。利用 (5.15) 并近似到 v^i 的一阶项，就有

$$\mathcal{R}^0_0 = \frac{\rho + 3p}{4\lambda}, \quad (5.24)$$

$$\mathcal{R}^i_j \approx \frac{p - \rho}{4\lambda} \delta^i_j, \quad (5.25)$$

$$\mathcal{R}^i_0 \approx \frac{\rho + p}{2\lambda} v^i \quad (5.26)$$

利用(4.64)，近似到 Φ 和 Ψ 的一阶近似，可以得到

$$\mathcal{R}^0_0 \approx 3\partial_0^2 \Psi + \nabla_{3D}^2 \Phi, \quad (5.27)$$

$$\mathcal{R}^i_j \approx \partial_i \partial_j (\Phi - \Psi) + \delta^i_j (\partial_0^2 \Psi - \nabla_{3D}^2 \Psi), \quad (5.28)$$

$$\mathcal{R}^i_0 \approx -2\partial_0 \partial_i \Psi \quad (5.29)$$

对比 (5.25) 和 (5.28), 可以知道当 $i \neq j$ 时, $\partial_i \partial_j (\Phi - \Psi) = 0$ 。我们假设在无穷远没有物质处 Φ, Ψ 均趋向于零, 那么只能有 $\Phi = \Psi$ (引力势和曲率势处处相等)。于是利用 (5.24-5.29) 就可以解出:

$$\nabla_{3D}^2 \Phi = \frac{\rho}{4\lambda}, \quad (5.30)$$

$$\partial_0^2 \Phi = \frac{p}{4\lambda}, \quad (5.31)$$

$$\partial_0 \partial_i \Phi = -\frac{\rho + p}{4\lambda} v^i. \quad (5.32)$$

对比 (5.30) 和牛顿力学中的泊松方程, 立刻得到 $\frac{1}{4\lambda} = 4\pi G_N$, 即 $\lambda = \frac{1}{16\pi G_N}$ 。把 $\lambda = \frac{1}{16\pi G_N}$ 代入 (5.30-5.32) 得到

$$\nabla_{3D}^2 \Phi = 4\pi G_N \rho, \quad (5.33)$$

$$\partial_0^2 \Phi = 4\pi G_N p, \quad (5.34)$$

$$\partial_0 \partial_i \Phi = -4\pi G_N (\rho + p) v^i. \quad (5.35)$$

这些方程和低速极限下的流体运动方程是自洽的。事实上, 联立 (5.33) 和 (5.35) 可以得到理想流体低速极限下的连续性方程:

$$\partial_0 \rho + \nabla_{3D} \cdot [(\rho + p) v_{3D}] = 0. \quad (5.36)$$

联立 (5.33) 和 (5.34) 可以得到理想流体低速极限下的声波传播方程:

$$\partial_0^2 \rho - \nabla_{3D}^2 p = 0. \quad (5.37)$$

这些方程的自洽性至少说明我们一开始 (几乎只是基于物理直觉地) 忽略对应时空“形状扭曲”的四个自由度的做法在描述低速极限下的理想流体时没有出现任何问题。

5.6 引力场中的光线偏折

牛顿力学预言物体的运动轨迹会被“引力场” $\nabla_{3D} \Phi$ 偏折。那么光线的轨迹会不会被偏折呢? 如果把光子看成质量 $m \rightarrow 0$ 的粒子, 那么牛顿力学也要求光线的轨迹和其他物质一样发生偏折。

对低速运动物体, 其四维动量的主要分量是时间分量 $p^0 \approx m$ (静止质量能), 按照测地线方程 (2.50), 动量的空间分量的变化率

$$\frac{dp^i}{dx^0} \approx -\Gamma_{00}^i \frac{p^0 p^0}{p^0} \approx -p^0 \partial_i \Phi. \quad (5.38)$$

广义相对论预言和牛顿力学一样, 动量的改变率由其受到的“引力” $-p^0 \nabla_{3D} \Phi \approx -m \nabla_{3D} \Phi$ 决定。

但是对于光速或接近光速运动的粒子，其四维动量的空间分量和时间分量大小接近，这时空间曲率就要登场了。不妨设粒子运动方向大致为 x^3 方向，也就是说 $p^3 \approx p^0$ 且 p^1, p^2 均远小于 p^0 ，那么对 $i = 1, 2$ ，有 $\Gamma_{03}^i = 0$ ， $\Gamma_{00}^i \approx \partial_i \Phi$ ， $\Gamma_{33}^i \approx \partial_i \Psi$ ，所以测地线方程的最低阶近似为：

$$\frac{dp^i}{dx^0} \approx -\Gamma_{00}^i \frac{p^0 p^0}{p^0} - \Gamma_{33}^i \frac{p^3 p^3}{p^0} \approx -p^0 \partial_i (\Phi + \Psi). \quad (5.39)$$

沿着粒子运动轨迹对 $\Phi + \Psi$ 积分，记做

$$\psi_{\text{lens}} \equiv \int (\Phi + \Psi) dx^3. \quad (5.40)$$

那么在 x^1, x^2 张成的二维空间里计算 $-\nabla_{2D} \psi_{\text{lens}}$ 就可以获得 $\delta p^1/p^0, \delta p^2/p^0$ ，其实就是粒子运动的偏折角。因为这个原因，(5.40) 定义的 ψ_{lens} 通常被称为“引力透镜势”。

如果物质可以用理想流体近似描述，那么空间曲率势和引力势相等，粒子轨迹的偏折角就是（仅有引力势的）牛顿力学预言的两倍。

在广义相对论提出的初期，恰好有一次日全食，通过观测恒星的光线经过太阳附近时的偏折角，物理学家们确认了广义相对论的预言（牛顿力学结果的两倍）大致是正确的。不过，受限于当时的观测条件，观测误差较大，因此很难说是精确地检验了广义相对论。广义相对论能很快得到大多数物理学家地承认，还要依靠更为精准的“水星近日点进动”，我们在下一章进行介绍。

5.7 课后练习

习题 6: 接着这一章最后一部分内容，讨论粒子动量 p^3 分量的变化。

6. 广义相对论的球对称解

作为一个引力理论，必须解释地球为什么绕着太阳转。

在上一章我们证明了广义相对论的低速弱场极限和牛顿力学一致，这实际上包括了地球绕着太阳转的近似解释。在这一章我们要采用另外一种思路，在严格球对称假设下，严格地计算时空度规而不是采用低速弱场近似。这不但可以精确解释地球为什么绕着太阳转，还可能有助于我们发现广义相对论和牛顿力学的差异。

6.1 球对称的度规

球对称的度规可以写成

$$ds^2 = e^{2\Phi(r,t)} dt^2 - e^{-2\Psi(r,t)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (6.1)$$

要证明球对称的度规具有上述形式还需要给出“球对称”更为严谨的数学定义并进行一些推导，不过我们幼儿园小朋友以训练物理图像为主，就跳过这些繁琐的步骤了。

注意度规 (6.1) 具有类似我们上一章的“牛顿规范”的形式（仅有两个自由度）。在上一章，我们是基于牛顿极限下时空“形状扭曲”不重要的物理直觉这样写出度规；而在这一章，“形状扭曲”则是受严格球对称的条件限制而不被允许存在。

在下面的计算中，我们将用 t, r, θ, ϕ 来代替指标 $0, 1, 2, 3$ ，这样会更加直观，也是文献中常用做法。

6.1.1 计算联络

四维时空中一共有 $4^3 = 64$ 个联络, 由指标对称性 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$ 可以减少一半的计算量, 所以任务真的很轻松啊! (啊对对对……)

利用 $g_{tt} = e^{2\Phi}$, $g_{rr} = -e^{-2\Psi}$, $g_{\theta\theta} = -r^2$, $g_{\phi\phi} = -r^2 \sin^2 \theta$, 可以得到 $g^{tt} = e^{-2\Phi}$, $g^{rr} = -e^{2\Psi}$, $g^{\theta\theta} = -\frac{1}{r^2}$, $g^{\phi\phi} = -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}$ 。

利用(2.16), 可以直接计算

第一部分: $\Gamma_{\dots}^t$ 形式的联络

$$\Gamma_{tt}^t = \frac{1}{2} e^{-2\Phi} \partial_t e^{2\Phi} = \partial_t \Phi, \quad (6.2)$$

$$\Gamma_{tr}^t = \Gamma_{rt}^t = \frac{1}{2} e^{-2\Phi} \partial_r e^{2\Phi} = \partial_r \Phi, \quad (6.3)$$

$$\Gamma_{rr}^t = \frac{1}{2} e^{-2\Phi} \partial_t e^{-2\Psi} = -e^{-2(\Phi+\Psi)} \partial_t \Psi. \quad (6.4)$$

由于 t 相关的度规没有 θ, ϕ 依赖, θ, ϕ 相关的度规也没有 t 依赖, 所以剩下的 $\Gamma_{\dots}^t$ 形式的联络均为零。

第二部分: $\Gamma_{\dots}^r$ 形式的联络

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2} e^{2\Psi} \partial_r e^{2\Phi} = e^{2(\Psi+\Phi)} \partial_r \Phi, \quad (6.5)$$

$$\Gamma_{tr}^r = \Gamma_{rt}^r = -\frac{1}{2} e^{2\Psi} \partial_t (-e^{-2\Psi}) = -\partial_t \Psi, \quad (6.6)$$

$$\Gamma_{rr}^r = -\frac{1}{2} e^{2\Psi} \partial_r (-e^{-2\Psi}) = -\partial_r \Psi, \quad (6.7)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{1}{2} e^{2\Psi} \partial_r (-r^2) = -r e^{2\Psi}, \quad (6.8)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = \frac{1}{2} e^{2\Psi} \partial_r (-r^2 \sin^2 \theta) = -r e^{2\Psi} \sin^2 \theta. \quad (6.9)$$

其余 $\Gamma_{\dots}^r$ 形式的联络均为零。

第三部分: $\Gamma_{\dots}^\theta$ 形式的联络

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = -\frac{1}{2r^2} \partial_r (-r^2) = \frac{1}{r}, \quad (6.10)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = \frac{1}{2r^2} \partial_\theta (-r^2 \sin^2 \theta) = -\sin \theta \cos \theta. \quad (6.11)$$

其余 $\Gamma_{\dots}^\theta$ 形式的联络均为零。

第四部分: $\Gamma_{\dots}^\phi$ 形式的联络

$$\Gamma_{r\phi}^\phi = \Gamma_{\phi r}^\phi = -\frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta} \partial_r (-r^2 \sin^2 \theta) = \frac{1}{r}, \quad (6.12)$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\phi = -\frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta} \partial_\theta (-r^2 \sin^2 \theta) = \cot \theta. \quad (6.13)$$

其余 $\Gamma_{\dots}^\phi$ 形式的联络均为零。

6.1.2 计算里奇张量

四维时空的黎曼张量有 256 个分量，但只有 20 个是互相独立的。我们先计算几个比较复杂的黎曼张量

第一个黎曼张量： $rtrt$ 型

$$\begin{aligned}
 R^r_{trt} &= \partial_r \Gamma^r_{tt} - \partial_t \Gamma^r_{tr} + \Gamma^t_{tt} \Gamma^r_{tr} + \Gamma^r_{tt} \Gamma^r_{rr} - \Gamma^t_{tr} \Gamma^r_{tt} - \Gamma^r_{tr} \Gamma^r_{rt} \\
 &= e^{2(\Phi+\Psi)} [\partial_r^2 \Phi + 2\partial_r \Psi \partial_r \Phi + 2(\partial_r \Phi)^2] + \partial_t^2 \Psi \\
 &\quad - \partial_t \Phi \partial_t \Psi - e^{2(\Phi+\Psi)} \partial_r \Phi \partial_r \Psi - e^{2(\Phi+\Psi)} (\partial_r \Phi)^2 - (\partial_t \Psi)^2 \\
 &= e^{2(\Phi+\Psi)} [\partial_r^2 \Phi + \partial_r (\Psi + \Phi) \partial_r \Phi] + \partial_t^2 \Psi - \partial_t (\Phi + \Psi) \partial_t \Psi.
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

把指标 r 降下来，利用黎曼张量的反对称性知道 $R_{trtr} = R_{rttr}$ ，再把指标 t 升上去，就相当于乘了 $g^{tt} g_{rr} = -e^{-2(\Phi+\Psi)}$ ，

$$R^t_{rrt} = -[\partial_r^2 \Phi + \partial_r (\Psi + \Phi) \partial_r \Phi] - e^{-2(\Phi+\Psi)} [\partial_t^2 \Psi - \partial_t (\Phi + \Psi) \partial_t \Psi]. \tag{6.15}$$

第二个黎曼张量： $\theta t \theta t$ 型

$$R^\theta_{t\theta t} = \Gamma^r_{tt} \Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r} e^{2(\Phi+\Psi)} \partial_r \Phi. \tag{6.16}$$

同样的手段把 θ 降下来再把 t 升上去，相当于乘了 $g^{tt} g_{\theta\theta} = -r^2 e^{-2\Phi}$

$$R^t_{\theta t \theta} = -2r e^{2\Psi} \partial_r \Phi \tag{6.17}$$

第三个黎曼张量： $\phi t \phi t$ 型

$$R^\phi_{t\phi t} = \Gamma^r_{tt} \Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{1}{r} e^{2(\Phi+\Psi)} \partial_r \Phi. \tag{6.18}$$

把 ϕ 降下来再把 t 升上去，相当于乘了 $g^{tt} g_{\phi\phi} = -r^2 e^{-2\Phi} \sin^2 \theta$

$$R^t_{\phi t \phi} = -r e^{2\Psi} \sin^2 \theta \partial_r \Phi. \tag{6.19}$$

第四个黎曼张量： $r\theta r\theta$ 型

$$\begin{aligned}
 R^\theta_{r\theta r} &= -\partial_r \Gamma^\theta_{r\theta} + \Gamma^r_{rr} \Gamma^\theta_{r\theta} - \Gamma^\theta_{r\theta} \Gamma^\theta_{r\theta} \\
 &= \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r} \partial_r \Psi - \frac{1}{r^2} \\
 &= -\frac{1}{r} \partial_r \Psi.
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

把 θ 降下来再把 r 升上去，相当于乘了 $g^{rr} g_{\theta\theta} = r^2 e^{2\Psi}$ ，

$$R^r_{\theta r \theta} = -r e^{2\Psi} \partial_r \Psi. \tag{6.21}$$

第五个黎曼张量： $r\phi r\phi$ 型

$$\begin{aligned}
 R^\phi_{r\phi r} &= -\partial_r \Gamma^\phi_{r\phi} + \Gamma_{rr}^r \Gamma^\phi_{r\phi} - \Gamma_{r\phi}^\phi \Gamma^\phi_{r\phi} \\
 &= \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r} \partial_r \Psi - \frac{1}{r^2} \\
 &= -\frac{1}{r} \partial_r \Psi.
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

把 ϕ 降下来再把 r 升上去，相当于乘了 $g^{rr} g_{\phi\phi} = r^2 e^{2\Psi} \sin^2 \theta$,

$$R^r_{\phi r\phi} = -r e^{2\Psi} \sin^2 \theta \partial_r \Psi. \tag{6.23}$$

第六个黎曼张量： $\theta\phi\theta\phi$ 型

$$\begin{aligned}
 R^\theta_{\phi\theta\phi} &= \partial_\theta \Gamma^\theta_{\phi\phi} + \Gamma_{\phi\phi}^r \Gamma^\theta_{r\theta} - \Gamma_{\phi\theta}^\phi \Gamma^\theta_{\phi\phi} \\
 &= \partial_\theta (-\sin \theta \cos \theta) - \frac{1}{r} (r e^{2\Psi} \sin^2 \theta) + (\sin \theta \cos \theta) \cot \theta \\
 &= (1 - e^{2\Psi}) \sin^2 \theta.
 \end{aligned} \tag{6.24}$$

把 θ 指标降下去，把 ϕ 指标升上去，相当于乘了 $g^{\phi\phi} g_{\theta\theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$,

$$R^\phi_{\theta\phi\theta} = 1 - e^{2\Psi}. \tag{6.25}$$

有了这些准备，就很容易计算里奇张量：

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_{tt} &= R^t_{ttt} + R^r_{trt} + R^\theta_{t\theta t} + R^\phi_{t\phi t} \\
 &= e^{2(\Phi+\Psi)} \left\{ \partial_r^2 \Phi + \left[\partial_r (\Psi + \Phi) + \frac{2}{r} \right] \partial_r \Phi \right\} \\
 &\quad + [\partial_t^2 \Psi - \partial_t (\Phi + \Psi) \partial_t \Psi].
 \end{aligned} \tag{6.26}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_{tr} = \mathcal{R}_{rt} &= R^t_{ttr} + R^r_{trr} + R^\theta_{t\theta r} + R^\phi_{t\phi r} \\
 &= \Gamma_{tr}^r \Gamma^\theta_{r\theta} + \Gamma_{tr}^r \Gamma^\phi_{r\phi} \\
 &= -\frac{1}{r} \partial_t \Psi - \frac{1}{r} \partial_t \Psi \\
 &= -\frac{2}{r} \partial_t \Psi
 \end{aligned} \tag{6.27}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_{rr} &= R^t_{rtt} + R^r_{rrr} + R^\theta_{r\theta r} + R^\phi_{r\phi r} \\
 &= -\left[\partial_r^2 \Phi + \partial_r (\Phi + \Psi) \partial_r \Phi + \frac{2}{r} \partial_r \Psi \right] \\
 &\quad - e^{-2(\Phi+\Psi)} [\partial_t^2 \Psi - \partial_t (\Phi + \Psi) \partial_t \Psi].
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\theta\theta} &= R^t_{\theta t\theta} + R^r_{\theta r\theta} + R^\theta_{\theta\theta\theta} + R^\phi_{\theta\phi\theta} \\ &= 1 - e^{2\Psi} [1 + r\partial_r(\Phi + \Psi)]\end{aligned}\quad (6.29)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\phi\phi} &= R^t_{\phi t\phi} + R^r_{\phi r\phi} + R^\theta_{\phi\theta\phi} + R^\phi_{\phi\phi\phi} \\ &= \sin^2\theta \left\{ 1 - e^{2\Psi} [1 + r\partial_r(\Phi + \Psi)] \right\}\end{aligned}\quad (6.30)$$

里奇张量的其余分量均为零。

6.2 伯克霍夫定理和史瓦西度规

在能量动量张量密度为零时，利用(5.23)可知，里奇张量处处为零。注意这不代表时空是平直的（即黎曼张量所有分量为零），因为其他地方的物质可以影响真空处的时空曲率。退一步说，即使全宇宙能量动量张量密度都是零，爱因斯坦方程也允许非零的黎曼张量（其实是引力波）独立存在。

在一个球对称天体（不一定是静态的）的外部真空，如果忽略引力波存在的可能性以及其他遥远天体的影响，可以认为度规具有球对称性且满足 $\mathcal{R} = 0$ 。利用(6.27)可以知道 Ψ 不依赖于 t 。对比(6.28)和(6.26)可以知道 $\partial_r\Phi = \partial_r\Psi$ 。这说明 Φ 也不依赖于 r 且 $\Phi - \Psi$ 是个常数。由于常数因子总是可以吸收到坐标 t 的归一化中去，所以不妨就取 $\Phi = \Psi$ 。

既然 $\Phi = \Psi$ 且只依赖于 r ，那么根据(6.29)可以知道

$$1 - e^{2\Phi} - 2re^{2\Phi}\partial_r\Phi = 0 \quad (6.31)$$

上式等价于

$$\frac{d}{dr} [r(1 - e^{2\Phi})] = 0. \quad (6.32)$$

也就是说 $r(1 - e^{2\Phi})$ 是常数。把这个积分常数记做 C 并定义“引力质量” $M \equiv \frac{C}{2G_N}$ ，就得到

史瓦西 (Schwarzschild) 度规

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2G_N M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2G_N M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (6.33)$$

在远场条件 $r \gg G_N M$ 下，我们得到牛顿引力势 $\Phi \approx -\frac{G_N M}{r}$ 。

上面的计算结果说明了即使球对称天体在膨胀、收缩，其外部的度规仍然是静态的史瓦西度规，这个结论是伯克霍夫 (Birkhoff) 首先发现的，被称为伯克霍夫定理。

在球对称引力场中，度规只和 r 和 θ 有关，根据(2.56)，引力场中测试粒子的四维动量 p_t 和 p_ϕ 守恒——这分别对应牛顿力学中的能量守恒和角动量守恒。

6.3 水星近日点进动

为了说明行星为什么绕着太阳转，我们还差最后一步：计算史瓦西度规中测试粒子的（精确）运动。所谓测试粒子，是指它的能量动量张量密度极小，对时空度规的影响可以忽略。

假设静止质量为 m 的测试粒子在史瓦西时空中运动。根据 θ 指标的测地线方程

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} - \sin\theta \cos\theta \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 = 0, \quad (6.34)$$

如果一开始的初始条件是 $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\frac{d\theta}{ds} = 0$ ，那么 θ 将一致保持不变。我们下面将固定 $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\frac{d\theta}{ds} = 0$ （相当于选取了测试粒子的轨道平面作为球坐标系的赤道面）。

由于度规不依赖于 t 和 ϕ ，根据(2.56)，四维动量 p_t 和 p_ϕ 分量守恒。这相当于

$$\left(1 - \frac{2G_N M}{r} \right) p^t = E \quad (6.35)$$

$$r^2 p^\phi = L \quad (6.36)$$

这里的常量 E 和 L 的物理意义分别是总能量（静质量能 + 动能 + 势能）和角动量。

根据 $p^\mu p_\mu = m^2$ （或者在(6.33)两边同时乘以 m^2 并除以 ds^2 ），有

$$m^2 = \left(1 - \frac{2G_N M}{r} \right)^{-1} E^2 - \left(1 - \frac{2G_N M}{r} \right)^{-1} (p^r)^2 - \frac{L^2}{r^2}. \quad (6.37)$$

这相当于

$$(p^r)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2G_N M}{r} \right) \left(m^2 + \frac{L^2}{r^2} \right). \quad (6.38)$$

两边除以 $(r^2 p^\phi)^2 = L^2$ ，得到

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \right)^2 = \frac{E^2 - m^2}{L^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2G_N M m^2}{L^2 r} + \frac{2G_N M}{r^3}. \quad (6.39)$$

定义半正焦弦 $q = \frac{L^2}{G_N M m^2}$ （行星从近日点开始绕行 $\pi/2$ 后和中心天体的距离）以及史瓦西半径 $r_H = 2G_N M$ （这里是自然单位制表达式，普通单位制下 $r_H = \frac{2G_N M}{c^2}$ ；对太阳而言，史瓦西半径仅有 2.95 公里左右），(6.39) 成为

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r q} - \frac{r_H}{r^3} = \frac{E^2 - m^2}{L^2}. \quad (6.40)$$

定义变量 $w = \frac{q}{r} - 1$ 以及常量 $\varepsilon = \frac{r_H}{q}$ (对绕恒星运动的行星而言这一般是个很小的数; 例如对水星而言, $\varepsilon \sim 5.32 \times 10^{-8}$), (6.40)成为

$$\left(\frac{dw}{d\phi}\right)^2 + w^2 - \varepsilon(1+w)^3 = 1 + \frac{(E^2 - m^2)q^2}{L^2}. \quad (6.41)$$

两边对 ϕ 求导, 并约去 $2\frac{dw}{d\phi}$, 得到

$$\frac{d^2w}{d\phi^2} + w - \frac{3}{2}\varepsilon(1+w)^2 = 0. \quad (6.42)$$

对近圆轨道行星而言, w 是个小量, 忽略掉 $w^2\varepsilon$ 和 ε^2 量级的项后可以写成

$$\frac{d^2w}{d\phi^2} + (1 - 3\varepsilon)\left(w - \frac{3}{2}\varepsilon\right) \approx 0. \quad (6.43)$$

这是个标准的谐振子方程, 通解为

$$w = e \cos \left[\sqrt{1 - 3\varepsilon} \phi + \phi_0 \right] + \frac{3}{2}\varepsilon \quad (6.44)$$

这里的 ϕ_0 和 e 是积分常数, 分别对应初始相位和轨道离心率。最后的解

$$r = \frac{q}{1 + \frac{3}{2}\varepsilon + e \cos \left[\sqrt{1 - 3\varepsilon} \phi + \phi_0 \right]} \quad (6.45)$$

在 $\varepsilon = 0$ 时是椭圆轨道方程。当 $\varepsilon > 0$ 时, 这个解会导致每个周期内近日点进动 $\frac{2\pi}{\sqrt{1-3\varepsilon}} - 2\pi \approx 3\varepsilon\pi$ 。

水星的轨道周期大约为 0.241 年, 于是可以计算出每个世纪广义相对论贡献的近日点进动为

$$3 \times 5.32 \times 10^{-8} \pi \times \frac{100}{0.241} = 0.000208 \quad (6.46)$$

上面的结果的单位为弧度, 约等于 43 角秒。这恰好解释了(在广义相对论提出之前)历史上长期无法解决的水星的每世纪 43 角秒的额外进动(观测值扣除其他行星摄动导致的每世纪几百角秒的进动)! 从很大程度上而言, 广义相对论之所以能一提出来就获得广大物理学家的认同, 水星是最大的功臣!

