

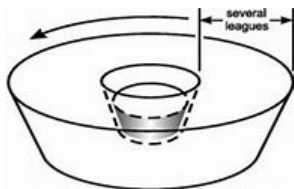
# General Relativity

## §24 Cosmology - FRW metric

Lecturer: 黄志琦

<http://zhiqihuang.top/gr>

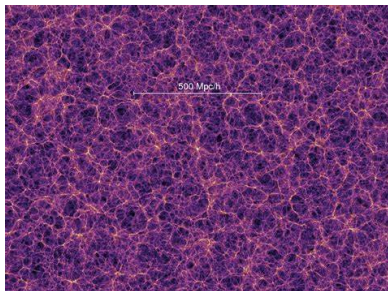
## Mach的思想实验



当水桶相对宇宙的恒星/星系背景没有旋转时，离心力就消失了，这是惊人的巧合吗？

## 标准宇宙学的基本图像

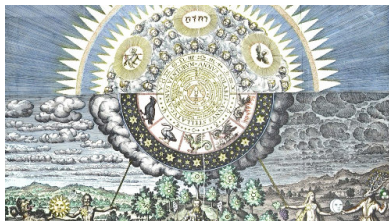
宇宙由一个非常均匀且各向同性的初始状态开始，相距很远的“测地线粒子”间的距离用标准尺子——普朗克长度来度量，不断地增大（即所谓的宇宙大爆炸）。不过，邻近的粒子间由于引力的不稳定性，逐渐结团。



虽然引力导致物质在小尺度上结团，在亿光年为单位的尺度上看，宇宙仍然均匀和各向同性。

## 宇宙学基本原理(cosmological principle)

从天圆地方，到地心说，再到日心说，再到发现河外星系.....一次又一次的沉重打击之后，人类基本上已经放弃了把自己置于宇宙中心的想法。



宇宙学基本原理：既然我们做不了宇宙中心，那谁也别想做。宇宙中没有任何特殊观测者，大尺度上看，宇宙均匀且各向同性。  
(其实叫基本假设更合理)

## FRW 度规

满足均匀且各向同性的只有

Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker 度规，有时候也简称 Friedmann–Robertson–Walker 或 FLRW 或 FRW 度规：

Lemaître 的失败可能在于英文键盘打不出他的名字……

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right)$$

这里的  $a(t)$  是任意一个  $t$  的光滑函数。 $k$  是代表着三维空间的曲率的常数。

为了书写方便，在这一讲里我们作一些约定：

- ▶ 用符号上一点表示对宇宙学时间  $t$  的导数：如  $\dot{a}$  表示  $\frac{da}{dt}$ 。
- ▶ 用下标“0”表示一个参量的“目前”值。例如  $t_0$  是“目前”的宇宙学时间。

## 共动坐标

由于  $\Gamma^r_{tt} = \Gamma^\theta_{tt} = \Gamma^\phi_{tt} = 0$ ，如果一开始测试粒子的  $p^r = p^\theta = p^\phi = 0$ ，则根据测地线方程

$$\frac{dp^\alpha}{dt} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{p^\mu p^\nu}{p^0} = 0$$

这里的  $\alpha = r, \theta, \phi$ ，无论  $\mu, \nu$  同时为  $t$  (这样  $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$  为零)，还是  $\mu, \nu$  至少有一个不是  $t$  (这样  $p^\mu p^\nu$  为零)，都会使  $\frac{dp^\alpha}{dt}$  为零。



~~床~~ 宇宙似乎有一种魔力

也就是说，测地线粒子在坐标  $(r, \theta, \phi)$  可以一直保持“静止不动”，我们把  $r, \theta, \phi$  叫做“共动坐标”。

## 尺度因子 $a$ 的归一化是任意的

FRW度规里的  $a(t)$  称为宇宙学尺度因子(scale factor)。

$a(t)r$  具有物理长度的意义。如果把  $a(t)$  多乘一个常数，同时把  $r$  除以这个常数，并把  $k$  乘以这个常数的平方，则不改变任何物理内容。我们经常把  $a_0$  (今天的  $a$ )取成 1。

## 空间曲率 $k$

用固定的宇宙学时间  $t$  在FRW时空切出一个三维空间，并把该时刻的  $a$  归一化为 1，则三维空间的度规为：

$$ds^2|_{3D} = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2.$$

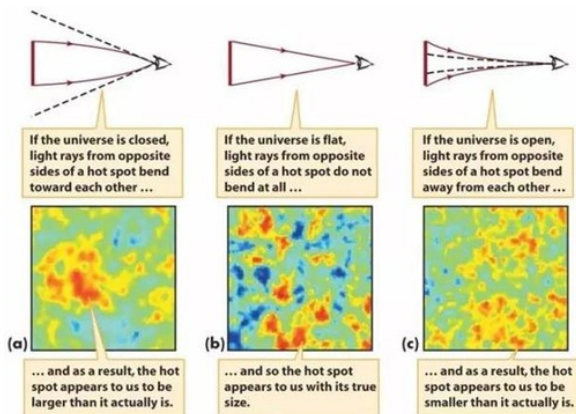
这时可以计算出 Ricci标量为  $6k$ 。

我们把  $k > 0$ （正曲率空间）的宇宙称为闭合宇宙(closed universe)， $k < 0$  的宇宙叫做开放宇宙(open universe)，把  $k = 0$  的宇宙叫做平坦宇宙(flat universe)。

注意“平坦”只是指空间平坦，整个四维时空还是弯曲的。



# 平坦宇宙和观测数据 (特别是宇宙微波背景辐射数据) 符合得还不错



# 哈勃参数

哈勃参数的定义为:

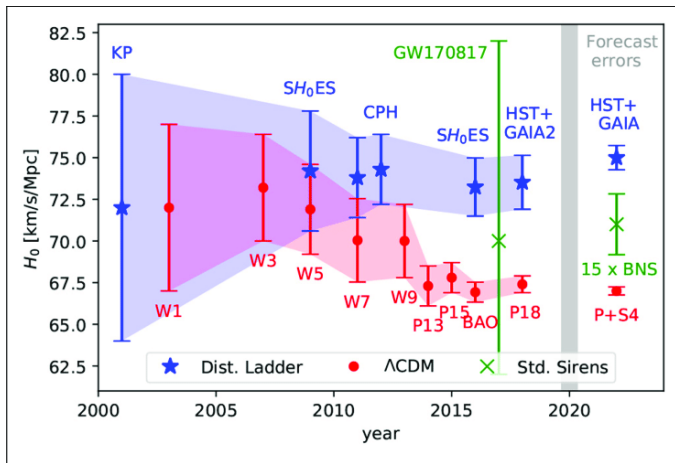
$$H = \frac{\dot{a}}{a}$$

在标准宇宙学里, 它恒大于零 (即宇宙一直在膨胀)。

$H_0$ , 也就是在  $t = t_0$  时刻的  $H$ , 叫做**哈勃常数**。它大致在 70km/s/Mpc 左右。

这里的长度单位 Mpc 是百万秒差距的意思, 一个秒差距大约是 3.26 光年。

# Hubble tension



# 思考题



假设一个共动观测者在  $(t_1, r_1, \theta_1, \phi_1)$  发射了一个TA看来频率为  $\nu$  的光子。在  $(t_2, r_2, \theta_2, \phi_2)$  处一个共动观测者接收到光子，接收者看到光子的频率是多少？

## 宇宙学红移

共动观测者的四维速度为  $u_\mu = (1, 0, 0, 0)$ ，因此看到的光子频率直接和光子在FRW坐标系的  $p^t$  成正比。光子的测地线方程（见附录的联络表达式）为：

$$\frac{dp^t}{dt} + \frac{a\dot{a}}{p^t} \left[ \frac{(p^r)^2}{1 - kr^2} + r^2 (p^\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (p^\phi)^2 \right] = 0.$$

又光子走的是零测地线，所以：

$$(p^t)^2 - a^2 \left[ \frac{(p^r)^2}{1 - kr^2} + r^2 (p^\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (p^\phi)^2 \right] = 0.$$

于是就有

$$\frac{dp^t}{dt} + \frac{\dot{a}}{a} p^t = 0$$

它的解显然是  $p^t \propto \frac{1}{a}$ 。也就是说，光子的波长和  $a$  成正比。

## 宇宙学红移

宇宙学红移就定义为波长的相对变化量

$$z \equiv \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{\text{emit}}}{\lambda_{\text{emit}}}$$

通常观测者指的都是目前地球上的观测者。所以在宇宙学时间  $t$  发射出的光子的宇宙学红移为：

$$z = \frac{a_0 - a}{a},$$

这里的  $a = a(t)$  是发射点的尺度因子。容易看出

$$\frac{a}{a_0} = \frac{1}{1+z}.$$

## 观测量的红移

在天文上，经常看到“这个星系的红移是 $z$ ”这种说法。它的意思是：我们收集到的来自星系的光子，是星系在

$$\frac{a(t)}{a_0} = \frac{1}{1+z}$$

对应的宇宙学时间  $t$  时刻发出的(假设星系足够远，可以近似看成一个共动测试粒子)。

显然， $z$  越大，代表看到的星系越古老，离我们的距离也越远。

## Friedmann Equations

如果宇宙的物质可以看成均匀的理想流体，密度为  $\rho(t)$ ，压强为  $p(t)$ ，则爱因斯坦方程可以简化为：

$$\begin{aligned}\frac{k + \dot{a}^2}{a^2} &= \frac{8\pi G}{3} \rho \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p)\end{aligned}$$

这两个方程分别称为第一个和第二个 Friedmann 方程



## 附录1: FRW度规的联络

$$\begin{aligned}\Gamma^t_{rr} &= \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2} \\ \Gamma^t_{\theta\theta} &= r^2 a \dot{a} \\ \Gamma^t_{\phi\phi} &= r^2 a \dot{a} \sin^2 \theta \\ \Gamma^r_{rt} &= \frac{\dot{a}}{a} \\ \Gamma^r_{rr} &= \frac{kr}{1 - kr^2} \\ \Gamma^r_{\theta\theta} &= -r(1 - kr^2) \\ \Gamma^r_{\phi\phi} &= -r(1 - kr^2) \sin^2 \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^\theta_{\theta t} &= \frac{\dot{a}}{a} \\ \Gamma^\theta_{\theta r} &= \frac{1}{r} \\ \Gamma^\theta_{\phi\phi} &= -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma^\phi_{\phi t} &= \frac{\dot{a}}{a} \\ \Gamma^\phi_{\phi r} &= \frac{1}{r} \\ \Gamma^\phi_{\phi\theta} &= \cot \theta\end{aligned}$$

## 附录2: FRW度规的Ricci张量和Einstein 张量

Ricci tensor:

$$R^t_t = -\frac{3\ddot{a}}{a}$$

$$R^r_r = R^\theta_\theta = R^\phi_\phi = -\frac{2k + a\ddot{a} + 2\dot{a}^2}{a^2}$$

Ricci scalar:

$$R = -\frac{6(k + a\ddot{a} + \dot{a}^2)}{a^2}$$

Einstein tensor:

$$G^t_t = \frac{3(k + \dot{a}^2)}{a^2}$$

$$G^r_r = G^\theta_\theta = G^\phi_\phi = \frac{k + 2a\ddot{a} + \dot{a}^2}{a^2}$$