General Relativity

§22 Gravitational Radiation (I)

Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/gr

之前已经给出了引力波的推迟势解，在这一讲我们要讲如何实际应用它。

为了让讨论清晰简洁，我们有必要引入一个非常好用的操作——

bar操作

对任何一个线性化的，用 $\eta_{\mu\nu}$ 进行指标升降的小量 $f_{\mu\nu}$，我们都可以定义

$$\bar{f}_{\mu\nu} \equiv f_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} f^{\alpha}_{\ \alpha}$$

那么线性化的爱因斯坦方程就可以写成

$$\bar{R}_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

更有意思的是，两次加bar操作相当于没有操作，也就是爱因斯坦方程两边加bar可以得到

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \bar{T}_{\mu\nu}$$

bar操作(续)

在谐和坐标系里，$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu}$。爱因斯坦方程成为 $\Box h_{\mu\nu} = -16\pi G\,\bar{T}_{\mu\nu}$ 或者等价的 $\Box\bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}$。因此推迟势解可以写成我们之前给出过的:

$$h_{\mu\nu}(t,\mathbf{x}) = -4G\int d^3\mathbf{x}'\,\frac{\bar{T}_{\mu\nu}\left(\mathbf{x}', t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$$

或者其等价形式

$$\bar{h}^{\mu\nu}(t,\mathbf{x}) = -4G\int d^3\mathbf{x}'\,\frac{T^{\mu\nu}\left(\mathbf{x}', t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$$

引力波的能量密度

$$\rho_{\rm gw} = \frac{1}{32\pi G}\left(\dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 + |\nabla h_+|^2 + |\nabla h_\times|^2\right)$$

先给个可能会令你失望的结论：引力没有真正意义上的局域的能量动量张量，也就是你问在这个时空点的引力能量密度是多少，一般是没有明确答案的。(可以参考 Dirac 或者 Weinberg 书上的讨论)。

这决不仅仅是因为引力的表述形式里具有非物理的自由度（电磁场的四维矢势里也有，但电磁场明确地具有局域的能量动量张量）。首先，非物理的自由度和张量的定义（"坐标变换"）纠缠到了一起，把问题变得更复杂。其次，引力的4个非内禀自由度只是被动地响应物质的分布——这种没有决定自己命运的能力的"傀儡"是否应该具有"能量动量"，本身也是一件值得商榷的事情。

不过，对单方向传播的引力波，我们可以操作掉所有非内禀的自由度，计算它的"物理"能量密度。

对于多方向传播的引力波交杂在一起的情况，我们并没有统一的"操作坐标系"的方式来消除所有非内禀自由度，把各种不同坐标系的能量密度加起来的操作就有点诡异了（不过我的个人观点是这问题不大）。

逆变度规的变化量

如果我们约定用 $\eta_{\mu\nu}$ 对 $h_{\mu\nu}$ 进行指标升降，那么容易验证 $\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$ 和 $\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ 在一阶近似意义下互为逆矩阵。

也就是说 $-h^{\mu\nu}$ 是对 Minkowski 逆变形式度规的偏离。

近似作用量

在讨论变分法推导爱因斯坦方程时我们证明了：

$$\delta S = -\frac{1}{16\pi G}\int \sqrt{-g}d^4x\delta g^{\mu\nu}\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right)$$

如果从 Minkowski 度规出发，微扰到 $\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}$，那么由于Minkowski度规给出的 $R_{\mu\nu}=0$，上面的积分也是零。

这并不奇怪，说的无非是当没有物质作用量时，Minkowski度规让作用量取到稳定值（一阶变化量消失）。
所以我们要算的是个二阶小量——

近似作用量（续）

把度规 $\eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}$ 微扰到 $\eta_{\mu\nu} + (\epsilon + d\epsilon)h_{\mu\nu}$ 时，

$$\delta g^{\mu\nu} \approx -h^{\mu\nu} d\epsilon, \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \approx -\frac{1}{2}\epsilon \Box \bar{h}_{\mu\nu}$$

这里利用前一讲推导的谐和坐标系里的 $R_{\mu\nu} \approx -\frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu}$。
所以

$$\begin{aligned} dS &= S(\epsilon + d\epsilon) - S(\epsilon) \\ &= -\frac{1}{16\pi G}\int \sqrt{-g}\, d^4x \, (-d\epsilon\, h^{\mu\nu}) \left(-\frac{1}{2}\epsilon \Box \bar{h}_{\mu\nu}\right) \\ &\approx -\frac{\epsilon d\epsilon}{32\pi G}\int \sqrt{-g}\, d^4x \, h^{\mu\nu}\Box \bar{h}_{\mu\nu} \end{aligned}$$

近似作用量（续）

然后，很简单，近似把 $\sqrt{-g}$ 当成 1，并用普通微商代替协变微商 (因为已经是二阶小量了，再修正下意义不大)。把 ϵ 从 0 积分到 1，就会得到

$$
\begin{aligned}
S &= -\frac{1}{64\pi G}\int d^4x\, h^{\mu\nu}\partial^\alpha\partial_\alpha \bar{h}_{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{64\pi G}\int d^4x\, \partial^\alpha h^{\mu\nu}\partial_\alpha \bar{h}_{\mu\nu} + \text{ignored surface terms}
\end{aligned}
$$

于是我们得到了作用量密度

$$
\mathcal{L} = \frac{1}{64\pi G}\left(\frac{\partial h^{\mu\nu}}{\partial t}\frac{\partial \bar{h}_{\mu\nu}}{\partial t} - \nabla h^{\mu\nu}\cdot\nabla \bar{h}_{\mu\nu}\right)
$$