6.4 课后练习

习题 7: 如果在史瓦西度规的 g_{tt} 中人为地加一个修改项

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2G_N M}{r} + \frac{G_N^2 M^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2G_N M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

以表示对广义相对论的唯像修改。假设测试粒子仍然沿测地线运动, 那么在这个理论里, 水星的进动是广义相对论预言的多少倍?

习题 8: 证明：在史瓦西度规描述的时空中，在 $\theta = \pi/2$ 的“赤道面”上，角动量非零的光子的测地线方程满足

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = 3u^2 \quad (6.47)$$

这里的 E 是光子的能量（四维动量 p_t ）， L 是光子的角动量（四维动量 p_ϕ ）；变量 u 的定义为 $u \equiv \frac{G_N M}{r}$ 。

习题 9: 在上一题中，当光子的轨迹始终满足 $r \gg G_N M$ 时，有 $u \ll 1$ 。忽略方程(6.47)右边的 u^2 项的贡献，证明它有如下的零阶近似解：

$$u \approx \frac{G_N M}{b} \cos(\phi + C).$$

这是一条直线方程。其中积分常数 b 代表光线离引力中心的最小距离。积分常数 C 可以通过重新选取坐标 ϕ 的零点被消去，写成

$$u \approx \frac{G_N M}{b} \cos \phi.$$

把这个结果代入(6.47) 右边，证明 u 的一阶近似是：

$$u \approx \frac{G_N M}{b} \cos \phi + \frac{3}{2} \left(\frac{G_N M}{b} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{G_N M}{b} \right)^2 \cos(2\phi) \quad (6.48)$$

无穷远入射点和无穷远出射点分别对应 $u = \frac{G_N M}{r} \rightarrow 0$ 的两个解。可以设这两个解分别为 $\phi = \pm \frac{\pi + \varepsilon}{2}$ ，其中 ε 对应光线在引力场中的偏折角。把 $\phi = \pm \frac{\pi + \varepsilon}{2}$ 代入上面的方程(6.48) 并令 $u \rightarrow 0$ ，证明偏折角

$$\varepsilon \approx \frac{4G_N M}{b}. \quad (6.49)$$

习题 10: 上一题给出的光线偏折公式(6.49)是在 $b \gg G_N M$ 时的一阶近似。理论上，只要满足 $\frac{G_N M}{b} < \frac{1}{3}$ 时，偏折角都是有明确定义的，因此(6.49) 在近场情况下需要改进。请证明下述二阶近似公式：

$$\varepsilon \approx \frac{4G_N M}{b} + \left(\frac{15\pi}{4} - 4 \right) \frac{G_N^2 M^2}{b^2}. \quad (6.50)$$

但实际上，当 $\frac{G_N M}{b}$ 接近 0.1 的时候，二阶近似也不十分准确了。这时可以使用下面的近似公式。它在 $\frac{G_N M}{b} < 0.1$ 时的误差不超过十万分之一，即使在 $\frac{G_N M}{b} < 0.3$ 时的误差也不超过千分之二。

$$\varepsilon \approx \pi \left(\frac{5}{21\sqrt{1 - \frac{2GM}{b}}} + \frac{5}{21\sqrt{1 - \frac{3GM}{b}}} + \frac{11}{21\sqrt{1 - \frac{168-25\pi}{11\pi} \frac{GM}{b}}} - 1 \right). \quad (6.51)$$

7. 观测理论

7.1 观测标架的定义

我们建立坐标系的想法是希望把所有张量用自然标架和自然逆标架表述出来（协变分量和逆变分量）。但现实很可能是，很多人并不会买你的账。当幼儿园同桌拿着根金条和你说“这有两米长”时，TA 显然根本就没有看过你的坐标系一眼。一个实验员对你说“某某粒子的能量是 E ”时，TA 也通常并不会指定坐标系。粒子的能量是它的四维动量 p 的第零个逆变分量 p^0 ，按照我们对“分量”的理解， E 应该是“喂”给粒子四维动量某组逆标架的时间基矢，粒子四维动量给吐出来的数。可以肯定的是：这组逆标架和你建立的坐标系没有任何关系，而是实验员自己选取的。

观测者在观测时一般会使用和自身固连的一个 Minkowski 标架，称作该观测者的观测标架。为了和坐标系的自然标架 $\vec{n}_\mu$ 、自然逆标架 $\vec{N}^\mu$ 有所区别，我们可以把观测标架记做 $\vec{m}_\mu$ ，逆标架记做 $\vec{M}^\mu$ 。可以这样来理解——n/N 代表“natural”；m/M 代表“Minkowski”。所谓 Minkowski 标架，是指 $\vec{m}_\mu \cdot \vec{m}_\nu = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ 。

对每次观测，我们可以认为存在一个坐标系（不妨称为观测者参考系），它的自然标架就是该次观测使用的观测标架。那么理论上就可以通过张量的坐标变换规则得到观测者“看到”的任何张量的分量。但是这样的操作是比较麻烦的，我们希望能避开坐标变换，直接用你一开始就建立好的坐标系（原始坐标系）来描述任何观测者“看到”的任何张量的分量。这样做的诀窍是：把观测标架/逆标架分解为自然标架/逆标架的线性组合，这相当于在原坐标系写出观测标架/逆标架里每个基矢的协变和逆变分量。于是我们就会有例如这样的符号： $(\vec{M}^\mu)^\nu$ ，它是观测逆标架的

第 μ 个基矢在原始坐标系里的第 ν 个逆变分量，即 $(\vec{M}^\mu)^\nu \equiv \vec{M}^\mu \cdot \vec{N}^\nu$ 。又如 $(\vec{m}_0)^1$ ，它是观测标架的时间基矢在原始坐标系里的第一个逆变分量，即 $(\vec{m}_0)^1 \equiv \vec{m}_0 \cdot \vec{N}^1$ 。同样， $(\vec{m}_\mu)_\nu \equiv \vec{m}_\mu \cdot \vec{n}_\nu$ 是观测标架的第 μ 个基矢的第 ν 个协变分量。要注意括号内的指标并不是张量的分量指标，而仅仅是标记“第几个基矢”；括号外的指标则是张量的分量指标。

好了，如果你能绕明白这些符号了。我们下面继续来研究具体如何得到一个观测者的观测标架/逆标架在原始坐标系里的各个分量。

首先，因为观测标架是 Minkowski 标架，所以观测逆标架和观测标架之间的关系非常简单： $\vec{M}^0 = \vec{m}_0$ ， $\vec{M}^1 = -\vec{m}_1$ ， $\vec{M}^2 = -\vec{m}_2$ ， $\vec{M}^3 = -\vec{m}_3$ 。那么我们只要研究观测标架就行了。

因为观测标架和观测者自身固连在一起，观测者的四维速度 $\mathbf{v}$ 在观测者参考系里应该没有空间分量。也就是说 $\mathbf{v}$ 和 $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \vec{m}_3$ 都是正交的，而且根据四维速度的定义 $\mathbf{v}$ 还是归一化的（满足 $\mathbf{v}^\mu \mathbf{v}_\mu = 1$ ），那 $\mathbf{v}$ 不就是 $\vec{m}_0$ 的完美候选者吗！当然，原则上观测者也可以选 $-\mathbf{v}$ 作为观测标架的时间基矢，这相当于 TA 非要把“我一小时写完作业”说成“我 -1 小时写完了作业”。鉴于现实中并没有观测者会干这么别扭的事情，我们就写下了观测理论里最重要的一条结论：

观测标架的时间基矢是观测者的四维速度。

观测标架的空间基矢 $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \vec{m}_3$ 的选取具有一定的任意性，通常需要观测者明确告诉你 TA 是怎么定义这些基矢的（比如 TA 的鼻孔对着的方向是 $\vec{m}_1$ 方向，这样你就能通过研究 TA 的鼻孔来得到 $\vec{m}_1$ ）。可能相比于鼻孔，选一个粒子的三维动量方向是个更容易被接受的办法。比如利用一个已知四维动量为 p 的粒子，可以定义 $(\vec{m}_1)^\mu = \frac{p^\mu - E(\vec{m}_0)^\mu}{\sqrt{E^2 - m^2}}$ ，这里的 $E = p^\mu (\vec{m}_0)_\mu$ 是观测标架中“看到”的粒子的能量， $m^2 = p^\mu p_\mu$ 是粒子静止质量的平方。按照这样的定义，容易检验 $\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_0 = (\vec{m}_1)^\mu (\vec{m}_0)_\mu = 0$ 和 $\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_1 = (\vec{m}_1)^\mu (\vec{m}_1)_\mu = -1$ 确实成立。

一个观测者“看到”的粒子能量 E 是粒子的四维动量 p 在观测者参考系里的第零分量，其实就是 p 和 $\vec{M}^0$ （也就是观测者的四维速度 $\mathbf{v}$ ）的内积。重要的是，你完全可以在原始坐标系里计算 $E = \mathbf{v}_\mu p^\mu$ ，而无须转换到观测者参考系里去。注意观测结果 $\mathbf{v}_\mu p^\mu$ 是一个标量。这具有普适性，我要写下观测理论里更为深刻的一个结论

任何观测结果都是标量。

这初看起来似乎有些奇怪——观测者观测的是张量的分量，怎么就成了标量了呢？这是因为观测者的观测标架是独立于你选择的坐标系的，可以看成是一些

物理实体（例如，观测者的鼻孔）构造出来的矢量。观测结果则是被观测的张量和观测者的标架缩并得到的标量。例如上面的例子中，观测者观测到粒子的能量 $E = v_\mu p^\mu$ 其实是观测标架的时间基矢和粒子的四维动量的缩并。

7.2 观测标架的应用

下面用一些简单的例子来帮你加深对观测标架的理解。

例题 7: 观测者的四维速度在自身参考系里的协变形式和逆变形式分别是怎样的？

解答: 观测者的四维速度即为其观测标架的时间基矢，也等于其观测逆标架的时间基矢，也就是说，按照观测标架分解的系数（即逆变分量）是 $(1, 0, 0, 0)$ ，按照观测逆标架分解的系数（即协变分量）也是 $(1, 0, 0, 0)$ 。

例题 8: 设在建立了 Minkowski 坐标系 (x^0, x^1, x^2, x^3) 的狭义相对论空间里，某观测者沿 x^1 轴方向以 $\frac{dx^1}{dx^0} = \beta$ 的速度运动。推导狭义相对论坐标变换的洛伦兹公式。

解答: 按照题意，观测者的四维速度 v 在原始坐标系里的分量满足 $\frac{v^1}{v^0} = \beta$ ，以及 $v^2 = v^3 = 0$ 。又四维速度是归一化的，满足 $1 = (v^0)^2 - (v^1)^2 = (v^0)^2 - (\beta v^0)^2 = (1 - \beta^2)(v^0)^2$ 。由此解出 $v^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ （开根号时正负号的选择判定：要求 $\beta = 0$ 时 $v^0 = 1$ ）。于是得到观测逆标架的时间基矢为

$$(\vec{M}^0)^\mu = v^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, 0, 0 \right),$$

或者也可以写成

$$(\vec{M}^0)_\mu = v_\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, -\frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, 0, 0 \right).$$

由于约定了观测者不旋转空间基矢的方向，即 $\vec{M}^1$ 不能有原始坐标系里的 x^2 分量或者 x^3 分量，或者说 $(\vec{M}^1)^2 = (\vec{M}^1)^3 = 0$ 。然后根据 $\vec{M}^1 \cdot \vec{M}^0 = 0$ ，也就是 $(\vec{M}^1)^0 (\vec{M}^0)^0 - (\vec{M}^1)^1 (\vec{M}^0)^1 = 0$ ，可以得到 $(\vec{M}^1)^0 = \beta (\vec{M}^1)^1$ 。那么根据 Minkowski 标架要求 $-1 = \vec{M}^1 \cdot \vec{M}^1 = [(\vec{M}^1)^0]^2 - [(\vec{M}^1)^1]^2 = (\beta^2 - 1) [(\vec{M}^1)^1]^2$ ，以及要求 $\beta = 0$ 时 $(\vec{M}^1)^1 = (\vec{N}^1)^1 = \vec{N}^1 \cdot \vec{N}^1 = -1$ ，就可以得到 $(\vec{M}^1)^1 = -\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ 和 $(\vec{M}^1)^0 = \beta (\vec{M}^1)^1 = -\frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ 。

$$(\vec{M}^1)^\mu = \left(-\frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, -\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, 0, 0 \right),$$

也可以写成

$$(\vec{M}^1)_\mu = \left(-\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, 0, 0\right).$$

(实际上我们后面只需要 $(\vec{M}^1)_\mu$, 你可以根据下面三个条件确定它: $(\vec{M}^0)^\mu (\vec{M}^1)_\mu = 0$; 当 $\beta = 0$ 时 $(\vec{M}^1)_\mu = (\vec{N}^1)_\mu = \vec{N}^1 \cdot \vec{n}_\mu = \delta_\mu^1$; 以及 $-1 = (\vec{M}^1) \cdot (\vec{M}^1) = \eta^{\mu\nu} (\vec{M}^1)_\mu (\vec{M}^1)_\nu = [(\vec{M}^1)_0]^2 - [(\vec{M}^1)_1]^2$.)

最后, 由于 $\vec{M}^2 = \vec{N}^2$, $\vec{M}^3 = \vec{N}^3$, 可以直接写出

$$(\vec{M}^2)_\mu = (\vec{N}^2)_\mu = \vec{N}^2 \cdot \vec{n}_\mu = (0, 0, 1, 0)$$

$$(\vec{M}^3)_\mu = (\vec{N}^3)_\mu = \vec{N}^3 \cdot \vec{n}_\mu = (0, 0, 0, 1)$$

在狭义相对论里, 由于时空是平直的, 时空坐标位置可以看成是一个矢量 (在弯曲时空里只有坐标的无穷小变化才是矢量)。在原始坐标系里的分量为 (x^0, x^1, x^2, x^3) 的矢量 $\vec{x}$ 在观测标架里的时间分量为

$$\tilde{x}^0 = \vec{x} \cdot \vec{M}^0 = x^\mu (\vec{M}^0)_\mu = \frac{x^0 - \beta x^1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

第一空间分量为

$$\tilde{x}^1 = \vec{x} \cdot \vec{M}^1 = x^\mu (\vec{M}^1)_\mu = \frac{x^1 - \beta x^0}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

最后, 由于 $\vec{M}^2 = \vec{N}^2$ 以及 $\vec{M}^3 = \vec{N}^3$, 所以 $\tilde{x}^2 = x^2$, $\tilde{x}^3 = x^3$ 。

例题 9: 设在建立了 Minkowski 坐标系 (x^0, x^1, x^2, x^3) 的狭义相对论空间里, 某观测者沿 x^1 轴方向以 $\frac{dx^1}{dx^0} = \beta$ 的速度运动。推导狭义相对论的速度合成公式。

解答: 接着上题的讨论, 现在来考虑原始参考系里的四维速度 $u^\mu = (\gamma, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z)$ (这里的 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v_x^2-v_y^2-v_z^2}}$) 如何变换到观测者参考系中。利用上题解答过程中的结论

$$(\vec{M}^0)_\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, 0, 0\right).$$

$$(\vec{M}^1)_\mu = \left(-\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, 0, 0\right).$$

$$(\vec{M}^2)_\mu = (0, 0, 1, 0)$$

$$(\vec{M}^3)_\mu = (0, 0, 0, 1)$$

可以得到

$$\tilde{u}^0 = u^\mu (\vec{M}^0)_\mu = \frac{\gamma(1 - \beta v_x)}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$\tilde{u}^1 = u^\mu (\vec{M}^1)_\mu = \frac{\gamma(v_x - \beta)}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$$\tilde{u}^2 = u^\mu (\vec{M}^2)_\mu = \gamma v_y,$$

$$\tilde{u}^3 = u^\mu (\vec{M}^3)_\mu = \gamma v_z,$$

观测者“看到”的三维速度为

$$\tilde{v}_x = \frac{d\tilde{x}^1}{d\tilde{x}^0} = \frac{\tilde{u}^1}{\tilde{u}^0} = \frac{v_x - \beta}{1 - \beta v_x},$$

$$\tilde{v}_y = \frac{d\tilde{x}^2}{d\tilde{x}^0} = \frac{\tilde{u}^2}{\tilde{u}^0} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta v_x} v_y,$$

$$\tilde{v}_z = \frac{d\tilde{x}^3}{d\tilde{x}^0} = \frac{\tilde{u}^3}{\tilde{u}^0} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta v_x} v_z.$$

例题 10: 位于迪拜的世界第一高楼塔有 162 层，高 828 米。假设从塔顶发射一束激光到地面，光的频率会相对增加大约多少？（频率增加量和初始频率之比）

解答： 地球周围度规可以近似认为是史瓦西度规

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2G_N M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2G_N M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

这里的 M 为地球质量。

因为题中没有指定塔顶发射者和地面观测者的状态，我们合理假设 TA 们的空间坐标都是固定的，因此四维速度只有时间分量。由四维速度归一化条件知道，时间分量为 $v^t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2G_N M}{r}}}$ 。因为度规不依赖于 t ，所以光子的 p_t 守恒。于是观测者“看到”的频率，即光子的能量，等于 v 和 p 的内积，即 $v^t p_t$ ，和 $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2G_N M}{r}}} \approx 1 + \frac{G_N M}{r}$ 成正比。于是频率会增大，增大的比例大约为

$$\frac{G_N M \Delta r}{r^2} \approx \frac{9.8 \times 828}{(3 \times 10^8)^2} \approx 9 \times 10^{-14}.$$

7.3 观测者参考系的深入理解

7.3.1 观测者参考系和局域惯性系的差别

一般的观测者参考系并不是局域惯性系，只有自由下落的观测者的观测者参考系才是局域惯性系。从数学上看，观测者参考系只要求观测点的时空度规是 Minkowski 度规，而局域惯性系则还额外要求度规的一阶导数为零。

7.3.2 狭义相对论和广义相对论中的“上帝视角叙事”

狭义相对论往往允许所有观测者拥有“上帝视角”，即允许一个观测者“看到”或“观测”和 TA 的世界线根本没有交集的粒子。问题通常以这种形式提出：“观测者 A 看到 B 的速度为 $\vec{v}$ 保持不变……”——而实际上只有在 A 和 B 相遇的一瞬间，A 才能真的“看到”B 的速度，其他时候都不能（当然，A 可以一直接受 B 发过来的光子进行间接推测，这是另外一事情，请参考例题 3 体会物理上的“看到”和狭义相对论常用的“上帝视角看到”的差别）。其实这个表述的真正意思是：在 A 的参考系里面 B 的速度为 $\vec{v}$ 保持不变。狭义相对论假定惯性系的存在，所以 A 相当于拥有一个无限延伸的 Minkowski 坐标系：所有张量在里面的分量都可以被定义，称之为“A 看到的某张量的某分量”（不管 A 是否真的有看到）。

在广义相对论里不承认一个无限延伸的 Minkowski 标架。所有观测者的“上帝视角”功能都被取消了：观测者都只能测量在 TA 的世界线上的张量的分量，所有的“看到”都是真的看到。

