General Relativity

§23 Gravitational Radiation (II)

Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/gr

这一讲的主题是：用四极矩近似算引力波

张量的 virial 定理

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int x^i x^j T^{00}(\mathbf{x},t)d^3\mathbf{x} = 2\int T^{ij} d^3\mathbf{x}$$

在Minkowski 时空，对局域、守恒的能量动量张量 $T^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t)$，定义能量密度的四极矩：

$$Q^{ij}(\mathbf{x}, t) \equiv \int x^i x^j T^{00}(\mathbf{x}, t) d^3\mathbf{x}$$

由局域条件知道三维散度的积分

$$\int \partial_k \left(T^{k0} x^i x^j \right) = 0$$

于是

$$\frac{\partial Q^{ij}}{\partial t} = \int \partial_\mu \left(T^{\mu 0} x^i x^j \right) d^3\mathbf{x} = \int T^{\mu 0} \partial_\mu (x^i x^j) d^3\mathbf{x} = \int \left(T^{i0} x^j + T^{j0} x^i \right) d^3\mathbf{x}$$

故技重施，由三维散度积分

$$\int \partial_k \left(T^{ik} x^j \right) d^3\mathbf{x} = 0$$

可以得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \int T^{i0} x^j d^3\mathbf{x} = \int \partial_\mu \left(T^{i\mu} x^j \right) d^3\mathbf{x} = \int T^{i\mu} \partial_\mu x^j d^3\mathbf{x} = \int T^{ij} d^3\mathbf{x}$$

于是

$$\frac{\partial^2 Q^{ij}}{\partial t^2} = 2 \int T^{ij} d^3\mathbf{x}$$

这叫做（张量的）virial定理。

空空形式的引力辐射公式

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{G\omega^2}{\pi}\mathcal{M}^*_{ij}(\omega\mathbf{n})\mathcal{M}_{kl}(\omega\mathbf{n})\mathcal{P}^{ijkl}(\mathbf{n})$$

为了叙述简明，我们考虑连续谱的情形

$$\frac{dE}{d\Omega d\omega}(\mathbf{n}) = \frac{G\omega^2}{4\pi^2}\left(\mathcal{T}^{*}_{\mu\nu}(k)\mathcal{T}^{\mu\nu}(k) - \frac{1}{2}|\mathcal{T}^{\alpha}_{\ \alpha}(k)|^2\right)$$

守恒条件 $T_{\mu\nu}{}^{;\mu} = 0$ 在傅立叶空间表述为

$$k^{\mu}\mathcal{T}_{\mu\nu} = 0$$

这样四个方程就允许我们**把带时间指标的分量全都用只带空间指标的分量表示出来**。下面我们一律在傅立叶空间讨论，且省略宗量 $k = (\omega, \omega\mathbf{n})$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_{0i} &= -n^j \mathcal{T}_{ij}, \mathcal{T}^{0i} = n^j \mathcal{T}_{ij} \\
\mathcal{T}_{00} &= \mathcal{T}^{00} = n^i n^j \mathcal{T}_{ij} \\
\mathcal{T}^{\alpha}_{\ \alpha} &= \left(n^i n^j - \delta^{ij}\right) \mathcal{T}_{ij}
\end{aligned}
$$

按照惯例这里的拉丁字母 i, j 只对空间指标 $1, 2, 3$ 求和。 于是

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{T}^{\alpha}_{\ \alpha}|^2 &= \left(n^i n^j - \delta^{ij}\right) \left(n^k n^l - \delta^{kl}\right) \mathcal{T}^*_{ij} \mathcal{T}_{kl} \\
\mathcal{T}^*_{\mu\nu} \mathcal{T}^{\mu\nu} &= \left(n^i n^k - \delta^{ik}\right) \left(n^j n^l - \delta^{jl}\right) \mathcal{T}^*_{ij} \mathcal{T}_{kl}
\end{aligned}
$$

用空空分量表示的引力波辐射公式

$$\frac{dE}{d\Omega d\omega}(\mathbf{n}) = \frac{G\omega^2}{4\pi^2}\mathcal{T}^*_{ij}(k)\mathcal{T}_{kl}(k)\mathcal{P}^{ijkl}(\mathbf{n})$$

这里的

$$\mathcal{P}^{ijkl}(\mathbf{n}) \equiv \left(n^i n^k - \delta^{ik}\right)\left(n^j n^l - \delta^{jl}\right) - \frac{1}{2}\left(n^i n^j - \delta^{ij}\right)\left(n^k n^l - \delta^{kl}\right)$$

叫做 横向无迹投影算符。

单频的情况也类似，就不重复推导了：

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{G\omega^2}{\pi}\mathcal{M}^*_{ij}(\omega\mathbf{n})\mathcal{M}_{kl}(\omega\mathbf{n})\mathcal{P}^{ijkl}(\mathbf{n})$$

四极矩近似：波源尺寸远小于波长

$$\frac{dP}{d\Omega} \approx \frac{G\omega^6}{4\pi} Q^*_{ij} Q_{kl} \mathcal{P}^{ijkl}(\mathbf{n})$$

四极矩近似的物理场景

如果引力波源的运动是非相对论的，那么波源的尺度很可能比引力波的波长小得多（因两者频率相同，而引力波以光速传播）。

这时就又有了操作的空间——

以单频引力波辐射为例

如果波源的尺度远小于 $\frac{1}{\omega}$。那么对波源的振幅 $M^{ij}(\mathbf{x})$ 做傅立叶变换时， $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ 可以近似当成 1。

$$\mathcal{M}^{ij}(\omega\mathbf{n}) \approx \int M^{ij}(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}$$