但是，广义相对论里的原始坐标系似乎仍以“上帝视角”描述了整个宇宙中的一切张量、观测者以及所有的观测行为。要注意这不代表存在一个超级观测者可以无视因果和物理距离阻隔，“看到”一切张量。原始坐标系的“上帝视角”代表的是“物理世界的数学模型”——也就是说，原始坐标系描述的一切都是根据假设的物理规律和初始条件“编造”的。既然是编造的当然可以无视因果和物理距离的阻隔！所谓研究物理，其实就是我根据一定的物理理论编造了一个模型，然后把所有模型中描述的观测结果和现实观测结果去做对比，对比一致则模型得以保留，对比不一致则模型被排除。

7.4 课后练习

习题 11: 设在某参考系中，观测者在观测某粒子时的四维速度协变分量为 $u_\mu = (\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 1, 0)$ ，被观测的粒子的四维动量逆变分量为 $p^\mu = (3 \text{ GeV}, 0, 0, 0)$ 。那么该观测者观测到的粒子能量是多少 GeV？



8. 黑洞

8.1 白矮星、中子星和黑洞

白矮星 (white dwarf) 是质量小于约 8 倍太阳质量的中低质量恒星（包括我们的太阳）的“晚年归宿”。这个过程可以概括为：恒星经历红巨星阶段，抛射掉大部分外层物质，核心坍缩成致密的白矮星——它依靠电子的简并压抵抗引力，不再发生核聚变，只会缓慢冷却。

8.1.1 钱德拉塞卡的故事

1930 年，19 岁的研究生钱德拉塞卡 (Chandrasekhar) 在驶往英国的邮轮上完成了一项惊人的计算：白矮星存在一个质量上限，约为太阳的 1.4 倍。超过这个界限，电子简并压力将无法抵抗引力，星体必将坍缩。

然而，当他将成果报告给权威天体物理学家爱丁顿时，迎来的不是赞许，而是当众羞辱。爱丁顿在皇家天文学会会议上撕碎他的论文手稿，讥讽道：“恒星根本不懂相对论。”

年轻的钱德拉塞卡几乎陷入绝境。他写信给量子力学的奠基人之一——沃尔夫冈·泡利。泡利以犀利和刻薄闻名，但他仔细审阅了钱德拉塞卡的计算后，明确表示：相对论简并电子气的统计力学推导完全正确。泡利甚至幽默地补充了一句：“你的理论满足‘泡利不相容原理’，但不满足‘爱丁顿不相容原理’。”这句双关的讽刺让钱德拉塞卡既感激又苦笑。

随后，钱德拉塞卡又鼓起勇气向哥本哈根的大师尼尔斯·玻尔求助。玻尔热情地接待了他，听完叙述后，玻尔用他那特有的温和语气说：“爱丁顿是个了不起的

人，但这件事上他完全错了。不要理会他的反对，继续你的工作。”

然而，无论是泡利还是玻尔，最终都拒绝公开为钱德拉塞卡辩护。他们私下给予肯定，却不愿与爱丁顿——这位当时天体物理学界的泰斗——正面冲突。钱德拉塞卡明白，他只能独自承受压力。

此后近二十年，他几乎放弃了这一领域的研究，转向其他课题。直到 1950 年代，随着超新星观测和中子星的发现，钱德拉塞卡极限才被广泛承认。1983 年，他终获诺贝尔奖。

多年后他在回忆录中写道：“泡利和玻尔给了我活下去的勇气。虽然他们没有公开站出来，但那一句话就够了。”

8.1.2 估算钱德拉塞卡极限

对质量为 M ，半径为 R ，并依靠电子简并压抵抗引力的白矮星，我们来研究它的动力学平衡条件并估算 M 的上限。钱德拉塞卡的故事告诉我们，复杂的计算往往很难说服别人（即使对方是学界大佬）。因此我打算给出一个幼儿园版的推导——它的缺点是不能精确地给出 $1.4M_{\odot}$ 。（这里太阳质量 $M_{\odot} \approx 2 \times 10^{30} \text{kg}$ ）这个数值，优点是肯定可以说服爱丁顿。

首先，我们可以设白矮星里有 $\lambda \frac{M}{m_p}$ （ $m_p \approx 1.67 \times 10^{-27} \text{kg}$ 是质子质量）个电子；因为白矮星（燃尽的恒星核）基本由碳、氧或者更大号元素构成，中子和质子数大致相等，所以 $\lambda \approx \frac{1}{2}$ 。

按照泡利不相容原理，每个电子占据了不同的微观态。又按照量子统计理论，每个微观态在相空间占据体积为 $\frac{1}{2}(2\pi)^3$ （实际上是 $\frac{1}{2}h^3 = \frac{1}{2}(2\pi\hbar)^3$ ，约化的普朗克常数 $\hbar$ 在自然单位制下被忽略不写），这里的 $\frac{1}{2}$ 来源于电子有两个内禀自旋态，也就是两个自旋不同的电子允许呆在相空间同一个 h^3 内。所以电子占据的相空间体积大约为 $4\pi^3 \lambda \frac{M}{m_p}$ 。相空间的体积可以看成是位置空间的体积 $\frac{4\pi R^3}{3}$ 和动量空间的体积的乘积。我们简化地认为电子的三维动量分布在 $p \leq p_{\max}$ 范围内，即动量空间体积为 $\frac{4\pi}{3} p_{\max}^3$ 。那么，就有

$$\left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 R^3 p_{\max}^3 \sim \frac{4\pi^3 \lambda M}{m_p} \quad (8.1)$$

即

$$p_{\max}^2 \sim \left(\frac{9\pi\lambda}{4}\right)^{2/3} \left(\frac{M}{m_p}\right)^{2/3} \frac{1}{R^2}. \quad (8.2)$$

内部的压强可以写为 $np^2/(3E)$ 的平均值。这里 $n \sim \frac{3}{4\pi R^3} \lambda \frac{M}{m_p}$ 是电子数密度， p 是三维动量大小， $E = \sqrt{p^2 + m_e^2}$ 是电子能量（ m_e 为电子质量）。对分布在 $p \leq p_{\max}$ 内的动量而言， $p^2/(3E)$ 的平均值可以通过积分算出来，不过既然是粗略估算，就

没必要搞这么精确——随使用平均的 p^2 估一个吧。在动量空间一个半径为 $p_{\max}$ 的球内，平均 p^2 为

$$\langle p^2 \rangle = \frac{3}{4\pi p_{\max}^3} \int_0^{p_{\max}} 4\pi p^4 dp = \frac{3}{5} p_{\max}^2. \quad (8.3)$$

内部压强

$$P \sim n \frac{\langle p^2 \rangle}{3\sqrt{\langle p^2 \rangle + m_e^2}} \sim \frac{3}{4\pi R^3} \frac{\lambda M}{m_p} \frac{\frac{1}{5} p_{\max}^2}{\sqrt{\frac{3}{5} p_{\max}^2 + m_e^2}}. \quad (8.4)$$

因为我们其实并没有像钱德拉塞卡那样精确求出白矮星内部的质量和压强分布，所以并不好定量地描述压强如何在每一处抵抗引力，只能非常粗糙地考虑两个半球之间的总引力和总压力平衡。

两个质量为 $\frac{M}{2}$ 的半球之间的引力可以按照均匀密度的模型进行估算，积分得到结果为 $\frac{3G_N M^2}{16R^2}$ （这是有趣的一个积分练习题，请尝试自行完成）。两个半球之间的压力可以大致估算为 $\pi R^2 P$ 。所以得到

$$P \sim \frac{3G_N M^2}{16\pi R^4}. \quad (8.5)$$

于是根据 (8.4)，(8.5) 和 (8.2)，得到关于 $y \equiv \left(\frac{M}{m_p}\right)^{2/3}$ 的一个二次方程

$$y^2 + 2\frac{R^2}{a^2}y - b^2 = 0. \quad (8.6)$$

这里的 a, b 用普通单位制写出来（即通过添加 $\hbar^\alpha c^\beta$ 形式的因子使量纲匹配）是

$$a = \sqrt{\frac{6}{5}} \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{1/3} \lambda^{1/3} \frac{\hbar}{m_e c} \approx 6.44 \times 10^{-16} \text{km}. \quad (8.7)$$

$$b = \frac{4}{\sqrt{15}} \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{1/3} \lambda^{4/3} \frac{\hbar c}{G m_p^2} \approx 1.33 \times 10^{38}. \quad (8.8)$$

方程 (8.6) 的解

$$y = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + \frac{R^4}{a^4} + \frac{R^2}{a^2}}}. \quad (8.9)$$

给出了白矮星质量对半径的单调下降的依赖关系。当 $R \ll a\sqrt{b} \approx 7.4 \times 10^3 \text{km}$ 时， y 取到最大值，即 $y \approx b = 1.33 \times 10^{38}$ ，即 $M \sim y^{3/2} m_p \approx 2.57 \times 10^{30} \text{kg} \approx 1.3M_\odot$ ，和精确解 $1.4M_\odot$ 相比已经是非常不错的估算了。

8.1.3 中子星和黑洞

我们的估算结果表明, 当白矮星大约为地球尺寸时, 继续缩小半径已经无法有效增大电子简并压能抵抗的质量 (引力) 上限——该上限大约为一倍多的太阳质量。如果恒星核质量低于该上限, 则白矮星半径逐渐趋于稳定 (大致保持在地球大小尺寸)。如果恒星核质量超过该上限, 那么电子简并压将无法抵抗引力, 白矮星继续收缩, 最后电子将被压进质子中, 成为一颗内部只有中子的“中子星” (neutron star)。

中子星内部的中子简并压将继续抵抗引力, 上面的计算过程中需要修改两个量, 一是要把电子质量 m_e 换成中子质量 m_n (约等于 $m_p \approx 1.67 \times 10^{-27} \text{kg}$), 二是要把 $\lambda \approx 1/2$ 换成 $\lambda = 1$ 。这样更新后的 $a \approx 4.51 \times 10^{-19} \text{km}$, $b \approx 3.36 \times 10^{38}$ 。也就是说, 当中子星半径小于 $a\sqrt{b} \approx 8.3 \text{km}$ 时, 中子星继续缩小已经无法提升其能抵抗的质量 (引力) 上限——按我们非常粗略的估算, 该上限大约为 $b^{3/2}m_p \approx 5.1M_\odot$ 的量级。不过, 这个估算的误差挺大的, 原因是中子星内部的强相互作用以及引力的广义相对论效应都非常重要。广义相对论效应会导致压强也作为引力源贡献引力, 那么简并压实际能扛得住的质量上限肯定更小。在中子星的高密度环境下, 强相互作用体现为额外的引力, 进一步削弱了中子星能扛得住的质量上限。因此, 最后得到中子星质量上限要比 $5.1M_\odot$ 小不少。根据主流模型计算, 中子星的质量上限在 $2.3M_\odot$ 左右, 但这个数值仍存在一定争议 (各种观点大约有 $0.2M_\odot$ 左右的不一致性)。

当中子星质量超过中子简并压的承受能力, 这时一般认为没有什么物理机制可以阻止引力坍缩, 最终所有物质将坍缩到一个时空奇点中, 成为黑洞 (black hole)。黑洞的经典图像是一个没有体积的几何点, 不过这不太可能是完全准确的描述, 量子引力效应会以某种方式进入到了最后阶段, 以我们目前还不十分清楚的方式塑造黑洞的几何结构。

8.2 史瓦西黑洞

球对称的黑洞称为史瓦西黑洞, 其外部的度规可以用史瓦西度规

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2G_N M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2G_N M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (8.10)$$

描述。但是史瓦西度规对黑洞外的空间的描述是不完整的, 因为度规在 $r = 2G_N M$ 这个“视界面” (horizon) 上失效了 (g_{tt} 为零, g_{rr} 发散)。注意这个问题对其他类型的球对称天体并不存在, 因为它们的尺寸都大于视界半径 $2G_N M$ 。即使是接近质量上限 $2.3M_\odot$ 的中子星, 其史瓦西半径 $2G_N M_\odot$ 大约是 7 公里, 也略小于其典型半径 ($\gtrsim 8$ 公里)。

我们先简单回顾下第6中讨论过的一个测试粒子在史瓦西度规中的运动，当取运动平面为 $\theta = \pi/2$ 时，有下面的解

$$p^t = \frac{E}{1 - \frac{2G_N M}{r}} \quad (8.11)$$

$$p^\phi = \frac{L}{r^2} \quad (8.12)$$

$$(p^r)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2G_N M}{r}\right) \left(m^2 + \frac{L^2}{r^2}\right) \quad (8.13)$$

我们来分别讨论两种运动：非径向（角动量 $L \neq 0$ ）运动和径向（ $L = 0$ ）运动。

1 非径向运动 ($L \neq 0$):

把 (8.13) 除以 (8.12) 的平方，就能得到

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{E^2 - m^2}{L^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2G_N M m^2}{L^2 r} + \frac{2G_N M}{r^3}. \quad (8.14)$$

这次我们讨论的是强场 $r \sim G_N M$ 的情况，所以我们取变量替换 $u = \frac{G_N M}{r}$ ，上式成为：

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{(E^2 - m^2)G_N^2 M^2}{L^2} - u^2 + \frac{2G_N^2 M^2 m^2}{L^2} u + 2u^3. \quad (8.15)$$

两边对 ϕ 求导并约去 $\frac{du}{d\phi}$ ，有

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u - 3u^2 = \frac{G_N^2 M^2 m^2}{L^2}. \quad (8.16)$$

2 径向运动 ($L = 0$)，有质量单粒子：

利用(8.13)，可以得到

$$p^r = \pm \sqrt{E^2 - m^2 \left(1 - \frac{2G_N M}{r}\right)}. \quad (8.17)$$

其中 + 代表向外径向运动，- 代表向内径向运动。

对静止质量非零的粒子，两边除以 m ，并取倒数后可以得到

$$\frac{ds}{dr} = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{E^2}{m^2} - 1 + \frac{2G_N M}{r}}} \quad (8.18)$$

利用初条件确定积分常数 $\frac{E^2}{m^2} - 1$ 后可以对上式直接积分，算出任意 r 对应的粒子固有时 s 。

2 径向运动 ($L = 0$)，无质量或多粒子：

对零质量粒子，不存在固有时的概念。需要研究 r 和 t 之间的关系。另外，当研究两个粒子运动轨迹的交点时，也需要在统一的坐标系下讨论。我们把 (8.11) 除以 (8.17)，可以得到

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{\left(1 - \frac{2G_N M}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{2G_N M}{r}\right)}} \quad (8.19)$$

由于右边在视界面上发散，我们无法对右边积分获得 t 对 r 的依赖关系。如果要追踪穿过视界面的粒子，需要选取其他在视界面上不发散的坐标系。

8.2.1 一场说走就走的旅行

坐标系的失效并不意味着物理的失效。为了“物理地”探索史瓦西黑洞视界周围发生了什么，我们不妨来一场假想的黑洞之旅。为了用人类的时间尺度叙事，我选择了一个视界半径 $2G_N M$ 为一光天 (lightday) 的超大质量黑洞，这意味着 $M \approx 8.77 \times 10^9 M_\odot$ ¹。

我想有一场
说走就走的旅行



旅行的计划很简单，就是让宇宙飞船在黑洞视界外以某个圆轨道绕黑洞运行，然后把我以合适的速度向黑洞中心抛射出去。

选择宇宙飞船的绕行轨道

对圆轨道 r 和 $u = \frac{G_N M}{r}$ 都是固定的，根据 (8.16)，有

$$u - 3u^2 = \frac{G_N^2 M^2 m^2}{L^2}. \quad (8.20)$$

对静止质量非零的粒子， $u - 3u^2 > 0$ ，也就是 $u < \frac{1}{3}$ ，这意味着 $r > 3G_N M$ ；对静止质量为零的粒子， $u - 3u^2 = 0$ ，这意味着 $r = 3G_N M$ 。

也就是说，静止质量非零的测试粒子要以圆轨道绕行黑洞，必须保持在 $r > 3G_N M$ 之外的距离；光子则只能在 $r = 3G_N M$ 的距离才能以圆轨道围绕史瓦西黑洞运动。

¹在很多星系中心有这样的超大质量黑洞，不过一般不是球对称的史瓦西黑洞。

最小圆轨道半径对应的球面 $r = 3G_N M$ 被称为史瓦西黑洞的“光球面”。

在 $r < 3G_N M$ (即 $u > \frac{1}{3}$) 处, 根据 (8.16), 恒有 $\frac{d^2 u}{d\phi^2} > 0$ 。那么, 如果一开始有 $\frac{du}{d\phi} > 0$, 就会使得 u 持续增大 (也就是 r 持续减少)。换句话说, 从外部进入光球面的粒子或宇宙飞船, **如果没有携带额外的动力**, 只能旋转着落向黑洞中心。

但这样的讨论还不够! 即便在 $r = 3G_N M$ 外, 还需要保证万一飞船的动力暂时出现小故障, 不能被黑洞给吸进视界面去了。所以还必须是稳定的圆轨道才行。考虑到 (8.16) 可以写成

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} = 3 \left(u - \frac{1}{6} \right)^2 + \frac{G_N^2 M^2 m^2}{L^2} - \frac{1}{12}. \quad (8.21)$$

在圆轨道上, 上式两边等于零。如果由于受到微扰使得 r 减少了一点 (即 u 增大一些), 会发生什么情况呢? 如果 $u > 1/6$ (即 $r < 6G_N M$, 那么上式的右边会增大一些, 这会导致 u 获得一个正的加速度。也就是 r 会持续减少。这说明 $r < 6G_N M$ 的圆轨道是不稳定的。反之, 如果 $r > 6G_N M$, 那么“反馈”和扰动符号相反, 圆轨道就是稳定的。

只有在 $r > 6G_N M$ 处的圆轨道才是稳定的。

综合上述考虑, 我最后决定把飞船的圆轨道取在 $r_0 = 8G_N M$ 处——既离黑洞不算太远, 也很安全。

规划时间表

在距离黑洞 $r_0 = 8G_N M$ 的宇宙飞船上, 我打包了行李, 里面有: 一支激光笔 (用来向空间站发射光信号), 一个闹钟 (用来计时), 一个黎曼张量测量仪 (用来确定我的空间位置), 还有一个神秘宝箱 (作用暂时保密)。



在和飞船上驻守的朋友做了短暂告别之后, 我向黑洞中心纵身一跃…… (情节需要, 请勿模仿)

假设我的“纵身一跃”非常完美地抵消了飞船的速度（这得多强的弹跳力！），那么初始的 $\frac{dr}{ds} = 0$ ，可以确定(8.18)中的 $\frac{E^2}{m^2} - 1$ 为 $-\frac{2G_N M}{r_0}$ 。于是可以得到

$$\frac{ds}{dr} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{2G_N M}{r} - \frac{2G_N M}{r_0}}}. \quad (8.22)$$

做坐标变换 $r = r_0 \cos^2 \varphi$ （初始位置处 $\varphi = 0$ ，黑洞中心处 $\varphi = \pi/2$ ），对(8.22)两边从出发位置（ $s = 0$ ）到某个 $0 \leq r \leq r_0$ 进行积分，得到

$$s = \sqrt{\frac{r_0^3}{2G_N M}} \int_0^{\arccos \sqrt{r/r_0}} 2 \cos^2 \varphi d\varphi = \sqrt{\frac{r_0^3}{2G_N M}} \left(\frac{\sqrt{r(r_0 - r)}}{r_0} + \arccos \sqrt{\frac{r}{r_0}} \right). \quad (8.23)$$

上式给出了我携带的钟走过的时间和我的 r 坐标之间的关系。代入 $r_0 = 8G_N M$ 以及各种 r 值，可以规划出大致的时间表如下

我的闹钟走过的时间（天）	r 坐标
0	$8G_N M$
5.54	$7G_N M$
7.65	$6G_N M$
9.15	$5G_N M$
10.28	$4G_N M$
11.17	$3G_N M$
11.84	$2G_N M$
12.32	$G_N M$
12.57	0

第一段旅程——到达光球面

第一周的旅程是比较惊险的，因为在 $r > 6G_N M$ 的区域内圆轨道是稳定的，就存在一些长期驻留在黑洞附近的“空间碎片”²，时不时划过我身边，让我提心吊胆。

好在到第八天我穿过了 $r = 6G_N M$ 这个“最小稳定圆轨道”界限，情况明显好转了： $r < 6G_N M$ 这个区域的空间碎片会因轨道不稳定而掉入黑洞视界内，不会长期驻留。

随着我往光球面 $r = 3G_N M$ 靠近，后面几天逐渐变得有趣起来，宇宙背景星光的扭曲变得逐渐明显，由于 $r < 3G_N M$ 内的光线被极度扭曲后绕着黑洞旋落，我在黑洞所在方向会大致看到一个叫作“黑洞阴影”的，大小 $\sim 3G_N M$ 的暗区域。

在我到达光球面时，我把激光笔往边上照射并扭过头去一看。嗯，我就是想看一下我的后脑勺。但实际上光绕一转还需要时间，我的下落速度太快可能并不能看清……

²真实世界的超大质量黑洞周围往往要更加危险性，大量的物质聚集在一个叫“黑洞吸积盘”的环状区域内， $6G_N M$ 对应吸积盘的内边界

第二段旅程——到达视界

在我穿过光球面之后，黑洞阴影消失了（我本身已经进入了黑洞阴影区域）。由于我的下落速度越来越快，所有的星光看起来都像是从前方而来（狭义相对论的光行差效应），甚至在我后方的星光也会绕个弯从我前方出现，于是整个宇宙的像逐渐往一个越来越小的明亮圆斑内挤压。

在旅途中，我坚持每隔一段时间就会用激光笔沿径向往外界发送光子信号，至少表明我还活着。

(8.22)实际上给出了我的四维速度的 r 分量

$$v^r = -\sqrt{\frac{2G_N M}{r} - \frac{2G_N M}{r_0}} \quad (8.24)$$

又根据四维速度归一化要求，或者直接根据初条件确定的 $\frac{E}{m} = \sqrt{1 - \frac{2G_N M}{r_0}}$ 以及(8.11)，可以得到我的四维速度的 t 分量

$$u^t = \frac{\sqrt{1 - \frac{2G_N M}{r_0}}}{1 - \frac{2G_N M}{r}}. \quad (8.25)$$

因为我在自由下落，所以在我的观测标架中看，我的激光笔发出的光子的频率就是该激光笔的固有工作频率 ν_0 。这说明光子的四维动量 p 和我的四维速度（逆标架时间基矢）的内积是 $h\nu_0$ ，

$$p_t \frac{\sqrt{1 - \frac{2G_N M}{r_0}}}{1 - \frac{2G_N M}{r}} - p_r \sqrt{\frac{2G_N M}{r} - \frac{2G_N M}{r_0}} = h\nu_0. \quad (8.26)$$

光子走径向的测地线，那么

$$(p_t)^2 \left(1 - \frac{2G_N M}{r}\right)^{-1} - (p_r)^2 \left(1 - \frac{2G_N M}{r}\right) = 0. \quad (8.27)$$

如果 $r > 2G_N M$ ，根据 $p^r = -\left(1 - \frac{2G_N M}{r}\right)p_r$ 为正数，可以从上面两式解出

$$p_t = h\nu_0 \left(\sqrt{1 - \frac{2G_N M}{r_0}} - \sqrt{\frac{2G_N M}{r} - \frac{2G_N M}{r_0}} \right). \quad (8.28)$$

注意 p_t 就是遥远处 $r \rightarrow \infty$ 相对坐标系静止的观测者看到的光子能量。上面的结果表明，当我无限靠近视界面时，激光笔发出的光子的能量被“无限红移”了，外部将无法再接收到我的信号或者说“看到”我。这就是“视界”这个名字的由来。

在我穿过黑洞视界的一刹那，我和整个黑洞视界外的世界失联了。

最后一段旅程——进入视界

穿过视界后，我仍然不死心地试图发出光子和外界通讯，但是如果假设光子 $p^r > 0$ ，我仍然可以从 (8.26) 和 (8.27) 推出 (8.28)——这对应一个不可能存在的负能量光子！也就是说，在黑洞视界内，即使是光也不可避免地落向黑洞奇点，再也无法向视界外传出去任何信息。

当然——我并没有绝望，毕竟我还有个神秘宝箱……

为什么在 $r < 2G_N M$ 处所有粒子的 dr 都小于零呢？这是因为在视界内部， $g_{rr} > 0$ 而 $g_{tt} < 0$ ，所以 t 和 r 的身份标签发生了互换—— t 变成了一个类似于空间位置的坐标，而 r 变成了一个类似于时间的坐标—— r 减小对应着因果的正向； r 增大则意味着逆转因果——这当然是不可能的。

接近光速飞行的秋裤

在我出发的同一个“史瓦西坐标时刻”（ $t = 0$ ），飞船（即我的出发点）恰好在黑洞中心和驻守在更远轨道 $r_1 = 27G_N M$ 的空间站的连线上。考虑到黑洞附近很冷，物资储备更加丰富的空间站向我（即黑洞中心方向）以接近光速的初始速度发送了一条秋裤。问题是：这条秋裤能追上我吗？

史瓦西坐标系在视界面上是失效的（ t 坐标发散）。之前在计算我的钟的读数时，实际上是绕过了坐标 t ，直接对 ds/dr 进行积分。但是当我要计算秋裤和我的相遇问题时，就必须用坐标系把两者联系起来。这意味着我们必须使用一个处处不发散的坐标系。

为了更好地掌握这样的一个坐标系，我们需要先学习一个有趣的特殊函数——我称之为 Υ 函数。

8.2.2 Υ 函数

特殊函数 $\Upsilon(x)$ （ $x \geq -1$ ）定义为超越方程 $(\Upsilon - 1)e^\Upsilon = x$ 的非负实数解。后面我们会把这个函数和史瓦西 r 坐标联系起来： $\Upsilon(-1) = 0$ 对应黑洞奇点； $\Upsilon(0) = 1$ 对应黑洞视界。

为了能快速计算 Υ 函数，我构造了一个近似公式：

$$\Upsilon(x) \approx \ln \left[1 + \frac{2C(x+1)}{2 + C \ln[1 + \lambda x(x+1)]} + \sqrt{2+2x} + \frac{2+2x}{5 + 8(2+2x)^{3/25}} \right]. \quad (8.29)$$

这里的

$$C = e - \sqrt{2} - 1 - \frac{2}{5 + 2^{\frac{78}{25}}} \approx 0.1580176098347, \quad (8.30)$$

$$\lambda = \frac{25 \left(5 + 2^{\frac{78}{25}} \right)^2 \left(2e - \sqrt{2} - 4 \right) - 3 \cdot 2^{\frac{128}{25}}}{25 \left(2 - \left(5 + 2^{\frac{78}{25}} \right) \left(e - 1 - \sqrt{2} \right) \right)^2} \approx 0.00386124305656 \quad (8.31)$$

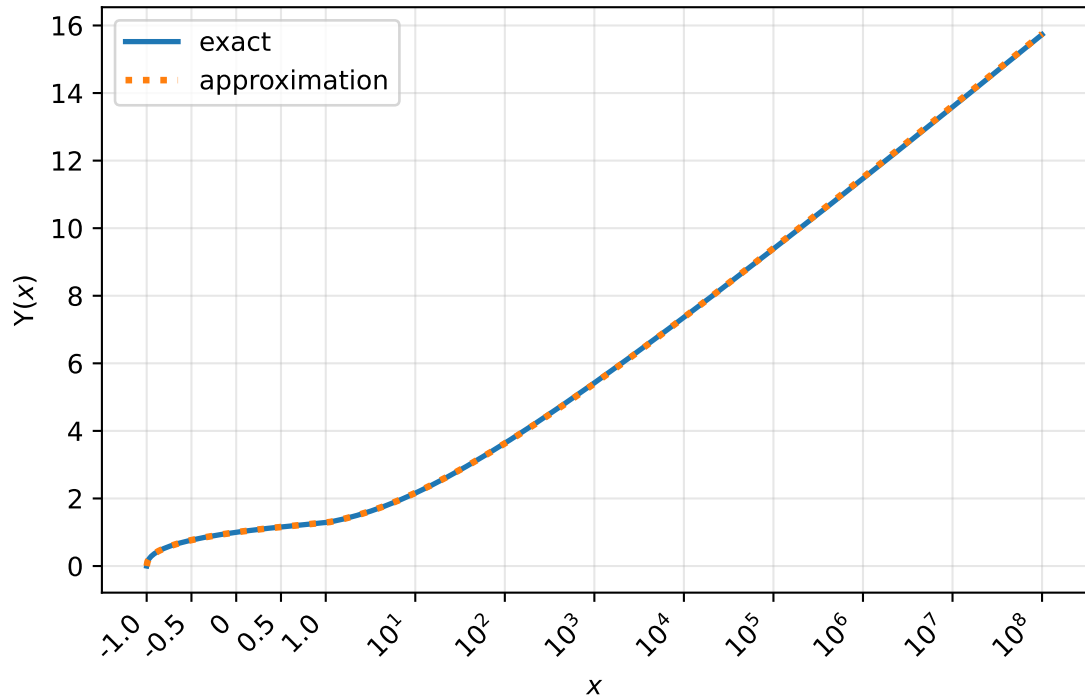


Figure 8.1: $\Upsilon(x)$ 的函数图像；横轴在 $x \in [-1, 1]$ 用线性坐标, $x > 1$ 用对数坐标；点线是(8.29)给出的近似表达式

图8.1给出了 Υ 的函数图像，容易根据定义证明它有如下的性质：

(1) Υ 是严格单调增长的函数。

(2) $\Upsilon(-1) = 0$, $\Upsilon(0) = 1$, $\Upsilon'(0) = \frac{1}{e}$ 。

(3)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\Upsilon(x)}}{x} = \frac{1}{e}.$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{[\Upsilon(x)]^2}{1+x} = 2$$

(5)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Upsilon(x)}{\ln x} = 1$$

(6)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x - \Upsilon(x)}{\ln(\ln x)} = 1$$

(7) 导函数满足

$$\Upsilon'(x) = \frac{1 - \frac{1}{\Upsilon(x)}}{x} = \frac{1}{\Upsilon(x)e^{\Upsilon(x)}}. \quad (8.32)$$

容易验证近似公式(8.29)也严格满足(1-6)这些条件(实际上这些就是我构造出(8.29)的依据), 虽然它并不严格满足(7)。在已经有了 Υ 函数的(近似)计算方法后, 性质(7)可以用来(近似)计算 Υ 的导函数的值。

8.2.3 Kruskal 坐标系

我们现在把“视界半径” $2G_N M$ 作为默认的长度和时间单位。在这种约定下, r, t 其实是 $\frac{r}{2G_N M}$ 和 $\frac{t}{2G_N M}$ 的意思, ds 其实是 $\frac{ds}{2G_N M}$ 的意思, 等等。

按上述方法用单位 $2G_N M$ 把所有量无量纲化之后, 史瓦西度规可以写作

$$ds^2 = \left(1 - \frac{1}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (8.33)$$

坐标 θ, ϕ 体现了史瓦西黑洞的球对称性, 所以我不打算动它们。 r 和 t 这两个家伙就很闹心了, 居然在穿过视界时偷偷互相交换了身份令牌(时间坐标和空间坐标的身份标签)! 我希望找一个性格比较沉稳的坐标系 $(\tau, \mu, \theta, \phi)$, 使得 τ 一直代表时间, μ 一直是空间坐标。具体地说, 我心目中的“良民”坐标系大致长这样:

$$ds^2 = A(\tau, \mu) (d\tau^2 - d\mu^2) - r(\tau, \mu) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (8.34)$$

这里的 $A(\tau, \mu)$ 和 $r(\theta, \phi)$ 都是恒正的二元函数。

我们的任务是确定 $A(\tau, \mu)$ 和 $r(\tau, \mu)$ 这两个函数。如果单纯依靠写出 $A(\tau, \mu)$ 和 $r(\tau, \mu)$ 满足的联合微分方程并求解, 成功的希望并不太大(主要是方程有些复杂)。我的办法是先两个坐标系里考虑简单的物理对象——一个径向(指 $d\theta = d\phi = 0$) 落向黑洞的光子的测地线。

在良民坐标系中, $ds^2 = 0$ 转化为 $d\mu = \pm d\tau$, 也就是 $\tau \pm \mu$ 是常数。我可以选择 μ 增大的方向为远离黑洞, 由此确定落向黑洞的光子的测地线方程为 $\tau + \mu = C_1$ 。这里的 C_1 是积分常数, 由光子的初条件确定。

在史瓦西坐标系中, $ds^2 = 0$ 转化为 $dt = -\frac{dr}{1-\frac{1}{r}}$ (负号体现“落入”), 两边积分后就得到 $r + \ln|r-1| + t = C_2$ 。

积分常数 C_1 和 C_2 之间必然存在某种映射, 也就是说我在寻找一种满足 $r + \ln|r-1| + t \rightarrow \tau + \mu$ 的坐标变换。因为 $A(\tau, \mu)$ 必须恒正, 它不能包含类似于 $1 - \frac{1}{r}$ 之类的因子, 所以史瓦西度规里的 $1 - \frac{1}{r}$ 多半来自于 $d\tau^2 - d\mu^2$ 。那我就猜测 τ 和 μ 里包含 $\sqrt{|r-1|}$ (这样 $d\tau^2$ 和 $d\mu^2$ 里才能自然地出现 $r-1$ 之类的东西), 看上去比较自然的映射就是 $\tau + \mu = Ce^{\frac{1}{2}(r+\ln|r-1|+t)} = \sqrt{|r-1|}e^{(r+t)/2}$ 。常数 C 可以吸收到坐标 τ, μ 的定义中, 所以最后我们要求

$$\tau + \mu = \sqrt{|r-1|}e^{(r+t)/2}. \quad (8.35)$$

类似地, 考虑往“外”发射的光子。在良民坐标系里的方程是 $\mu - \tau = C_1$; 在史瓦西度规坐标系里满足的方程是 $r + \ln(r-1) - t = C_2$ 。按照类似的思路, 我们希望

有 $\mu - \tau = \pm \sqrt{|r-1|} e^{(r-t)/2}$ 。由于 $\mu - \tau$ 始终代表“径向向外空间坐标减去正向时间坐标”的意思；在视界外， $r-t$ 具有同样意思，所以我们取 + 号。在视界内，我们可以通过选取 - 号来完成 r 和 t 交换身份令牌这件事情：

$$\mu - \tau = \begin{cases} \sqrt{r-1} e^{(r-t)/2} & , \text{ if } r > 1, \\ -\sqrt{1-r} e^{(r-t)/2} & , \text{ if } r < 1. \end{cases} \quad (8.36)$$

结合 (8.35) 和 (8.36),

如果 $r > 1$ (视界外), 则

$$\mu = \sqrt{r-1} e^{\frac{r}{2}} \cosh \frac{t}{2} \quad (8.37)$$

$$\tau = \sqrt{r-1} e^{\frac{r}{2}} \sinh \frac{t}{2} \quad (8.38)$$

如果 $r < 1$ (视界内), 则

$$\mu = \sqrt{1-r} e^{\frac{r}{2}} \sinh \frac{t}{2} \quad (8.39)$$

$$\tau = \sqrt{1-r} e^{\frac{r}{2}} \cosh \frac{t}{2} \quad (8.40)$$

在视界上, $\mu = \tau$, 但是因为 t 坐标失效, 无法映射到具体的 μ 值了。

利用我们刚刚学习的 Υ 函数, 可以反过来解出:

$$r = \Upsilon(\mu^2 - \tau^2), \quad (8.41)$$

$$t = \begin{cases} 2 \operatorname{arctanh} \frac{\tau}{\mu} & , \text{ if } |\mu| > |\tau|, \\ 2 \operatorname{arctanh} \frac{\mu}{\tau} & , \text{ if } |\mu| < |\tau|, \\ \text{undefined} & , \text{ if } |\mu| = |\tau| \end{cases} \quad (8.42)$$

把上面两式代入史瓦西度规, 并利用 (8.32) 就得到

Kruskal 度规

$$ds^2 = 4\Upsilon'(\mu^2 - \tau^2) (d\tau^2 - d\mu^2) - [\Upsilon(\mu^2 - \tau^2)]^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (8.43)$$

坐标 μ 代表黑洞沿径向向外的空间坐标; 坐标 τ 的正向为时间因果方向, 它的可取值范围为 $-\mu < \tau < \sqrt{\mu^2 + 1}$ (见图8.2)。

我们刚刚得到的这个坐标系的最早提出者是美国数学物理学家马丁·克鲁斯

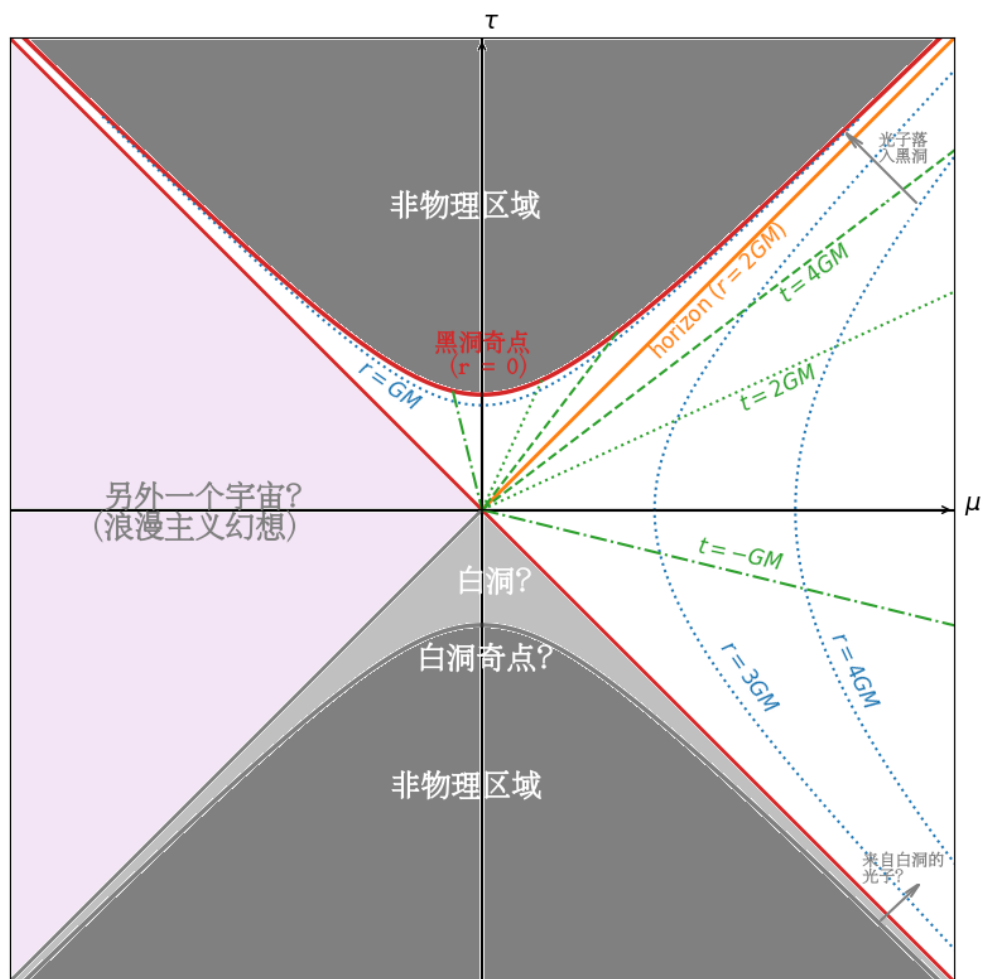


Figure 8.2: Kruskal 坐标图

卡尔 (Martin David Kruskal) 和匈牙利-澳大利亚数学家乔治·塞凯赖什 (George Szekeres)。两人在 1960 年几乎同时独立发现了这一坐标系。我们今后把该坐标系简称为 Kruskal 坐标系 (中文“克鲁斯卡尔”更难写, 就不用了)。

在 Kruskal 坐标系里, 原来史瓦西坐标系中我的四维速度方程 $\frac{dt}{ds} = \frac{\sqrt{1 - \frac{2G_N M}{r_0}}}{1 - \frac{2G_N M}{r}}$ 成为了,

$$2\Upsilon'(\mu^2 - \tau^2) \left(\mu \frac{d\tau}{ds} - \tau \frac{d\mu}{ds} \right) = \sqrt{1 - \frac{2G_N M}{r_0}}. \quad (8.44)$$

另外根据(8.43)可以得到

$$\left(\frac{d\tau}{ds} \right)^2 - \left(\frac{d\mu}{ds} \right)^2 = \frac{1}{4\Upsilon'(\mu^2 - \tau^2)}. \quad (8.45)$$

令 $x = \mu + \tau, y = \mu - \tau$, 上述两个方程可以写作

$$\frac{dy}{ds} = \frac{y}{x} \frac{dx}{ds} - \frac{\sqrt{1 - \frac{2G_N M}{r_0}}}{x\Upsilon'(xy)}, \quad (8.46)$$

和

$$\frac{dy}{ds} \frac{dx}{ds} = -\frac{1}{4\Upsilon'(xy)}. \quad (8.47)$$

结合上面两式, 得到

$$\left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \frac{\sqrt{1 - \frac{2G_N M}{r_0}}}{x\Upsilon'(xy)} \frac{dy}{ds} + \frac{y}{4x\Upsilon'(xy)} = 0. \quad (8.48)$$

该方程的解是

$$\frac{dy}{ds} = -\frac{\sqrt{1 - \frac{2G_N M}{r_0}}}{2x\Upsilon'(xy)} \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{2G_N M}{r_0}}{[2x\Upsilon'(xy)]^2} - \frac{y}{4x\Upsilon'(xy)}} \quad (8.49)$$

其中“+”代表沿径向往外运动,“-”代表沿径向往内运动。

最后我不得不借助数值积分进行计算,简单的示范代码如下(<http://zhiqihuang.top/gr/lectures/qiuku.py>):

Code 8.1: 计算秋裤能否追上我的代码

```
import numpy as np
import scipy.integrate as itg
#initial conditions; length unit = 2GM
r0 = 4.
r1 = 13.5
t_ini = 0. #this can be arbitrary number

#define the r function
def r_approx(x): #approximate r(x)
    C = np.e-1.-np.sqrt(2.)-2./(5.+2*(78./25.))
```

```

lam = (25*(5.+2**((78./25.))**2*(2*np.e-np.sqrt(2.))-4.)-3*2.**((128./25.))/25/(2.-(5.+2**((78./25.))*(np.e
-1.-np.sqrt(2.))**2
return np.log(1.+ 2.*C*(x+1.)/(2.+ C*np.log(1.+lam*x*(x+1.))) + np.sqrt(2.+2*x)+(2.+2*x)/(5.+8.*(2.+2*x)
**((3./25.)))

def r_exact(x): #r(x)
    """for input x >= -1 find w>0 such that (w-1)e^w = x"""
    ##check error
    if x < -1:
        print("Error: Invalid input for r_exact")
        return None
    if x < -0.999:
        u = np.sqrt(2.*(1.+x))
        return u*(1.+u*(-1./3. + u*(11./72.+u*(-43./540.+u*769./17280.)))
    w = r_approx(x)
    lastw = w
    w = (x*np.exp(-w)-w+1.0)/w+w
    while(abs(w-lastw)>1.e-13):
        lastw = w
        w = (x*np.exp(-w)-w+1.0)/w+w
    return w

eq1_C = np.sqrt(1. - 1./r0) #(\tau+\mu)d(\tau-\mu)/ds - (\tau-\mu) d(\tau+\mu)/ds
qiuku_tau_plus_mu = np.sqrt(abs(r1-1.))*np.exp((r1 + t_ini)/2.)
mymu0 = np.sqrt(r0-1.)*np.exp(r0/2.)*np.cosh(t_ini/2.)
mytau0 = np.sqrt(r0-1.)*np.exp(r0/2.)*np.sinh(t_ini/2.)
s_end = np.pi/2.*np.sqrt(r0**3)

def my_eom(z, s): #evolution equations for z = [\tau+\mu, \tau-\mu]
    r = r_exact(z[0]*z[1])
    rp = np.exp(-r)/r
    a = z[0]
    b = eq1_C/rp
    c = 0.25*z[1]/rp
    dz1ds = (-b-np.sqrt(abs(b**2-4.*a*c)))/2./a
    dz0ds = -0.25/rp/dz1ds
    return [dz0ds, dz1ds]

n=2000
s = np.linspace(0., s_end*0.9999, n)
z = itg.odeint(my_eom, [mymu0+mytau0, mymu0-mytau0], s)
if(z[n-1, 0] < qiuku_tau_plus_mu):
    print("Oh no, I will miss the qiuku!")
else:
    for i in range(n-1):
        if(z[i, 0] < qiuku_tau_plus_mu and z[i+1, 0] >= qiuku_tau_plus_mu):
            r = (r_exact(z[i, 0]*z[i, 1])*np.log(z[i+1, 0]/qiuku_tau_plus_mu)+r_exact(z[i+1, 0]*z[i+1, 1])*np.
log(qiuku_tau_plus_mu/z[i, 0]))/np.log(z[i+1, 0]/z[i, 0]) #interpolate to get r
            print("I get the qiuku at r/(2GM) = ", r)

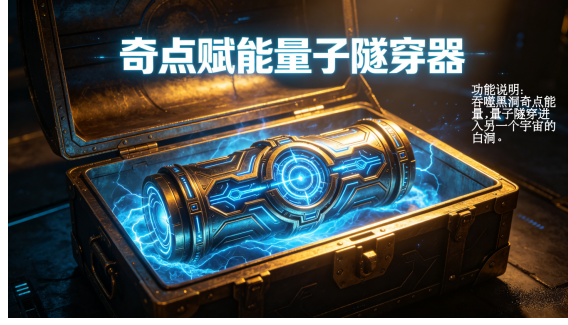
```