对张量 $M^{\mu\nu}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ 使用virial定理

$$\int M^{ij}(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = -\frac{1}{2}\omega^2 \int x^i x^j M^{00}(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}$$

单频四极矩辐射公式

记能量密度的四极矩(quadrupole)

$$Q^{ij} \equiv \int x^i x^j M^{00}(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}$$

则 $\mathcal{M}^{ij}(\omega\mathbf{n}) \approx \frac{\omega^2}{2} Q^{ij}$。代入到引力波辐射公式里

$$\frac{dP}{d\Omega} \approx \frac{G\omega^6}{4\pi} Q^*_{ij} Q_{kl} \mathcal{P}^{ijkl}(\mathbf{n})$$

连续谱的四极矩辐射公式

对连续谱，推导完全类似。可以定义

$$Q^{ij}(\omega) \equiv \int e^{i\omega t} dt \int x^i x^j T^{00}(t, \mathbf{x}) d^3\mathbf{x}$$

有

$$\frac{dE}{d\Omega d\omega}(\mathbf{n}) \approx \frac{G\omega^6}{16\pi^2} Q^*_{ij}(\omega) Q_{kl}(\omega) \mathcal{P}^{ijkl}(\mathbf{n})$$

绕转双星的辐射功率

$$P = \frac{128 G M^2 R^4 \omega^6}{5}$$

因为只是做个示范，我们考虑最简单的例子：两个质量为 M 的中子星以角频率 ω 在圆轨道上互相绕转。设它们之间距离为 $2R$，则有

$$\omega^2 = \frac{GM}{4R^3}$$

取旋转中心为原点，旋转轴为 z 轴，则近似有

$$T_{00}(t,x,y,z) = M\left[\delta(x - R\cos\omega t)\delta(y - R\sin\omega t) + \delta(x + R\cos\omega t)\delta(y + R\sin\omega t)\right]\delta(z)$$

显然

$$Q_{13} = Q_{23} = Q_{33} = 0$$

由于

$$\int T_{00}(t,x,y,z)x^2d^3\mathbf{x} = MR^2\left[1+\cos(2\omega t)\right]$$

$$\int T_{00}(t,x,y,z)y^2d^3\mathbf{x} = MR^2\left[1-\cos(2\omega t)\right]$$

$$\int T_{00}(t,x,y,z)xyd^3\mathbf{x} = MR^2\left[\sin(2\omega t)\right]$$

所以这是角频率为 2ω 的单频源，且

$$Q_{11} = \frac{MR^2}{2}, Q_{22} = -\frac{MR^2}{2}, Q_{12} = -i\frac{MR^2}{2}$$

代入四极矩辐射公式，得到角频率为 2ω 的引力波辐射强度为

$$\frac{dP}{d\Omega}(\mathbf{n}) = \frac{2GM^2R^4\omega^6}{\pi}\left(\sin^4\theta - 8\sin^2\theta + 8\right)$$

这里的 θ 是 $\mathbf{n}$ 和 z 轴的夹角。

如果对所有方向积分，则得到辐射功率

$$P = \frac{128GM^2R^4\omega^6}{5}$$

这部分的计算是用代码完成的，请参考
`http://zhiqihuang.top/gr/codes/TTproj.py`

附录：横向无迹投影算符$\mathcal{P}^{ijkl}$的物理意义

$$\left(\mathcal{T}^{\mathrm{TT}}\right)^{ij} = P^{ijkl}T_{kl}$$

把三维欧氏空间的对称二阶张量 $\mathcal{T}_{ij}$ (6个自由度）分解为2个标量(2个自由度)，一个无源的矢量（2个自由度），和一个横向无迹的二阶张量（2个自由度）：

$$\mathcal{T}_{ij} = \Phi\delta_{ij} + \left(n_i n_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right)\Psi + (n_i A_j + n_j A_i) + \mathcal{T}_{ij}^{\mathrm{TT}}$$

这里的 Φ, Φ 是标量； A_i 是无源的三维矢量，满足 $n^i A_i = 0$ (现在我在讨论三维欧氏空间，指标在上面和下面都一样)。
首先两边求迹，可以确定 $\Phi = \frac{\mathcal{T}}{3}$，这里 $\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{T}^i_i$ 的简写。
然后两边乘以 $n^i n^j$，可以得到：

$$n^i n^j \mathcal{T}_{ij} = \frac{\mathcal{T}}{3} + \frac{2}{3}\Psi$$

即

$$\Psi = \frac{3}{2}\left(n^i n^j \mathcal{T}_{ij} - \frac{\mathcal{T}}{3}\right)$$

然后在

$$\mathcal{T}_{ij} = \Phi\delta_{ij} + \left(n_i n_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right)\Psi + (n_i A_j + n_j A_i) + \mathcal{T}_{ij}^{\mathrm{TT}}$$

两边乘以 n^i 并代入 Φ, Ψ 的解，得到

$$n^i\mathcal{T}_{ij} = \frac{\mathcal{T}}{3}n_j + n_j\left(n^k n^l \mathcal{T}_{kl} - \frac{\mathcal{T}}{3}\right) + A_j$$

即

$$A_j = n^i\mathcal{T}_{ij} - \left(n^k n^l \mathcal{T}_{kl}\right) n_j$$

最后，把 Φ, Ψ, A_j 都代入，得出 $\left(\mathcal{T}^{\mathrm{TT}}\right)^{ij} = P^{ijkl}T_{kl}$.