最后得到的结果是，我在 $\frac{r}{2G_{NM}} \approx 0.932$ 处会收到秋裤（寒冷属性防御+1）。

8.2.4 纯数学模型：白洞和另一个宇宙

在和 Kruskal 度规对应的**纯粹的数学理想化模型**中，史瓦西黑洞的奇点（图8.2双曲线上支）和白洞奇点（图8.2双曲线下支）是同一类空奇点的两个时间分支，它们在拓扑上共同连接着两个**因果不连通**的宇宙。在另一个宇宙中，白洞处于无穷远的过去，它和黑洞相反——物质只出不进。（注意，这是为了让故事好玩一些的纯粹数学模型，宇宙学观测和理论不支持理想的永恒史瓦西黑洞存在，更没有白洞和另一个宇宙的存在任何证据；以下故事内容纯属瞎编……）。

在被黑洞奇点吞没前的瞬间，宝箱自动打开，露出了里面的神器——



8.3 课后练习

习题 12: 某测试粒子绕质量为 M 的史瓦西黑洞作圆周运动。其径向史瓦西坐标 $r = 12G_N M$ 。该测试粒子的轨道周期（用粒子固有时测量）是多少？

习题 13: 稳定的黑洞还可以携带角动量和电荷；借助人工智能，阅读 Kerr 黑洞的相关知识。

习题 14: 不带电荷的 Kerr 黑洞的度规可以写成

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \left(1 - \frac{2G_N M r}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) dt^2 \\
 & + \frac{4G_N M r a \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} dt d\phi \\
 & - \left(r^2 + a^2 + \frac{2G_N M r a^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) \sin^2 \theta d\phi^2 \\
 & - \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 - 2G_N M r + a^2} dr^2 \\
 & - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2
 \end{aligned} \tag{8.50}$$

这里的 M 是质量参数， a 是比角动量参数。

请证明：在赤道（ $\theta = \frac{\pi}{2}$ ）平面上运动的粒子， p_ϕ 守恒可以写成：

$$-\frac{2G_N M a}{r} \frac{dt}{ds} + \left(r^2 + a^2 + \frac{2G_N M a^2}{r}\right) \frac{d\phi}{ds} = \frac{L}{m}$$

然后考虑一个非常简化的情形， $r \gg G_N M \gg a$ ，且粒子运动速度远小于光速。也就是说，Kerr 黑洞的角动量比较小，且测试粒子离得比较远，运动是非相对论的。证明在最低阶近似下有：

$$\frac{d\phi}{dt} \approx \frac{\frac{L}{m} + \frac{2G_N M a}{r}}{r^2 + a^2}$$

就是说，即使粒子的守恒角动量为零（比如它从很远处瞄准黑洞中心下落过来），它也会被黑洞的角动量带着旋转起来，旋转方向和黑洞角动量方向一致。这就是引力拖曳效应。

习题 15: 我们来估算下质量为 M 的史瓦西黑洞的“视界温度”：黑洞把粒子禁锢在 $\Delta t \sim \frac{4\pi G_N M}{c^3}$ 大小的时间区域内 (注意 $r < 2G_N M$ 时, r 是类时坐标), 根据海森堡不确定原理, 黑洞视界内的粒子满足

$$\Delta E \Delta t \gtrsim \frac{\hbar}{2}$$

于是可以估算出粒子能量的量子波动

$$\Delta E \sim \frac{\hbar c^3}{8\pi G_N M}$$

那么史瓦西黑洞的“温度”

$$T = \frac{\Delta E}{k_B} = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G_N M}. \quad (8.51)$$

回忆一下黑体单位表面积的辐射功率为:

$$\frac{dP}{dS} = \frac{\pi^2 k_B^4}{60 \hbar^3 c^2} T^4$$

贯彻我们的瞎扯精神, 把黑洞当成黑体, 把黑洞视界当成“表面”, 史瓦西黑洞的辐射功率为:

$$P = 4\pi \left(\frac{2G_N M}{c^2} \right)^2 \frac{\pi^2 k_B^4}{60 \hbar^3 c^2} \left(\frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G_N M} \right)^4 = \frac{c^6 \hbar}{15360 \pi G_N^2 M^2} \quad (8.52)$$

虽然推演过程被幼儿园化了, 但是结论和霍金的计算完全相同。利用上面的结果证明史瓦西黑洞的寿命为

$$t = \frac{5120 \pi G_N^2 M^3}{c^4 \hbar}. \quad (8.53)$$

9. 引力波

引力波是时空曲率以光速传播的涟漪，由广义相对论预言。大质量天体（如双黑洞、中子星）的加速运动或不对称爆发（如超新星）产生剧烈引力扰动，以光速向外辐射。在远离波源的地方，天体物理引力波的振幅极弱，但通过激光干涉仪（LIGO、Virgo 等）已直接探测到，为宇宙提供全新的观测窗口，可探知暗物质、早期宇宙等电磁手段难以触及的信息。

9.1 平面传播引力波 (pp-wave)

在线性近似下，复杂的波可以看成是平面波（plane-propagation waves，简称 pp-wave）的叠加。在离波源很远的地方，球面波也可以局域近似为平面波。因此，我们从平面波这种基础的波形作为切入点来研究引力波。

9.1.1 pp-wave 的度规

在幼儿园小班课程《数学物理方法》[1] 中，我们学习过一维波动方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0, \quad (9.1)$$

这里的 a 是波速。

一维波动方程(9.1)的通解是

$$f = A(z - at) + B(z + at) \quad (9.2)$$

这里的 A, B 为任意的二次可导函数，分别代表右行波和左行波。

如果把坐标 z, t 替换为 $u = \sqrt{\frac{1+a^2}{2a^2}}(z - at)$, $v = \sqrt{\frac{1+a^2}{2a^2}}(z + at)$, Minkowski 度规 $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ 变为

$$ds^2 = \lambda (du^2 + dv^2) - dudv - dx^2 - dy^2. \quad (9.3)$$

这里的 $\lambda \equiv \frac{1-a^2}{2(1+a^2)}$ 。

因为(9.3)本质上还是在描述 Minkowski 时空, 所以黎曼张量处处为零。为了让这个时空更加有趣, 我们可以试着在度规中增添一些描述某个方向的波的项。我们不妨取右行波 (也就是 u 的函数) 来考虑

$$ds^2 = \lambda (du^2 + dv^2) - dudv - dx^2 - dy^2 - f(u, x, y)du^2. \quad (9.4)$$

我希望构造 $f(u, x, y)$ 使得里奇张量处处为零 ($\mathcal{R}_{\mu\nu} = 0$ 描述空无一物的假想宇宙), 但是黎曼张量并不处处为零。

直接对(9.4)计算里奇张量, 获得

$$\mathcal{R}_{uu} = \frac{\lambda}{(4\lambda f + 1)} \left[(\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2 \right] - \frac{1}{2} (\partial_x^2 f + \partial_y^2 f), \quad (9.5)$$

和

$$\mathcal{R}_{ij} = \frac{4\lambda^2}{(4\lambda f + 1)^2} (\partial_i f)(\partial_j f) - \frac{2\lambda}{4\lambda f + 1} \partial_i \partial_j f, \quad i, j \in \{x, y\}. \quad (9.6)$$

其余分量均为零。

所以只要让 $\lambda = 0$ (也就是说 $a = 1$, 即波速为光速), 并且 $\partial_x^2 f + \partial_y^2 f = 0$, 就可以让全部里奇张量为零。这时, 度规成为

$$ds^2 = -dudv - dx^2 - dy^2 - f(u, x, y)du^2. \quad (9.7)$$

这里的 f 是关于 x, y 的调和函数, 即它满足

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)f = 0. \quad (9.8)$$

在 $f \rightarrow 0$ 的情况下, u, v 和 Minkowski 坐标系的对应关系是 $u = z - t$, $v = z + t$ 。

在下面的讨论中, 我们有时会用 (x^0, x^1, x^2, x^3) 替代 (u, x, y, v) 。因为我们将重点考虑垂直于引力波传播方向的测试粒子的运动, 或者说测地线偏离的 1, 2 分量, 我们做一个仅在这一节 (9.1节) 有效的特殊约定: 指标 i, j 都只跑遍 1, 2 (对应 x, y 分量)。希腊字母仍然跑遍 0, 1, 2, 3。

注意 f 不依赖于 $x^3 = v$, 可以直接由度规(9.7)计算出联络和黎曼张量的非零分量是

$$\Gamma_{00}^3 = \partial_0 f \quad (9.9)$$

$$\Gamma_{i0}^3 = \Gamma_{0i}^3 = \partial_i f \quad (9.10)$$

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2}\partial_i f \quad (9.11)$$

$$R^3_{ij0} = -R^3_{i0j} = \partial_i \partial_j f, \quad (9.12)$$

$$R^i_{00j} = -R^i_{0j0} = \frac{1}{2}\partial_i \partial_j f \quad (9.13)$$

如果要求度规(9.7)对全时空适用, 且对固定的 u , $f(u, x, y)$ 是有界的函数, 那么根据“全空间有界的调和函数只能是常数”(请用散度的物理意义自行证明这一有趣的结论), 就会导致 $\partial_x f = \partial_y f = 0$ 。那么所有黎曼张量分量为零, 事实上就回归了平直时空。这说明, 在完全没有物质的假想宇宙里, 如果要求度规有界, 就不存在引力波。或者换一种说法: 如果度规有界, 那么引力波不能“凭空产生”(即引力波必须存在波源)。

9.1.2 pp-wave 势函数

最后, 我们还需要解决“规范”(即坐标系的自由选择带来的非物理自由度)问题。虽然(9.7)中的 f 代表了沿着 z 轴正向传播的引力波, 但是 f 很小并不代表引力波很弱。这是因为我总是可以做如下的替换 $u \rightarrow Cu$, $v \rightarrow \frac{1}{C}v$, 以及 $f \rightarrow \frac{1}{C^2}f$, 保持(9.7)的度规形式完全不变。只要我取足够大的 C , 总是可以令 f 任意地小! 为了解决这个问题, 我把度规(9.7)中的 f 替换为 $\partial_u^2 H(u, x, y)$, 度规成为

pp-wave 度规

$$ds^2 = -du dv - dx^2 - dy^2 - [\partial_u^2 H(u, x, y)] du^2. \quad (9.14)$$

现在, 当做替换 $u \rightarrow Cu$, $v \rightarrow \frac{1}{C}v$ 时, H 可以保持不变! 不过, 这又引起了一些新的问题: 给 $H(u, x, y)$ 加上任意一个和 u 无关的函数都不会改变度规。为了减少这些非物理的自由度, 我们要求 H 满足

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)H = 0 \quad (9.15)$$

和

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty} H(u, x, y) = 0 \quad (9.16)$$

这样 $(\partial_x^2 + \partial_y^2)f = 0$ 就自然满足了。我们必须在波源处用爱因斯坦方程匹配边界条件, 并利用 H 在横向无穷远处消失这个条件才能获得 H 的唯一解。

为了方便叙述, 我们把(9.14) $H(u, x, y)$ 称为 “pp-wave 势函数”。

9.1.3 引力波测地线偏离方程

为了更清楚地讨论各个指标分量, 我们把 (u, x, y, v) 替换为 (x^0, x^1, x^2, x^3) ,

$$ds^2 = -dx^0 dx^3 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - [\partial_0^2 H(x^0, x^1, x^2)] (dx^0)^2. \quad (9.17)$$

由于度规(9.17)不依赖于 $x^3 = v$, 任何沿测地线运动的测试粒子的 p_3 守恒。又因为 $p_3 = g_{\alpha 3} p^\alpha = -\frac{1}{2} p^0$, 所以 $p^0 = -2p_3$ 也守恒。对静止质量非零的测试粒子, p^0 守恒意味着 $\frac{dx^0}{ds}$ 守恒——这意味着 $x^0 = u$ 是 s 的线性函数。

不妨考虑满足 $x^0 = -s$ 的两条邻近测地线 A 和 B。设 A 的方程为 $x^\mu(s)$, B 的方程为 $x^\mu(s) + \zeta^\mu(s)$ 。因为两条测地线的坐标 $x^0(s) = -s$ 是相同的, 所以

$$\zeta^0 = \frac{d\zeta^0}{ds} = 0. \quad (9.18)$$

(即测地线偏离的 u 分量恒为零)。

对任意矢量场 A , 沿着测地线的方向协变导数

$$\left(\frac{dA}{ds} \right)^\alpha = (\nabla A)^\alpha_\mu \frac{dx^\mu}{ds} = \left(\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} A^\nu \right) \frac{dx^\mu}{ds} = \frac{dA^\alpha}{ds} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} A^\nu \frac{dx^\mu}{ds} \quad (9.19)$$

当 $\alpha = 0$, 注意所有 $\Gamma^0_{\mu\nu}$ 均为零, 就有

$$\left(\frac{dA}{ds} \right)^0 = \frac{dA^0}{ds}. \quad (9.20)$$

当 $\alpha = i \in \{1, 2\}$, 注意到 $\Gamma^i_{\mu\nu}$ 仅有非零分量 $\Gamma^i_{00} = -\frac{1}{2} \partial_i f$, 且在测地线上 $\frac{dx^0}{ds} = -1$, 就有

$$\left(\frac{dA}{ds} \right)^i = \frac{dA^i}{ds} + \frac{1}{2} (\partial_i f) A^0 \quad (9.21)$$

在 (9.20) 和 (9.21) 中令 A 为测地线偏离矢量 ζ , 利用条件(9.18), 就有

$$\left(\frac{d\zeta}{ds} \right)^0 = 0, \quad (9.22)$$

$$\left(\frac{d\zeta}{ds} \right)^i = \frac{d\zeta^i}{ds}. \quad (9.23)$$

然后在 (9.21) 中令 A 为沿测地线的方向协变导数 $\frac{d\zeta}{ds}$, 并利用上面两个结果, 就有

$$\left(\frac{d^2\zeta}{ds^2} \right)^i = \frac{d^2\zeta^i}{ds^2}. \quad (9.24)$$

再根据测地线偏离方程(3.42)，黎曼曲率的表达式(9.13)，以及偏离矢量的 u 分量恒为零这些条件，可以得到

$$\left(\frac{d^2\zeta}{ds^2}\right)^3 = (\partial_i\partial_j f)\frac{dx^i}{ds}\zeta^j, \quad (9.25)$$

$$\frac{d^2\zeta^i}{ds^2} = \left(\frac{d^2\zeta}{ds^2}\right)^i = \frac{1}{2}(\partial_i\partial_j f)\zeta^j. \quad (9.26)$$

在观测引力波时，我们总是考虑几乎静止的测试粒子在引力波通过时的响应。因此 $\frac{dx^i}{ds}$ 都非常小，引力波的“纵向效应”(9.25)很难测量。观测引力波主要依靠描述“横向效应”的两个方程(9.26)。

我们要定义两个和 f 同样为无量纲数的“引力波振幅”：

$$h_+(u, x, y) \equiv \frac{1}{2}(\partial_x^2 - \partial_y^2)H, \quad (9.27)$$

$$h_\times(u, x, y) \equiv \partial_x\partial_y H. \quad (9.28)$$

再根据条件(9.15)，可以解出 $\partial_x^2 H = h_+$ 和 $\partial_y^2 H = -h_+$ 。这样黎曼张量所有非零分量都可以用 $\partial_u^2 h_+$ 和 $\partial_u^2 h_\times$ 表示出来，或者说—— $h_+, h_\times$ 包含了引力波所有自由度。

(9.26)就成为

引力波测地线偏离方程：

$$\frac{d^2}{ds^2} \begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\partial_u^2 \begin{pmatrix} h_+ & h_\times \\ h_\times & -h_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \end{pmatrix}. \quad (9.29)$$

9.1.4 引力子的“自旋”

我们可以把二维 x, y 坐标逆时针方向旋转 θ 角成为 $\tilde{x}, \tilde{y}$ 坐标，即

$$x = \tilde{x}\cos\theta - \tilde{y}\sin\theta, \quad y = \tilde{y}\cos\theta + \tilde{x}\sin\theta. \quad (9.30)$$

那么有

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y}, \quad (9.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} = -\sin\theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial y}. \quad (9.32)$$

上面两式可以精简地写成

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \pm i \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} = e^{\mp i\theta} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (9.33)$$

上式平方，得到

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2}\right) \pm 2i \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} = e^{\mp 2i\theta} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \pm 2i \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right]. \quad (9.34)$$

如果把 H 看成标量场，并在新坐标系里仍然定义

$$\tilde{h}_+(u, \tilde{x}, \tilde{y}) \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2}\right) H, \quad (9.35)$$

$$\tilde{h}_\times(u, \tilde{x}, \tilde{y}) \equiv \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} H. \quad (9.36)$$

那么就有

$$\tilde{h}_+ \pm i\tilde{h}_\times = e^{\mp 2i\theta} (h_+ \pm ih_\times). \quad (9.37)$$

这说明 $h_+ \pm ih_\times$ 是自旋权为 ± 2 的两个分量（自旋权 s 指的是把波的传播方向的法向平面上的坐标系旋转 θ 后，多出 $e^{-is\theta}$ 的因子的坐标变换性质）。那么，如果引力波可以量子化，其对应的粒子应该是无质量且自旋为 2 的“引力子”¹。

9.1.5 弱场近似下测试粒子的周期性偏移

在测量引力波的实验里，考虑的是一些“基本不动”的测试粒子，它们的世界线偏差近似是常数矢量。在弱场近似 ($|h_+|, |h_\times|$ 趋向于零) 的情况下，可以把(9.29)右边近似为常量 (ζ^i 的零阶近似 C^i)。

也就是说，令 $\zeta^i \approx C^i + \delta\zeta^i$ ，近似有

$$\frac{d^2}{ds^2} \begin{pmatrix} \delta\zeta^1 \\ \delta\zeta^2 \end{pmatrix} \approx \frac{1}{2} \partial_u^2 \begin{pmatrix} h_+ & h_\times \\ h_\times & -h_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^1 \\ C^2 \end{pmatrix}. \quad (9.38)$$

在满足 $u = -s$ 的测地线上， $\frac{d^2}{ds^2}$ 和 ∂_u^2 其实是等价的，所以

$$\begin{pmatrix} \delta\zeta^1 \\ \delta\zeta^2 \end{pmatrix} \approx \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h_+ & h_\times \\ h_\times & -h_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^1 \\ C^2 \end{pmatrix}. \quad (9.39)$$

(没有积分常数项是因为当 $h_+ = h_\times = 0$ 时，必须有 $\delta\zeta^1 = \delta\zeta^2 = 0$ 。)

为了更形象地描述引力波产生的效应，我们考虑一条中心测地线以及零阶偏离量（可以认为是没有引力波通过时的偏离量）布满一个圆周 $\begin{pmatrix} C^1 \\ C^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$ 的一簇测地线（ r 固定， θ 遍布 $[0, 2\pi)$ ）。

¹有质量自旋为 S （必须是整数或者半整数）的粒子，其自旋权可以取遍 $-S, -S+1, -S+2, \dots, S-1, S$ 。无质量自旋为 S 的粒子，其自旋权（也叫螺旋度）只能取 $\pm S$ 。

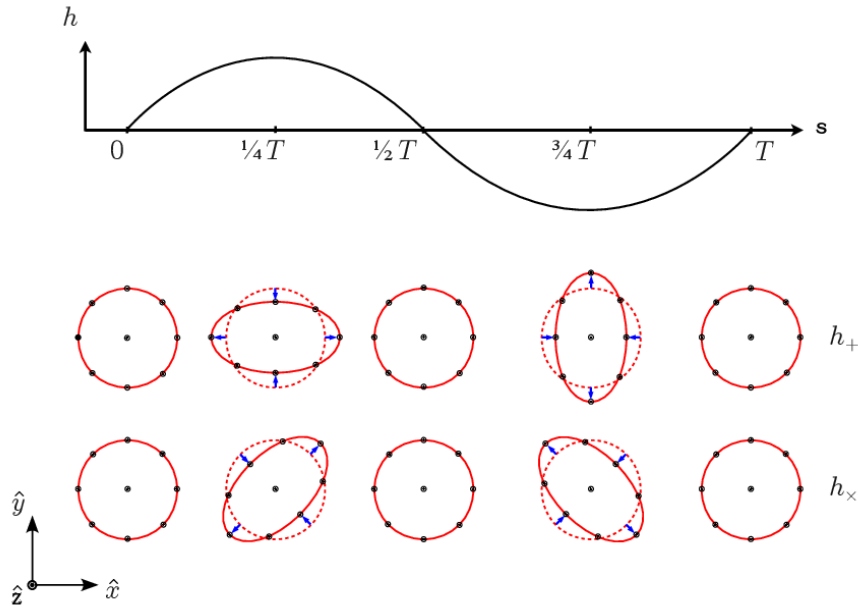


Figure 9.1: 周期性的 h_+ 和 $h_\times$ 在弱场近似下对圆排列的测试粒子的作用

根据(9.39), $+$ 模式的单频的引力波 $h_+ = A_+ \sin(ks)$ 产生的效应就是

$$\zeta^1 = r \cos \theta \left[1 + \frac{1}{2} A_+ \sin(ks) \right], \quad \zeta^2 = r \sin \theta \left[1 - \frac{1}{2} A_+ \sin(ks) \right], \quad (9.40)$$

这对应椭圆方程

$$\frac{(\zeta^1)^2}{r^2 \left[1 + \frac{1}{2} A_+ \sin(ks) \right]^2} + \frac{(\zeta^2)^2}{r^2 \left[1 - \frac{1}{2} A_+ \sin(ks) \right]^2} = 1, \quad (9.41)$$

椭圆的长轴、短轴方向和 x - y 坐标轴方向重合。

$\times$ 模式的单频引力波 $h_\times = A_\times \sin(ks)$ 产生的效应就是

$$\zeta^1 = r \cos \theta + \frac{1}{2} r \sin \theta A_\times \sin(ks), \quad \zeta^2 = r \sin \theta + \frac{1}{2} r \cos \theta A_\times \sin(ks), \quad (9.42)$$

这对应一个椭圆方程

$$\frac{\left(\frac{\zeta^1 + \zeta^2}{\sqrt{2}} \right)^2}{r^2 \left[1 + \frac{1}{2} A_\times \sin(ks) \right]^2} + \frac{\left(\frac{\zeta^1 - \zeta^2}{\sqrt{2}} \right)^2}{r^2 \left[1 - \frac{1}{2} A_\times \sin(ks) \right]^2} = 1. \quad (9.43)$$

椭圆的长轴、短轴方向和 x - y 坐标轴成 45° 角。

图9.1 展示了弱场近似下单频引力波导致圆排列的测试粒子的位置发生周期性变化。这里周期性变化的是 x - y 平面上的坐标偏差，它具有直接的物理意义吗？在弱场近似下，答案是肯定的。在弱场近似下 v 坐标的变化受到引力波振幅和测试粒子的速度（按实验设置，几乎为零）的双重压低，可以认为测地线偏差的 v 分量都

是零。在 u, v 的差别为零的情况下, $ds^2 = -dx^2 - dy^2 = -(\zeta^1)^2 - (\zeta^2)^2$ 直接代表了四维不变距离平方。我们可以通过观察测试粒子之间的光程变化等手段来测量引力波 (LIGO 等实验的测量引力波的原理)。

9.2 弱场近似下的引力辐射

下面我们来考虑如何计算具体物理体系产生的引力波 (也叫作引力辐射)。黑洞并合 (的最后阶段) 等问题中的强场引力辐射通常需要数值广义相对论模拟才能获得准确的解, 我们在幼儿园暂时不讨论这么困难的问题。这里我们仅考虑像双星绕转这样的引力辐射较弱的系统。

从这一节开始, 我们不再局限于讨论沿固定 z 轴的引力波, 所以恢复用拉丁字母 $i, j, \dots$ 表示空间分量 1, 2, 3 的习惯。

9.2.1 横向无迹规范

在弱场条件 $|h_+|, |h_\times| \ll 1$ 下, 我们可以做坐标变换

$$\tilde{u} = u, \quad (9.44)$$

$$\tilde{v} = v + \partial_u H, \quad (9.45)$$

$$\tilde{x} = x - \frac{1}{2} \partial_x H, \quad (9.46)$$

$$\tilde{y} = y - \frac{1}{2} \partial_y H \quad (9.47)$$

在仅保留 H 的一阶近似时, 注意到 $\partial_{\tilde{x}}^2 H \approx \partial_x^2 H = h_+$, $\partial_{\tilde{y}}^2 H \approx \partial_y^2 H = -h_+$ 以及 $\partial_{\tilde{x}} \partial_{\tilde{y}} H \approx \partial_x \partial_y H = h_\times$, 就有

$$du \approx d\tilde{u}, \quad (9.48)$$

$$dv \approx d\tilde{v} - \partial_{\tilde{u}}^2 H d\tilde{u} - \partial_{\tilde{x}} \partial_{\tilde{u}} H d\tilde{x} - \partial_{\tilde{y}} \partial_{\tilde{u}} H d\tilde{y} \quad (9.49)$$

$$dx \approx d\tilde{x} + \frac{1}{2} \partial_{\tilde{u}} \partial_{\tilde{x}} H d\tilde{u} + \frac{1}{2} h_+ d\tilde{x} + \frac{1}{2} h_\times d\tilde{y} \quad (9.50)$$

$$dy \approx d\tilde{y} + \frac{1}{2} \partial_{\tilde{u}} \partial_{\tilde{y}} H d\tilde{u} + \frac{1}{2} h_\times d\tilde{x} - \frac{1}{2} h_+ d\tilde{y} \quad (9.51)$$

代入度规(9.14), 并保留到 H 的一阶近似, 得到

$$ds^2 = -d\tilde{u}d\tilde{v} - (1 + h_+)d\tilde{x}^2 - 2h_\times d\tilde{x}d\tilde{y} - (1 - h_+)d\tilde{y}^2. \quad (9.52)$$

然后令 $\tilde{z} = \frac{1}{2}(\tilde{u} + \tilde{v})$, $\tilde{t} = \frac{1}{2}(\tilde{v} - \tilde{u})$, 那么

$$ds^2 = d\tilde{t}^2 - d\tilde{z}^2 - (1 + h_+)d\tilde{x}^2 - 2h_\times d\tilde{x}d\tilde{y} - (1 - h_+)d\tilde{y}^2. \quad (9.53)$$

和(9.14)不同, 该度规形式是 Minkowski 度规的微扰, 这有助于我们把引力波和一般的度规扰动联系起来。

按照第4章的做法，我们考虑如下的度规扰动（变分）：

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu} + \delta\hat{g}_{\mu\nu}, \quad (9.54)$$

这里的 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ 是 Minkowski 度规。

沿 z 轴传播的平面波的度规(9.53)对应 $\delta\hat{g}_{11} = -h_+ = -\frac{1}{2}(\partial_1^2 - \partial_2^2)H$, $\delta\hat{g}_{22} = h_+$, $\delta\hat{g}_{12} = \delta\hat{g}_{21} = -h_\times = -\partial_1\partial_2H$, 其余 $\delta\hat{g}_{\mu\nu}$ 均为零。利用 $(\partial_x^2 + \partial_y^2)H = 0$ 这个约束条件，容易验证如下的等式成立：

$$(\nabla\delta g)^\mu_{\nu\mu} = 0, \quad (9.55)$$

$$\delta\hat{g}^\mu_\mu = 0, \quad (9.56)$$

其中 (9.55) 是“横向” (transverse) 条件（实际包含 4 个方程），(9.56) 是“无迹” (traceless) 条件（包含一个方程）。由于这些条件在坐标变换下不变，所以任意方向的多个（弱场近似下的）引力波叠加后仍然满足横向无迹条件。

在只包含引力波的讨论中，横向无迹 (transverse traceless, 简称 TT) 规范通常还要附加 $\delta\hat{g}_{0\mu} = 0$ 的额外限制来完全地确定坐标系。注意这四个限制条件自动包含了(9.55)里 $\nu = 0$ 的成分，所以是额外添加了三个限制条件。最后剩余的 $10 - 4 - 1 - 3 = 2$ 个自由度恰好描述了引力波的 2 个自由度。

9.2.2 洛伦兹规范下的引力辐射公式

要从波源的分布和运动中求解出引力波，就不能采取上述只能描述引力波的 TT 规范。在一般的包含其他形式度规小扰动（如引力势、空间曲率等）情况下，度规扰动共有 4 个非物理自由度²和 6 个物理自由度³。在计算一般的度规扰动时，我们最多可以人为添加四个限制条件（相当于确定了坐标系）来消除非物理自由度。我希望这四个限制条件和 TT 规范 (9.55-9.56) 兼容，同时我也希望能尽可能地简化计算。考虑到里奇张量的变分(4.64)，我选择从(9.55)中减去 $\frac{1}{2}\nabla_\nu$ 作用于(9.56)，也就是

$$(\nabla\delta g)^\mu_{\nu\mu} - \frac{1}{2}(\nabla\delta\hat{g})^\mu_{\mu\nu} = 0. \quad (9.57)$$

条件(9.57)叫作**洛伦兹规范**。

把(9.57)里的求和指标 μ 换为 α ，并以 ∇_μ 作用于两边，就有

$$(\nabla\nabla\delta\hat{g})^\alpha_{\nu\alpha\mu} - \frac{1}{2}(\nabla\nabla\delta\hat{g})^\alpha_{\alpha\nu\mu} = 0. \quad (9.58)$$

²这四个自由度代表坐标系选取的任意性，也叫做“规范自由度”。

³这 6 个自由度分别为：引力势 1 个自由度，空间曲率 1 个自由度，引力波 2 个自由度，时空漩涡 2 个自由度。时空漩涡（类似于感生磁场类型的度规扰动）在天体物理中比较难以产生，也不会长距离传播，所以本书中没有这方面的讨论。

交换 μ, ν 指标, 有

$$(\nabla\nabla\delta\hat{g})_{\mu\alpha\nu}^{\alpha} - \frac{1}{2}(\nabla\nabla\delta\hat{g})_{\alpha\mu\nu}^{\alpha} = 0. \quad (9.59)$$

把(9.58)和(9.59)相加, 并注意 $(\nabla\nabla\delta\hat{g})_{\alpha\nu\mu}^{\alpha} = (\nabla\nabla\delta\hat{g})_{\alpha\mu\nu}^{\alpha}$ (因为 $\delta\hat{g}_{\alpha}^{\alpha}$ 是标量), 就有

$$(\nabla\nabla\delta\hat{g})_{\mu\alpha\nu}^{\alpha} + (\nabla\nabla\delta\hat{g})_{\nu\alpha\mu}^{\alpha} - (\nabla\nabla\delta\hat{g})_{\alpha\mu\nu}^{\alpha} = 0. \quad (9.60)$$

在变分前的度规是 Minkowski 度规的情况下, 协变导数和普通偏导是一样的, 这意味着可以任意交换求导次序, 上式等价于

$$(\nabla\nabla\delta\hat{g})_{\mu\nu\alpha}^{\alpha} + (\nabla\nabla\delta\hat{g})_{\nu\mu\alpha}^{\alpha} - (\nabla\nabla\delta\hat{g})_{\alpha\mu\nu}^{\alpha} = 0. \quad (9.61)$$

再结合(4.64), 就知道变分后的 Ricci tensor 为

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(\nabla\nabla\delta\hat{g})_{\mu\nu}^{\alpha}{}_{\alpha} = -\frac{1}{2}\square\delta\hat{g}_{\mu\nu}. \quad (9.62)$$

这里的 $\square = \partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2$ 是四维拉普拉斯算符。要注意的是, (4.64) 是一阶微扰近似 (忽略了二阶 $\delta\Gamma\delta\Gamma$ 项), 所以(9.62)也只是个一阶近似, 严格的方程需要添加 $\delta\hat{g}$ 的非线性项。

对任意二阶张量 $A_{\mu\nu}$, 我们都可以构造和它 “bar 互补” 的二阶张量

$$\bar{A}_{\mu\nu} \equiv A_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}A^{\alpha}{}_{\alpha}. \quad (9.63)$$

请自行验证两次 “bar 互补” 操作后可以回到自身, 以及洛伦兹规范可以简单地写成 $(\nabla\delta\hat{g})_{\nu\mu}^{\mu} = 0$ 。

爱因斯坦方程可以写作

$$\bar{\mathcal{R}}_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu}. \quad (9.64)$$

两边取 “bar 互补” 操作后得到

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = 8\pi G_N \bar{T}_{\mu\nu}. \quad (9.65)$$

于是根据 (9.62), 在弱场近似和洛伦兹规范下,

$$\square\delta\hat{g}_{\mu\nu} = -16\pi G_N \bar{T}_{\mu\nu}. \quad (9.66)$$

这是个标准的三维空间有源波动方程, 波速为 1 (光速)。我们在幼儿园小班课程《数学物理方法》[1] 和中班课程《电动力学》中都学习过三维波动方程的解法, 其推迟格林函数为

$$G(t, \vec{x}; t_0, \vec{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta(t - t_0 - |\vec{x} - \vec{x}_0|)}{|\vec{x} - \vec{x}_0|}. \quad (9.67)$$

因此(9.66)的解是：

$$\delta\hat{g}_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = -4G_N \int_{-\infty}^t dt_0 \int d^3\vec{x}_0 \bar{T}_{\mu\nu}(t_0, \vec{x}_0) \frac{\delta(t - t_0 - |\vec{x} - \vec{x}_0|)}{|\vec{x} - \vec{x}_0|}. \quad (9.68)$$

完成对 t_0 的积分后就是

$$\delta\hat{g}_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = -4G_N \int d^3\vec{x}_0 \frac{\bar{T}_{\mu\nu}(t - |\vec{x} - \vec{x}_0|, \vec{x}_0)}{|\vec{x} - \vec{x}_0|}. \quad (9.69)$$

两边取 “bar 互补” 操作后的表达式为

$$\overline{\delta\hat{g}}_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = -4G_N \int d^3\vec{x}_0 \frac{T_{\mu\nu}(t - |\vec{x} - \vec{x}_0|, \vec{x}_0)}{|\vec{x} - \vec{x}_0|}. \quad (9.70)$$

9.2.3 引力波的“能量密度”

严格来说，爱因斯坦方程右边的 $T_{\mu\nu}$ 不包含任何时空几何相关的项，引力波也不具有真正的“能量密度”。不过，当时空度规扰动可以看成是一个高频成分（引力波）和低频（即变化缓慢的）背景时，可以把高频部分的 $G_{\mu\nu}$ 作平均（平均尺度远大于高频部分的波长）移到爱因斯坦方程右边当成能量动量张量处理。

我们来计算度规 $\eta_{\mu\nu} + \delta\hat{g}_{\mu\nu}$ 对应的时空几何作用量里 $\delta\hat{g}$ 的二次项的贡献（一次项为零无须考虑）。之前在第4中的计算结果只适用于无穷小的度规扰动 $\delta\hat{g}$ ，为了获得精确到 $\delta\hat{g}$ 二次项的结果，我们采用“一点点挪动”的办法，考虑从微扰前的度规 $\eta_{\mu\nu} + \varepsilon\delta\hat{g}_{\mu\nu}$ 变化到微扰后的度规 $\eta_{\mu\nu} + (\varepsilon + d\varepsilon)\delta\hat{g}_{\mu\nu}$ ，把时空几何作用量的改变量 $dS = \frac{1}{16\pi G_N} \delta(\text{Rd}V_{\text{phys}})$ 从 $\varepsilon = 0$ （时空几何作用量）积分到 $\varepsilon = 1$ （即最后需要的时空几何作用量）。

在洛伦兹规范条件下，根据(9.62)，微扰前的度规 $\eta_{\mu\nu} + \varepsilon\delta\hat{g}_{\mu\nu}$ 对应的 $\mathcal{R}_{\mu\nu} = -\frac{\varepsilon}{2}\square\delta\hat{g}_{\mu\nu}$ 。两边取 “bar 互补” 操作后，有

$$G_{\mu\nu} = -\frac{\varepsilon}{2}\square\overline{\delta\hat{g}}_{\mu\nu}. \quad (9.71)$$

作用量变化量(除去表面积分项后)可以写成 $dS = S(\varepsilon + d\varepsilon) - S(\varepsilon) \approx \frac{d\varepsilon}{16\pi G_N} G^{\mu\nu} \delta\hat{g}_{\mu\nu} dV_{\text{phys}}$ ，所以 $G^{\mu\nu}$ 和 dV_{phys} 分别保留最低阶近似（分别是 $\delta\hat{g}$ 的一阶和零阶）就够了。按照(9.71)，就有

$$dS \approx -\frac{\varepsilon d\varepsilon}{32\pi G_N} \delta\hat{g}_{\mu\nu} \square\overline{\delta\hat{g}}^{\mu\nu} dV_{\text{phys}}. \quad (9.72)$$

从 $\varepsilon = 0$ 到 $\varepsilon = 1$ 积分，即得到

$$S = -\frac{1}{64\pi G_N} \delta\hat{g}_{\mu\nu} \square\overline{\delta\hat{g}}^{\mu\nu} dV_{\text{phys}} = \frac{1}{64\pi G_N} \left[(\partial^\alpha \delta\hat{g}_{\mu\nu}) (\partial_\alpha \overline{\delta\hat{g}}^{\mu\nu}) - \partial^\alpha (\delta\hat{g}_{\mu\nu} \partial_\alpha \overline{\delta\hat{g}}^{\mu\nu}) \right] dV_{\text{phys}}.$$

(9.73)

当只保留到二阶近似时, $\partial^\alpha (\delta \hat{g}_{\mu\nu} \partial_\alpha \bar{\delta \hat{g}}^{\mu\nu})$ 里无须区分协变微分和普通微分的差别, 所以贡献的只是表面积分项。丢掉该项后, 时空几何的“拉氏量密度”可以写作

$$\mathcal{L} = \frac{S}{dV_{\text{phys}}} = \frac{1}{64\pi G_N} \left[(\partial^\alpha \delta \hat{g}_{\mu\nu}) (\partial_\alpha \bar{\delta \hat{g}}^{\mu\nu}) \right]. \quad (9.74)$$

所以对应 $\delta \hat{g}_{\mu\nu}$ 的广义动量密度

$$p^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \delta \hat{g}_{\mu\nu}}{\partial t} \right)} = \frac{1}{32\pi G_N} \frac{\partial \bar{\delta \hat{g}}^{\mu\nu}}{\partial t}. \quad (9.75)$$

对应的“哈密顿量密度 (能量密度)”

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \delta \hat{g}_{\mu\nu}}{\partial t} p^{\mu\nu} - \mathcal{L} = \frac{1}{64\pi G_N} \left(\frac{\partial \bar{\delta \hat{g}}^{\mu\nu}}{\partial t} \frac{\partial \delta \hat{g}_{\mu\nu}}{\partial t} + \nabla \bar{\delta \hat{g}}^{\mu\nu} \cdot \nabla \delta \hat{g}_{\mu\nu} \right). \quad (9.76)$$

上述“形式推导”的过程其实毫不严谨⁴, 结果也并不能解释为局域的“能量密度”, 因为在局域惯性系里, 度规可以取作 Minkowski 度规, 且度规的一阶导数取为零。那么引力波能量密度就自动消失了。问题出在哪里呢?

问题的关键在于, 4.6节讨论的弯曲空间的“能量动量张量守恒”的推导, 并不适用于用时空作用量 $S_{\text{spacetime}} = \frac{1}{16\pi G_N} \int \text{Rd}^4x$ 。我们可以执行“时空和物质的相对错位”, 却无法执行“时空与时空的相对错位”。或者说, 第二步“把坐标和度规一起拉回来”的操作, 对讨论时空作用量的变化是毫无意义的 (因为实际上等于啥也没干)。那么, 我们就无法获得类似于一个 (4.83) 的“时空能量动量张量守恒方程”。在失去了“守恒”的特性之后, 定义某个点的“时空能量动量张量密度”并无太大价值。

虽然无法在一个点严格地定义“时空能量密度”, 但是在一片区域内却有可能定义时空的“平均能量密度”——操作的关键是把时空人为地撕裂为两部分, 然后执行“时空与时空的相对错位”。如果能选择适当的坐标系, 使得度规变分是一个缓慢变化的“背景部分” $\delta \hat{g}^{\text{slow}}$ 和一个快速变化的“波动部分” $\delta \hat{g}^{\text{fast}}$ 的迭加。我们可以把背景部分仍然看作是度规, 却把波动部分看成是一种物质。也就是说, 我们认为时空度规是 $\eta_{\mu\nu} + \delta \hat{g}_{\mu\nu}^{\text{slow}}$, 而 $\delta \hat{g}_{\mu\nu}^{\text{fast}}$ 是某种物质 (二阶张量场)。虽然作用量 $\frac{1}{16\pi G_N} \text{Rd}V_{\text{phys}}$ 非线性地依赖于 $\eta_{\mu\nu} + \delta \hat{g}_{\mu\nu}^{\text{slow}} + \delta \hat{g}_{\mu\nu}^{\text{fast}}$, 背景部分和波动部分存在相互作用, 但是慢变成分和快速波动成分的任何乘积在平均后都几乎消失⁵, 所以忽略

⁴实际上在我们的符号体系里 (采用 +, -, -, - 度规习惯以及通过改变 $\mathcal{L}_m$ 符号来使得爱因斯坦方程形式不变), 用理论力学方法得到的哈密顿量实际上是负的能量!

⁵这是微积分里面一个经常用到的分部积分估算, 在小班时应该做过类似的练习吧!

掉慢变部分和快速波动部分之间的耦合之后，作用量就可以近似看成“背景作用量”和“快速波动部分作用量”之和。我们可以像在4.6节那样，把变分原理应用于“背景时空”和“时空波动部分”之间的虚位移，得到在“背景时空”里守恒的“时空波动部分的能量动量张量”。所以(9.76)给出的引力波能量密度至少是一个弱场近似以及大尺度平均意义下的守恒量。

一般来说，如果度规扰动在特定的波段范围内，我们可以把(9.76)在一个尺度远大于波长的区域内求平均，得到在“时空波动部分的平均能量密度”：

$$\rho_{\text{gw}} = \frac{1}{64\pi G_N} \left\langle \frac{\partial \bar{\delta g}^{\mu\nu}}{\partial t} \frac{\partial \delta \hat{g}_{\mu\nu}}{\partial t} + \nabla \bar{\delta g}^{\mu\nu} \cdot \nabla \delta \hat{g}_{\mu\nu} \right\rangle. \quad (9.77)$$

这里的 $\langle \cdot \rangle$ 代表在尺度远大于波长的范围内求平均。

上式严格来说是在一个并不真实存在的“背景时空”里的能量密度，但我们可以近似把它当成是 Minkowski 时空背景里的“引力能量”。注意这是“引力能量密度”而未必是“引力波能量密度”，例如中子星附近必然存在不可忽略的引力势梯度，从而产生非零的 $\langle \nabla \bar{\delta g}^{\mu\nu} \cdot \nabla \delta \hat{g}_{\mu\nu} \rangle$ ，但这个表达式并不具有明确的物理意义。我们将在远离引力源的区域计算引力波能量密度，以保证(9.76)中的 $\delta \hat{g}_{\mu\nu}$ 仅包含快速波动的度规扰动。

9.2.4 周期性源的引力辐射

考虑以频率 ω 变化，分布在有限区域内的引力波源

$$T_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = T_{\mu\nu}(\vec{x}) e^{-i\omega t} + \text{c.c.} \quad (9.78)$$

这里 c.c. 表示复共轭。

在离波源很远的 $\vec{x} = r\vec{n}$ ($\vec{n}$ 是代表方向的三维空间单位矢量, r 代表距离) 处观测，由之前推出的辐射公式(9.70)

$$\bar{\delta \hat{g}}_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = -4G_N \int \frac{d^3 \vec{x}_0}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} T_{\mu\nu}(\vec{x}_0) e^{-i\omega(t - |\vec{x} - \vec{x}_0|)} + \text{c.c.} \quad (9.79)$$

把振幅取零阶近似，相位需要更精确些，取一阶近似：

$$\begin{aligned} \bar{\delta \hat{g}}_{\mu\nu}(t, \vec{x}) &= -4G_N \int \frac{d^3 \vec{x}_0}{r} T_{\mu\nu}(\vec{x}_0) e^{-i\omega(t - r + \vec{x}_0 \cdot \vec{n})} + \text{c.c.} \\ &\equiv -\frac{4G_N e^{-i\omega(t-r)}}{r} \mathcal{T}_{\mu\nu}(\omega \vec{n}) + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (9.80)$$

这里的

$$\mathcal{T}_{\mu\nu}(\vec{k}) \equiv \int d^3 \vec{x} T_{\mu\nu}(\vec{x}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}}$$

是 $T_{\mu\nu}(\vec{x})$ ($T_{\mu\nu}$ 的振幅) 的三维傅立叶变换。

通过把结果两边取 “bar 互补” 以及升指标, 我们得到

$$\delta\hat{g}_{\mu\nu}(t, r\vec{n}) = -\frac{4G_N e^{-i\omega(t-r)}}{r} \bar{\mathcal{T}}_{\mu\nu}(\omega\vec{n}) + \text{c.c.} \quad (9.81)$$

和

$$\bar{\delta\hat{g}}^{\mu\nu}(t, r\vec{n}) = -\frac{4G_N e^{-i\omega(t-r)}}{r} \mathcal{T}^{\mu\nu}(\omega\vec{n}) + \text{c.c.} \quad (9.82)$$

在 $\vec{n}$ 方向附近的 $d\Omega$ 的立体角内, 距离在 r 和 $r + \delta t$ 之间的空间范围内的引力波总能量, 显然是源在 δt 时间间隔内发出的总能量。于是有

$$\frac{dP}{d\Omega} = \rho_{\text{gw}}(t, r\vec{n}) r^2 \quad (9.83)$$

我们在远大于 $\frac{1}{\omega}$ 的时间内对它求平均 (用 $\langle \dots \rangle$ 表示), 只有相位抵消的项才有贡献, 所以我们可以把 $\partial/\partial t$ 和 ∇ 都替换为 ω (实际是 $i\omega$ 或者 $-i\omega$, 但有非零贡献的项总是一个 $i\omega$ 和一个 $-i\omega$ 相乘):

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle &= \frac{r^2}{64\pi G_N} \left\langle \frac{\partial \bar{\delta\hat{g}}^{\mu\nu}}{\partial t} \frac{\partial \delta\hat{g}_{\mu\nu}}{\partial t} + \nabla \bar{\delta\hat{g}}^{\mu\nu} \cdot \nabla \delta\hat{g}_{\mu\nu} \right\rangle \\ &= \frac{r^2 \omega^2}{32\pi G_N} \left\langle \bar{\delta\hat{g}}^{\mu\nu} \delta\hat{g}_{\mu\nu} \right\rangle \end{aligned} \quad (9.84)$$

这里我们对 $\delta\hat{g}_{\mu\nu}$ 都省略了宗量 $(t, r\vec{n})$ 。

把(9.81)和(9.82)代入(9.84), 得到

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle &= \frac{G_N \omega^2}{2\pi} \left\langle \left(e^{-i\omega(t-r)} \mathcal{T}^{\mu\nu}(\omega\vec{n}) + \text{c.c.} \right) \left(e^{-i\omega(t-r)} \bar{\mathcal{T}}_{\mu\nu}(\omega\vec{n}) + \text{c.c.} \right) \right\rangle \\ &= \frac{G_N \omega^2}{2\pi} \left(\mathcal{T}^{\mu\nu}(\omega\vec{n}) \bar{\mathcal{T}}_{\mu\nu}(\omega\vec{n})^* + \text{c.c.} \right) \\ &= \frac{G_N \omega^2}{\pi} \left(\mathcal{T}^{\mu\nu}(\omega\vec{n}) \mathcal{T}_{\mu\nu}^*(\omega\vec{n}) - \frac{1}{2} |\mathcal{T}_\alpha^\alpha(\omega\vec{n})|^2 \right) \end{aligned} \quad (9.85)$$

常我们会省略取平均的符号, 写作

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{G_N \omega^2}{\pi} \left(\mathcal{T}^{\mu\nu}(\omega\vec{n}) \mathcal{T}_{\mu\nu}^*(\omega\vec{n}) - \frac{1}{2} |\mathcal{T}_\alpha^\alpha(\omega\vec{n})|^2 \right). \quad (9.86)$$

9.2.5 空空投影算符

在 Minkowski 空间, 能量动量张量的守恒方程 (4.83) 可以写成

$$\partial_0 T^{0j} = -\partial_i T^{ij}, \quad (9.87)$$

$$\partial_0 T^{00} = -\partial_i T^{i0}. \quad (9.88)$$

对 $T^{\mu\nu}(\vec{x}) = \mathsf{T}^{\mu\nu}(\vec{x})e^{-i\omega t} + \text{c.c.}$, 就是

$$-i\omega \mathsf{T}^{0j} = -\partial_i \mathsf{T}^{ij}, \quad (9.89)$$

$$-i\omega \mathsf{T}^{00} = -\partial_i \mathsf{T}^{0i}. \quad (9.90)$$

对上面两式左右两边傅立叶变换, 注意(9.86)中的波矢为 $\omega\vec{n}$, 偏微分算符 ∂_i 在傅立叶变换下成为 $i\omega n_i$, 上面两式成为:

$$\mathcal{T}^{0j} = n_i \mathcal{T}^{ij}, \quad (9.91)$$

$$\mathcal{T}^{00} = n_j \mathcal{T}^{0j} = n_i n_j \mathcal{T}^{ij}. \quad (9.92)$$

于是容易得到

$$|\mathcal{T}^\alpha_\alpha|^2 = (n_i n_j - \delta_{ij})(n_k n_l - \delta_{kl}) \mathcal{T}^{ij}(\omega\vec{n}) [\mathcal{T}^{kl}(\omega\vec{n})]^*. \quad (9.93)$$

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} \mathcal{T}^*_{\mu\nu} = (n_i n_k - \delta_{ik})(n_j n_l - \delta_{jl}) \mathcal{T}^{ij}(\omega\vec{n}) [\mathcal{T}^{kl}(\omega\vec{n})]^*. \quad (9.94)$$

定义空空投影算符

$$\Xi_{ijkl}(\vec{n}) \equiv (n_i n_k - \delta_{ik})(n_j n_l - \delta_{jl}) - \frac{1}{2}(n_i n_j - \delta_{ij})(n_k n_l - \delta_{kl}). \quad (9.95)$$

那么

对单频率源 $T^{\mu\nu} = \mathsf{T}^{\mu\nu}e^{-i\omega t} + \text{c.c.}$, 在方向 $\vec{n}$, 单位立体角内的引力辐射功率为

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{G_N \omega^2}{\pi} \mathcal{T}^{ij}(\omega\vec{n}) [\mathcal{T}^{kl}(\omega\vec{n})]^* \Xi_{ijkl}(\vec{n}). \quad (9.96)$$

这里的 $\mathcal{T}^{ij}$ 是 T^{ij} 的振幅的三维傅立叶变换。

注意空空投影算符的各个分量并不是独立的: 根据定义容易得到 $\Xi_{ijkl} = \Xi_{klij} = \Xi_{jilk} = \Xi_{lkji}$ 。表9.1给出了球面坐标表示的独立分量。

9.2.6 低速近似下的四极矩引力辐射

在 Minkowski 时空, 对局域、守恒的能量动量张量 $T^{\mu\nu}(\vec{x}, t)$, 定义能量密度的四极矩:

$$Q^{ij}(\vec{x}, t) \equiv \int x^i x^j T^{00}(\vec{x}, t) d^3\vec{x}. \quad (9.97)$$

Table 9.1: 球面坐标 (θ, ϕ) 表示的空空投影算符

i	j	k	l	Ξ_{ijkl}
1	1	1	1	$\frac{(\sin^2 \theta \cos^2 \phi - 1)^2}{2}$
2	1	1	1	$\frac{(\sin^2 \theta \cos^2 \phi - 1) \sin \phi \sin^2 \theta \cos \phi}{2}$
2	1	2	1	$-\frac{\sin^4 \phi \sin^4 \theta}{2} + \frac{\sin^2 \phi \sin^4 \theta}{2} - \sin^2 \theta + 1$
2	1	2	2	$\frac{(\sin^2 \phi \sin^2 \theta - 1) \sin \phi \sin^2 \theta \cos \phi}{2}$
2	2	1	1	$-\frac{\sin^4 \phi \sin^4 \theta}{2} + \frac{\sin^2 \phi \sin^4 \theta}{2} + \frac{\sin^2 \theta}{2} - \frac{1}{2}$
2	2	2	1	$\frac{(\sin^2 \phi \sin^2 \theta - 1) \sin \phi \sin^2 \theta \cos \phi}{2}$
2	2	2	2	$\frac{(\sin^2 \phi \sin^2 \theta - 1)^2}{2}$
3	1	1	1	$\frac{(\sin^2 \theta \cos^2 \phi - 1) \sin \theta \cos \phi \cos \theta}{2}$
3	1	2	1	$\frac{(\sin^2 \theta \cos^2 \phi - 2) \sin \phi \sin \theta \cos \theta}{2}$
3	1	2	2	$\frac{(\sin^2 \phi \sin^2 \theta + 1) \sin \theta \cos \phi \cos \theta}{2}$
3	1	3	1	$\frac{(\sin^2 \phi \sin^2 \theta + \sin^2 \phi - \sin^2 \theta + 1) \sin^2 \theta}{2}$
3	1	3	2	$\frac{(\cos^2 \theta - 2) \sin \phi \sin^2 \theta \cos \phi}{2}$
3	1	3	3	$-\frac{\sin^3 \theta \cos \phi \cos \theta}{2}$
3	2	1	1	$\frac{(\sin^2 \theta \cos^2 \phi + 1) \sin \phi \sin \theta \cos \theta}{2}$
3	2	2	1	$\frac{\sin^2 \phi \sin^3 \theta \cos \phi \cos \theta}{2}$
3	2	2	2	$\frac{(\sin^2 \phi \sin^2 \theta - 1) \sin \phi \sin \theta \cos \theta}{2}$
3	2	3	1	$\frac{(\cos^2 \theta - 2) \sin \phi \sin^2 \theta \cos \phi}{2}$
3	2	3	2	$\left(-\frac{\sin^2 \phi \sin^2 \theta}{2} - \frac{\sin^2 \phi}{2} + 1 \right) \sin^2 \theta$
3	2	3	3	$-\frac{\sin \phi \sin^3 \theta \cos \theta}{2}$
3	3	1	1	$-\frac{\cos^2 \phi \cos^4 \theta}{2} + \frac{\cos^2 \phi}{2} + \frac{\cos^2 \theta}{2} - \frac{1}{2}$
3	3	2	1	$\frac{(1 - \cos^4 \theta) \sin \phi \cos \phi}{2}$
3	3	2	2	$\left(-\frac{\sin^2 \phi \sin^2 \theta}{2} + \sin^2 \phi - \frac{1}{2} \right) \sin^2 \theta$
3	3	3	1	$-\frac{\sin^3 \theta \cos \phi \cos \theta}{2}$
3	3	3	2	$-\frac{\sin \phi \sin^3 \theta \cos \theta}{2}$
3	3	3	3	$\frac{\sin^4 \theta}{2}$

由局域条件知道三维散度的积分

$$\int \partial_k (T^{k0} x^i x^j) d^3 \vec{x} = 0. \quad (9.98)$$

再结合四维能量动量张量守恒 $\partial_\mu T^{\mu 0} = 0$ ，就有

$$\frac{\partial Q^{ij}}{\partial t} = \int \partial_\mu (T^{\mu 0} x^i x^j) d^3 \vec{x} = \int T^{\mu 0} \partial_\mu (x^i x^j) d^3 \vec{x} = \int (T^{i0} x^j + T^{j0} x^i) d^3 \vec{x}. \quad (9.99)$$

故技重施，由三维散度积分

$$\int \partial_k (T^{ik} x^j) d^3 \vec{x} = 0, \quad (9.100)$$

可以得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \int T^{i0} x^j d^3 \vec{x} = \int \partial_\mu (T^{i\mu} x^j) d^3 \vec{x} = \int T^{i\mu} \partial_\mu x^j d^3 \vec{x} = \int T^{ij} d^3 \vec{x}. \quad (9.101)$$

于是有

张量维里 (Virial) 定理：

$$\frac{\partial^2 Q^{ij}}{\partial t^2} = 2 \int T^{ij} d^3 \vec{x}. \quad (9.102)$$

一个角频率为 ω ，尺度为 L 的系统的质点的速度典型地是 ωL 的量级。在低速极限下， $\omega L \ll 1$ 。因此对一个非相对论系统，傅立叶变换

$$\mathcal{T}^{ij}(\omega \vec{n}) = \int T^{ij}(\vec{x}_0) e^{-i\omega \vec{n} \cdot \vec{x}_0} d^3 \vec{x}_0 \quad (9.103)$$

里的相位 $\omega \vec{n} \cdot \vec{x}_0$ 远小于 1 (自然单位制下的光速)，所以近似有

$$\mathcal{T}^{ij}(\omega \vec{n}) \approx \int T^{ij}(\vec{x}_0) d^3 \vec{x}_0. \quad (9.104)$$

对角频率为 ω 的系统，可以设 $Q^{ij} = Q^{ij} e^{-i\omega t} + \text{c.c.}$ 。那么 $\partial_t^2 Q^{ij} = -\omega^2 Q^{ij}$ 。根据(9.102)，就有

$$-\omega^2 Q^{ij} = 2 \int T^{ij} d^3 \vec{x}. \quad (9.105)$$

结合 (9.104) 和 (9.105)，就有

$$\mathcal{T}^{ij}(\omega \vec{n}) \approx -\frac{\omega^2}{2} Q^{ij}. \quad (9.106)$$

把上式代入(11.9)，最后得到四极矩近似引力波辐射公式

如果局域、低速、守恒的系统的四极矩的时间依赖部分为 $Q^{ij} = Q^{ij} e^{-i\omega t} + \text{c.c.}$, 那么引力波的角频率为 ω , 在 $\vec{n}$ 方向的单位立体角辐射功率

$$\frac{dP}{d\Omega}(\vec{n}) = \frac{G_N \omega^6}{4\pi} Q^{ij} (Q^{kl})^* \Xi_{ijkl}(\vec{n}). \quad (9.107)$$

例题 11: 计算质量为 m , 振幅为 A , 圆频率为 ω 的一维简谐振子的引力辐射的 (1) 角频率; (2) 和谐振子振动方向夹角为 θ 的方向的单位立体角辐射功率; (3) 总功率。

解答: 取振动方向为 z 轴, 那么

$$T^{00} = M \delta(x) \delta(y) \delta(z - A \cos(\omega t)).$$

于是仅有的四极矩非零分量为

$$Q^{33} = \int T^{00} z^2 dx dy dz = mA^2 \cos^2(\omega t) = \frac{mA^2}{2} + \left(\frac{mA^2}{4} e^{-2i\omega t} + \text{c.c.} \right).$$

于是引力波辐射的角频率为 2ω 。

把

$$Q^{33} = \frac{mA^2}{4}.$$

代入四极矩辐射公式(11.9), 并借助表9.1 给出的 $\Xi_{3333} = \frac{1}{2} \sin^4 \theta$, 得到

$$\frac{dP}{d\Omega}(\theta) = \frac{G_N (2\omega)^6}{4\pi} \frac{1}{2} \sin^4 \theta \left(\frac{mA^2}{4} \right)^2 = \frac{1}{2\pi} G_N \omega^6 m^2 A^4 \sin^4 \theta.$$

对立体角积分, 得到总辐射功率

$$P = 2\pi \int \frac{dP}{d\Omega}(\theta) \sin \theta d\theta = \frac{16}{15} G_N \omega^6 m^2 A^4.$$

如果要切换到普通单位制, 则需要把结果除以 c^5 。

例题 12: 质量均为 M 的双星绕半径为 $a \gg G_N M$ 的圆轨道运行。计算引力辐射的 (1) 角频率; (2) 和圆轨道的法线夹角为 θ 的方向的单位立体角辐射功率; (3) 总功率。

解答: 因为 $a \gg G_N M$, 牛顿力学是很好的近似。那么公转圆频率

$$\omega^2 = \frac{G_N M}{4a^3}. \quad (9.108)$$

因为 T^{00} 分量是“能量密度”，取双星中点为原点，双星在 $t=0$ 时刻的连线为 x 轴，公转轨道法线为 z 轴建立直角坐标系，就有

$$T^{00} \approx M [\delta(x - a \cos(\omega t)) \delta(y - a \sin(\omega t)) + \delta(x + a \cos(\omega t)) \delta(y + a \sin(\omega t))] \delta(z).$$

那么显然 $Q_{13} = Q_{23} = Q_{33} = 0$ 。

$$Q_{i3} = Q_{3i} = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (9.109)$$

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \int T^{00} x^2 dx dy dz = Ma^2 [1 + \cos(2\omega t)] = Ma^2 + \left[\frac{Ma^2}{2} e^{-2i\omega t} + \text{c.c.} \right], \\ Q_{12} &= Q_{21} = \int T^{00} xy dx dy dz = Ma^2 \sin(2\omega t) = \frac{Ma^2}{2} i e^{-2i\omega t} + \text{c.c.}, \\ Q_{22} &= \int T^{00} y^2 dx dy dz = Ma^2 [1 - \cos(2\omega t)] = Ma^2 + \left[-\frac{Ma^2}{2} e^{-2i\omega t} + \text{c.c.} \right], \end{aligned} \quad (9.110)$$

于是引力波的角频率为 2ω 。

把

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{Ma^2}{2}, \\ Q_{12} &= Q_{21} = \frac{Ma^2}{2} i, \\ Q_{22} &= -\frac{Ma^2}{2} \end{aligned}$$

代入四极矩辐射公式(11.9)，并借助表9.1，可以计算得到角频率为 2ω 的引力波辐射强度为

$$\frac{dP}{d\Omega}(\theta) = \frac{2G_N M^2 a^4 \omega^6}{\pi} (\sin^4 \theta - 8 \sin^2 \theta + 8) = \frac{G_N^4 M^5}{32\pi a^5} (\sin^4 \theta - 8 \sin^2 \theta + 8)$$

如果对所有方向积分，则得到辐射功率

$$P = \frac{128 G_N M^2 a^4 \omega^6}{5} = \frac{2 G_N^4 M^5}{5 a^5}$$

如果要切换到普通单位制，则需要把结果除以 c^5 。

最后两步的计算量比较大，可以考虑用代码完成，请参考 <http://zhiqihuang.top/gr/lectures/BinaryGW.py>

9.2.7 更一般情形的讨论

如果四极矩是周期变化但不是单频的，可以把四极矩分解为多个离散的单频信号。在长时间平均下，不同频率的引力波辐射功率可以直接线性叠加。这是因

为引力波在弱场线性近似下满足波动方程, 不同频率的模式彼此独立正交。长时间平均会消除不同频率之间的干涉交叉项 (这些项正比于包含频率差的振荡因子, 时间平均后为零), 因此总辐射功率等于各频率分量辐射功率的代数和。这一性质与电磁波中不同频率的功率可以叠加的原理类似。

如果四极矩不是周期变化的, 怎么判断有无引力辐射呢? 定性地看, 由于 $\delta g^{ij} \sim G_N T^{ij} \sim G_N \partial_t^2 Q^{ij}$, 就有 $P \sim \frac{1}{G_N} |\partial_t \delta g^{ij}|^2 \sim G_N |\partial_t^3 Q^{ij}|^2$ 。也就是说, 引力辐射功率大致和四极矩的三阶时间导数的平方成正比。因此, 匀加速直线运动的质点没有引力辐射 (至少在四极矩近似下)。

9.3 课后练习

习题 16: 当能量动量张量 $T^{\mu\nu}(t, \vec{x})$ 不是周期变化时, 记四维傅立叶变换

$$\mathcal{T}^{\mu\nu}(\omega, \vec{k}) = \int T^{\mu\nu}(t, \vec{x}) e^{i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{x}} dt d^3\vec{x}.$$

证明在 $\vec{n}$ 方向、圆频率 ω ($\omega > 0$) 附近, 单位立体角、单位圆频率间隔的辐射总能量 (辐射功率的时间总积分) 为

$$\frac{dE}{d\Omega d\omega}(\omega, \vec{n}) = \frac{G_N}{2\pi^2} \omega^2 \left[\mathcal{T}_{\mu\nu}(\omega, \omega\vec{n}) (\mathcal{T}^{\mu\nu}(\omega, \omega\vec{n}))^* - \frac{1}{2} |\mathcal{T}_\alpha^\alpha(\omega, \omega\vec{n})|^2 \right]. \quad (9.111)$$

习题 17: 当四极矩 $Q^{ij}(t)$ 不是周期变化时, 记

$$\mathcal{Q}^{ij}(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} Q^{ij}(t) e^{i\omega t} dt.$$

证明在 $\vec{n}$ 方向、圆频率 ω ($\omega > 0$) 附近, 单位立体角、单位圆频率间隔的辐射总能量 (辐射功率的时间总积分) 为

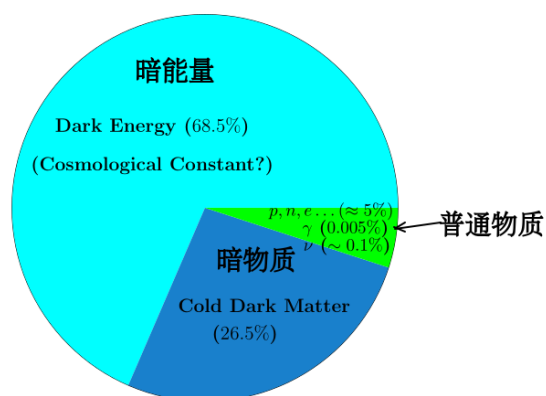
$$\frac{dE}{d\Omega d\omega}(\omega, \vec{n}) \approx \frac{G_N \omega^6}{8\pi^2} \mathcal{Q}^{ij}(\omega) \left(\mathcal{Q}^{kl}(\omega) \right)^* \Xi_{ijkl}(\vec{n}) \quad (9.112)$$

10. 宇宙学

要研究宇宙，我们面临着几个问题：

- 1 广义相对论在可观测宇宙这么大尺度上是否还成立？
- 2 粒子物理标准模型是否囊括了宇宙的所有组成成分？
- 3 可观测宇宙的边界条件是怎样的？

由于我们在幼儿园暂时不讨论广义相对论之外的引力理论，所以第 1 个问题就暂且认为答案是“是”了。在这个前提下，可以通过观测宇宙的几何性质来间接地推测宇宙中的物质能量动量分布，从而得到第 2 个问题的答案。从目前已经积累的大量宇宙学观测数据来看，在第一个问题的答案是“是”的前提下，第 2 个问题的答案只能是“否”。我们从数据间接地推测出目前宇宙的组成成分如下图所示：



简单讲就是：目前宇宙学标准模型里约 95% 的物质（暗物质和暗能量）都是

“假设”。暗物质负责提供“看不见的引力”，解释观测到的星系旋转曲线、宇宙大尺度结构形成、引力透镜等等；暗能量负责提供在更大尺度上的“看不见的斥力”，解释宇宙整体上的加速膨胀。目前标准模型里的“暗能量”是爱因斯坦提出来的“宇宙学常数”（真空能）。

如果暗物质和暗能量仅提供引力作用的话，要在实验室里验证它们的存在是十分困难的。因为我们不知道它们在实验室里的具体分布，更无法安排它们的具体分布。牛顿以为他把天上和地面的物理统一了，因为他只看到了几光年内的“天上”。现在我们把目光放到百亿光年尺度的深邃宇宙，就出现了新情况：“天上”海量的数据支持暗物质和暗能量的存在，但是地面上实验室里迄今没有发现（更准确地说，是缺乏有效的方法去探测）它们的任何踪影。

第3个关于边界条件的问题和基础物理关系不大，但是在不知道边界条件的情况下，我们似乎很难进行任何有效的计算。为了解决这个问题，物理学家们提出了一个看上去比较自然的假设：在足够大的尺度上（通常指数亿光年以上），宇宙是均匀且各向同性的。“均匀”指宇宙没有特殊位置，物质密度和组分在任何地方大致相同。“各向同性”指无论朝哪个方向观测，宇宙看起来都基本一样。这一假设被称作“宇宙学原理” (cosmological principle)。在均匀各向同性的系统里，显然我们并不需要边界条件。

10.1 FLRW 度规

四位大佬弗里德曼 (Alexander Friedmann)、勒梅特 (Georges Lemaître)、罗伯逊 (Howard Percy Robertson)、沃克 (Arthur Geoffrey Walker) 推导出了严格“均匀各向同性”的 FLRW 度规：



具体写出来就是，

FLRW 度规

$$ds^2 = dt^2 - [a(t)]^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (10.1)$$

这里的 k 是常数； $a(t)$ 是 t 的任意函数。

可以直接算出（或者用代码 <http://zhiqihuang.top/gr/lectures/FLRW.py>）联络的非零分量

$$\Gamma_{rr}^t = \frac{a\dot{a}}{I_k}, \Gamma_{\theta\theta}^t = r^2 a\dot{a}, \Gamma_{\phi\phi}^t = r^2 a\dot{a} \sin^2 \theta; \quad (10.2)$$

$$\Gamma_{rt}^r = \Gamma_{tr}^r = \frac{\dot{a}}{a}, \Gamma_{rr}^r = \frac{kr}{I_k}, \Gamma_{\theta\theta}^r = -rI_k, \Gamma_{\phi\phi}^r = -rI_k \sin^2 \theta; \quad (10.3)$$

$$\Gamma_{\theta t}^\theta = \Gamma_{t\theta}^\theta = \frac{\dot{a}}{a}, \Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r}, \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta; \quad (10.4)$$

$$\Gamma_{\phi t}^\phi = \Gamma_{t\phi}^\phi = \frac{\dot{a}}{a}, \Gamma_{\phi r}^\phi = \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r}, \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \cot \theta. \quad (10.5)$$

这里 $I_k \equiv 1 - kr^2$, $\dot{a} \equiv \frac{da}{dt}$, $\ddot{a} \equiv \frac{d^2a}{dt^2}$ 。

里奇张量的非零分量

$$\mathcal{R}_t^t = -\frac{3\ddot{a}}{a}, \quad (10.6)$$

$$\mathcal{R}_r^r = \mathcal{R}_\theta^\theta = \mathcal{R}_\phi^\phi = -2\frac{k}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a} - 2\frac{\dot{a}^2}{a^2}. \quad (10.7)$$

里奇标量

$$R = -6 \left(\frac{k}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right). \quad (10.8)$$

爱因斯坦张量的非零分量

$$G_t^t = \frac{3(k + \dot{a}^2)}{a^2}, \quad (10.9)$$

$$G_r^r = G_\theta^\theta = G_\phi^\phi = \frac{k}{a^2} + 2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}. \quad (10.10)$$

10.1.1 共动坐标、尺度因子和宇宙学红移

由于 $\Gamma_{tt}^r = \Gamma_{tt}^\theta = \Gamma_{tt}^\phi = 0$ ，如果一开始测试粒子的四维动量的空间逆变分量全部为零，即 $p^r = p^\theta = p^\phi = 0$ ，则根据测地线方程

$$\frac{dp^\alpha}{dt} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{p^\mu p^\nu}{p^0} = 0. \quad (10.11)$$

这里的 $\alpha = r, \theta, \phi$ 。对固定的 α ，无论 μ, ν 同时为 t （这样 $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ 为零），还是 μ, ν 至少有一个不是 t （这样 $p^\mu p^\nu$ 为零），都会使 $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{p^\mu p^\nu}{p^0}$ 为零。那么求和就得到 $\frac{dp^\alpha}{dt} = 0$ 。

也就是说，测地线粒子在坐标 (r, θ, ϕ) 可以一直保持“静止不动”，我们把 r, θ, ϕ 叫做“共动坐标”。

这大致构建了如下的图像：宇宙中的星系、暗物质等的“空间坐标” r, θ, ϕ 保持几乎不动。这些坐标也被称为“共动坐标” (comoving coordinates)。在固定 t 坐标的时间切片里，三维空间度规是 $ds_{3D}^2 = a^2(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2)$ ，因此两个相距很远的星系之间，或者说两个固定共动坐标的点之间的“空间距离”和 $a(t)$ 成正比。因此，我们把 $a(t)$ 叫作**尺度因子** (scale factor)，它衡量“宇宙的大小”。

要注意的是尺度因子 $a(t)$ 只具有相对意义，并不直接代表物理长度；组合 $a(t)r$ 才具有物理长度的意义。如果把 $a(t)$ 多乘一个常数，同时把 r 除以这个常数，并把 k 乘以这个常数的平方，则不改变度规的任何物理内容。我们经常把宇宙目前¹的 a 取成 1。在这一章，我们约定用下标 0 表示“目前的量”。那么 t_0 代表“宇宙年龄”；我们刚刚约定了 $a_0 \equiv a(t_0) = 1$ 。

观测表明，尺度因子是 t 的单调增长函数，这可以理解为宇宙的空间大小一直在膨胀。宇宙膨胀的概念源于 20 世纪初的观测革命。埃德温·哈勃 (Edwin Hubble) 发现，遥远星系的光谱普遍向红端移动，这意味着它们正在远离我们，且距离越远退行速度越快。这一现象表明，宇宙并非静止，而是在均匀地膨胀——如同葡萄干面包在烘烤时彼此分离。更令人惊讶的是 1998 年的发现。两个独立研究团队通过观测 Ia 型超新星发现，宇宙的膨胀并非如预期般因引力而减速，反而在加速。如果承认广义相对论可以被应用于宇宙学尺度，那么这一颠覆性的观测结果指向某种未知的斥力成分（暗能量）。

例题 13: 在 FLRW 宇宙中，把 (r, θ, ϕ) 坐标不变的观测者称为共动观测者。假设一个共动观测者在 $(t_1, r_1, \theta_1, \phi_1)$ 发射了一个 TA 看来频率为 ν 的光子，在 $(t_2, r_2, \theta_2, \phi_2)$ 处一个共动观测者接收到光子，接收者看到光子的频率是多少？

解答： 共动观测者的四维速度为 $u_\mu = (1, 0, 0, 0)$ ，因此看到的光子频率直接和光子在 FRW 坐标系的 p^t 成正比。光子的测地线方程具体写出来就是

$$\frac{dp^t}{dt} + \frac{a\dot{a}}{p^t} \left[\frac{(p^r)^2}{1-kr^2} + r^2 (p^\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (p^\phi)^2 \right] = 0. \quad (10.12)$$

又光子走的是零测地线，所以：

$$(p^t)^2 - a^2 \left[\frac{(p^r)^2}{1-kr^2} + r^2 (p^\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (p^\phi)^2 \right] = 0. \quad (10.13)$$

于是就有

$$\frac{dp^t}{dt} + \frac{\dot{a}}{a} p^t = 0. \quad (10.14)$$

¹由于宇宙年龄很长，人类观测的时间可以看成同一个瞬时

它的解显然是 $p^t \propto \frac{1}{a}$ 。也就是说，光子的波长和 a 成正比。即接收到的光子频率为 $\frac{a(t_1)}{a(t_2)} \nu$ 。

上面的例题给出了宇宙膨胀导致的红移（宇宙学红移）和尺度因子的关系。宇宙学红移（通常用 z 表示）定义为在理想 FLRW 背景下波长的相对变化量

$$z \equiv \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{\text{emit}}}{\lambda_{\text{emit}}}. \quad (10.15)$$

通常观测者指的都是目前地球上的观测者。在上面例题中我们得到波长正比于尺度因子的结论。所以在宇宙学时间 t 发射出的光子的宇宙学红移为：

$$z = \frac{a_0 - a}{a} = \frac{a_0}{a} - 1, \quad (10.16)$$

这里的 $a = a(t)$ 是发射点的尺度因子。

在约定 $a_0 = 1$ 的情况下，上面的结果也可以等价地写作

$$a = \frac{1}{1+z}. \quad (10.17)$$

在天文上，经常看到“这个星系的红移是 z ”这种说法。它的意思是：我们收集到的来自星系的光子，是星系满足 $a(t) = \frac{1}{1+z}$ 的宇宙学时间 t 时刻发出的（假设星系足够远，可以近似看成一个共动测试粒子）。显然， z 越大，代表看到的星系越古老，离我们的距离也越远。所以“宇宙学红移较大”同时具有“古老”、“空间距离远”、“光谱红移大”三重意义。

10.1.2 空间曲率参数

用固定的宇宙学时间 t 在 FRW 时空切出一个三维空间，并把该时刻的 a 归一化为 1，则三维空间的度规为：

$$ds^2|_{3D} = \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2.$$

这时可以计算出 Ricci 标量为 $6k$ 。

我们把 $k > 0$ （正曲率空间）的宇宙称为闭合宇宙 (closed universe)， $k < 0$ 的宇宙叫做开放宇宙 (open universe)，把 $k = 0$ 的宇宙叫做平坦宇宙 (flat universe)。

注意：“平坦”只是指空间平坦，整个四维时空还是弯曲的。

观测表明，我们的宇宙接近于平坦宇宙。这种看上去的“巧合”导致了“早期宇宙暴胀理论”的产生，有兴趣的小朋友可以借助人工智能进行了解，我们在这里就不详细介绍了。

10.2 Friedmann 方程

如果考虑一个度规严格为 FLRW 的理想宇宙，宇宙中的物质为均匀各向同性的理想流体，密度为 $\rho(t)$ ，物质压强为 $p(t)$ ，流体元四维速度为 $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ 。根据理想流体的能量动量张量密度公式 (5.15)，有

$$T^t_t = (\rho + p)u^t u_t - p g^t_t = \rho, \quad (10.18)$$

和

$$T^r_r = T^\theta_\theta = T^\phi_\phi = -p. \quad (10.19)$$

也就是在 FLRW 宇宙里，均匀理想流体的能量动量张量的混合形式为对角矩阵 $\text{diag}(\rho, -p, -p, -p)$ 。

根据爱因斯坦方程 $G^t_t = 8\pi G_N T^t_t$ ，以及 (10.9) 和 (10.18)，可以得到

第一个 Friedmann 方程

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G_N}{3}\rho, \quad (10.20)$$

根据爱因斯坦方程 $G^r_r = 8\pi G_N T^r_r$ ，以及 (10.10) 和 (10.19)，并结合上面的 (10.2)，可以得到

第二个 Friedmann 方程

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G_N}{3}(\rho + 3p). \quad (10.21)$$

例题 14: 如果均匀且各向同性的理想宇宙的度规为

$$ds^2 = dt^2 - t^2(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

其中 t 为“宇宙学时间”， x, y, z 为空间坐标。在这个坐标系里，任意固定 t 时刻的宇宙可以看成物质密度 (T^{00}) 处处均匀。那么，物质密度和 t 的多少次方成正比？

解答：把 x, y, z 替换为球坐标系 r, θ, ϕ ，则度规等价于 $k = 0$, $a(t) = t^2$ 的 FLRW 度规。根据第一个 Friedmann 方程 (10.2) 以及 $k = 0$ 的条件，就有

$$\rho \propto \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{4}{t^2} \propto t^{-2}.$$

我们可以用单位时间尺度因子的增长倍数来表征宇宙膨胀的快慢，并用符号 H 表示。那么根据定义

$$H = \frac{d \ln a}{dt} = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (10.22)$$

为了纪念发现宇宙膨胀的“元老”哈勃同学，我们称 H 为**哈勃参数**。并称目前的哈勃参数 $H_0 \equiv H(t_0)$ 为**哈勃常数**。目前宇宙学观测得到的哈勃常数大约在 70 km/s/Mpc 附近²，但各种观测方法得到的结果仍存在百分之几的不一致。在我写这本书的时间（2026 年），哈勃常数的观测不一致性是宇宙学标准模型的最大疑团。对它的进一步研究有可能会产生宇宙学模型的革命。

把(10.22)和第一个 Friedmann 方程应用于目前 t_0 时刻，可以得到

$$H_0^2 + \frac{k}{a_0^2} = \frac{8\pi G_N}{3} \rho_0. \quad (10.23)$$

或者写成无量纲的形式

$$\frac{k}{a_0^2 H_0^2} = \frac{\rho_0}{\rho_{\text{crit}}} - 1, \quad (10.24)$$

这里我们定义了临界密度

$$\rho_{\text{crit}} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G_N}. \quad (10.25)$$

于是，当目前宇宙平均密度 ρ_0 大于临界密度时， $k > 0$ ，宇宙为闭合宇宙；当 $\rho_0 < \rho_{\text{crit}}$ ，宇宙为开放宇宙。而当 $\rho_0 = \rho_{\text{crit}}$ 时，宇宙为平坦宇宙。

例题 15: 假设 FLRW 宇宙的空间曲率参数 $k = 0$ ，目前主要由能量占比为 30% 的“非相对论粒子”和能量占比为 70% 的“真空能 Λ ”两种均匀成分组成。非相对论粒子的粒子数守恒，动能相比于静止质量能可以忽略。真空能的能量密度 ρ_Λ 为常数。如果哈勃常数为 $H_0 = 70 \text{ km/s/Mpc}$ （这里的 Mpc 是百万秒差距，大约等于 $3.086 \times 10^{19} \text{ km}$ ），计算宇宙年龄 t_0 。

解答： 因为 $k = 0$ ，所以目前目前的两种成分总能量密度 $\rho_0 = \rho_{\text{crit}} = \frac{3H_0^2}{8\pi G_N}$ 。因为非相对论粒子数守恒，而物理体积和 a^3 成正比，所以只考虑静止质量能的情况下， $\rho_m \propto a^{-3}$ 。再根据目前 $\rho_{m0} = 0.3\rho_0 = 0.3\rho_{\text{crit}}$ ，就有 $\rho_m = 0.3\rho_{\text{crit}}a^{-3}$ 。

²这里的 Mpc 是百万秒差距， $1 \text{ Mpc} \approx 3.086 \times 10^{22} \text{ m}$ 。

“真空能”的能量密度 $\rho_\Lambda = 0.7\rho_{\text{crit}}$ 保持不变。

所以，在任意时刻，总密度

$$\rho = \rho_m + \rho_\Lambda = 0.3\rho_{\text{crit}}a^{-3} + 0.7\rho_{\text{crit}} = \frac{3H_0^2}{8\pi G_N}(0.3a^{-3} + 0.7)$$

当 $a \rightarrow 0^+$ 时， $\rho \rightarrow \infty$ ，对应高密度的“宇宙大爆炸”时期（看成宇宙诞生时刻）。把 ρ 的表达式代入第一个 Friedmann 方程，得到

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G_N}{3}\rho = H_0^2(0.3a^{-3} + 0.7).$$

因为 $da > 0$ （宇宙膨胀），由上式可以得到

$$\dot{a} = aH_0\sqrt{0.3a^{-3} + 0.7} = H_0\sqrt{0.3a^{-1} + 0.7a^2}.$$

把 $dt = \frac{da}{\dot{a}}$ 从 $a = 0^+$ （诞生时刻）到 $a = a_0 = 1$ （目前）进行积分，得到宇宙年龄

$$t_0 = \int_0^1 \frac{da}{\dot{a}} = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{0.3a^{-1} + 0.7a^2}} da \approx 0.9641H_0^{-1}. \quad (10.26)$$

直接把 Mpc 转化为 km，可以得到

$$H_0 = \frac{70}{3.086 \times 10^{19}} \text{s}^{-1}$$

所以

$$t_0 = 0.9641 \times \frac{3.086 \times 10^{19}}{70} \text{s} \approx 1.35 \times 10^{10} \text{yr}$$

即宇宙年龄大约为 135 亿年。

10.3 课后练习

习题 18: 如果 FLRW 度规中的 k 依赖于时间 t ，会破坏宇宙学原理吗？

习题 19: 假设 FLRW 宇宙的空间曲率参数 $k = 0$ ，且全部由非相对论粒子组成。非相对论粒子的粒子数守恒，动能相比于静止质量能可以忽略。如果哈勃常数为 $H_0 = 70 \text{ km/s/Mpc}$ ，计算宇宙年龄 t_0 。

11. 附录

11.1 重要公式表

联络

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial u^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial u^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial u^{\alpha}} \right). \quad (11.1)$$

黎曼张量

$$R^{\lambda}_{\alpha\mu\nu} = \Gamma_{\mu\beta}^{\lambda}\Gamma_{\alpha\nu}^{\beta} + \frac{\partial \Gamma_{\alpha\nu}^{\lambda}}{\partial u^{\mu}} - \Gamma_{\nu\beta}^{\lambda}\Gamma_{\alpha\mu}^{\beta} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda}}{\partial u^{\nu}}. \quad (11.2)$$

测地线方程

$$\frac{d^2 u^{\mu}}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \frac{du^{\alpha}}{ds} \frac{du^{\beta}}{ds} = 0. \quad (11.3)$$

测地线方程的逆变动量形式：

$$\frac{dp^{\mu}}{dx^0} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \frac{p^{\alpha}p^{\beta}}{p^0} = 0. \quad (11.4)$$

测地线方程的协变动量形式：

$$\frac{dp_{\lambda}}{dx^0} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}} \frac{p^{\alpha}p^{\beta}}{p^0}. \quad (11.5)$$

爱因斯坦场方程：

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu}. \quad (11.6)$$

或者等价地 ((5.23))

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = 8\pi G_N \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \quad (11.7)$$

史瓦西度规:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2G_N M}{r} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{2G_N M}{r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (11.8)$$

四极矩引力辐射公式:

$$\frac{dP}{d\Omega}(\vec{n}) = \frac{G_N \omega^6}{4\pi} Q^{ij} \left(Q^{kl} \right)^* \Xi_{ijkl}(\vec{n}). \quad (11.9)$$

FLRW 度规:

$$ds^2 = dt^2 - [a(t)]^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (11.10)$$

Friedmann 方程:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G_N}{3} \rho, \quad (11.11)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G_N}{3} (\rho + 3p). \quad (11.12)$$

11.2 后记

这本书是在 2026 年春执教《广义相对论》时随兴写下的我对广义相对论的一点感悟。由于水平所限以及常规性“手滑”，书中错误在所难免，希望发现明显错误的小朋友们勇敢地告诉我哟 (huangzhq25@mail.sysu.edu.cn)!

Bibliography

References

- [1] 黄志琦. 数学物理方法. 北京: 科学出版社, 2026. ISBN: 978-7-030-82492-9 (cited on pages 99, 108).