哈密顿量密度

对应 $h_{\mu\nu}$ 的广义动量

$$p^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t}\right)} = \frac{1}{32\pi G}\frac{\partial \bar{h}^{\mu\nu}}{\partial t}$$

对应的"哈密顿量密度（能量密度）"

$$\mathcal{H} = \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t}p^{\mu\nu} - \mathcal{L} = \frac{1}{64\pi G}\left(\frac{\partial \bar{h}^{\mu\nu}}{\partial t}\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t} + \nabla \bar{h}^{\mu\nu}\cdot\nabla h_{\mu\nu}\right)$$

如前所述，这个"能量密度"并不是通常意义上的局域能量动量张量的00分量，对其物理意义进行解释时须谨慎！

考虑一个平面波，取其传播方向为 z 轴，就有

$$h_{11} = h_+, h_{22} = -h_+, h_{12} = h_{21} = h_\times$$

其余分量均为零。

容易算出

$$\bar{h}^{11} = h_+, \bar{h}^{22} = -h_+, \bar{h}^{12} = \bar{h}^{21} = h_\times$$

则能量密度

$$\rho_{\rm gw} = \frac{1}{32\pi G}\left(\dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 + |\nabla h_+|^2 + |\nabla h_\times|^2\right)$$

引力辐射

只是个傅立叶变换而已！

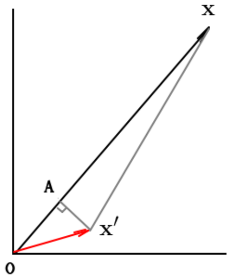
考虑以频率ω变化，分布在有限区域内的引力波源

$$T_{\mu\nu}(t,\mathbf{x}) = M_{\mu\nu}(\mathbf{x})e^{-i\omega t} + c.c.$$

$c.c.$ 表示复共轭

在离波源很远的 $\mathbf{x} = r\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ 是代表方向的单位矢, r 代表距离) 处观测，由之前推出的辐射公式有

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t,\mathbf{x}) = -4G\int \frac{d^3\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}M_{\mu\nu}(\mathbf{x}')e^{-i\omega(t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)} + c.c.$$



$$\begin{aligned} |\mathbf{x}-\mathbf{x}'| &= XX' \\ &\approx XA \\ &= OX - OA \\ &= r - \mathbf{x}'\cdot\mathbf{n} \end{aligned}$$

把振幅取零阶近似，相位需要更精确些，取一阶近似：

$$\begin{aligned}\bar{h}_{\mu\nu}(t,\mathbf{x}) &= -4G\int \frac{d^3\mathbf{x}'}{r} M_{\mu\nu}(\mathbf{x}')e^{-i\omega(t-r+\mathbf{x}'\cdot\mathbf{n})} + c.c. \\ &\equiv -\frac{4Ge^{-i\omega(t-r)}}{r}\mathcal{M}_{\mu\nu}(\omega\mathbf{n}) + c.c.\end{aligned}$$

这里的

$$\mathcal{M}_{\mu\nu}(\mathbf{k}) \equiv \int d^3\mathbf{x} M_{\mu\nu}(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

是 $M_{\mu\nu}(\mathbf{x})$ （$T_{\mu\nu}$ 的振幅）的三维傅立叶变换。

通过把结果两边取 bar 以及升指标，我们得到

$$h_{\mu\nu}(t, r\mathbf{n}) = -\frac{4Ge^{-i\omega(t-r)}}{r}\bar{\mathcal{M}}_{\mu\nu}(\omega\mathbf{n}) + c.c.$$

以及等价地

$$\bar{h}^{\mu\nu}(t, r\mathbf{n}) = -\frac{4Ge^{-i\omega(t-r)}}{r}\mathcal{M}^{\mu\nu}(\omega\mathbf{n}) + c.c.$$

在 $\mathbf{n}$ 方向附近的 $d\Omega$ 的立体角内，距离在 r 和 $r+\delta t$ 之间的空间范围内的引力波总能量，显然是源在 δ 时间间隔内发出的总能量。于是有

$$\frac{dP}{d\Omega} = \rho_{\rm gw}(t, r\mathbf{n})r^2$$

我们在远大于 $\frac{1}{\omega}$ 的时间内对它求平均(用 $\langle \ldots \rangle$表示)，只有相位抵消的项才有贡献，所以我们可以把 $\partial/\partial t$ 和 ∇ 都替换为 ω (实际是 $i\omega$ 或者 $-i\omega$，但有非零贡献的项总是一个 $i\omega$ 和 一个 $-i\omega$ 相乘)：

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle &= \frac{r^2}{64\pi G}\left\langle \frac{\partial \bar{h}^{\mu\nu}}{\partial t}\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t} + \nabla \bar{h}^{\mu\nu}\cdot\nabla h_{\mu\nu}\right\rangle \\
&= \frac{r^2\omega^2}{32\pi G}\left\langle \bar{h}^{\mu\nu} h_{\mu\nu}\right\rangle
\end{aligned}$$

这里我们对 $h_{\mu\nu}$ 都省略了宗量 $(t, r\mathbf{n})$。

代入前面求解得的 $\bar{h}^{\mu\nu}$ 和 $h_{\mu\nu}$

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{G\omega^2}{2\pi} \left\langle \left(e^{-i\omega(t-r)} \mathcal{M}^{\mu\nu}(\omega \mathbf{n}) + c.c. \right) \left(e^{-i\omega(t-r)} \bar{\mathcal{M}}_{\mu\nu}(\omega \mathbf{n}) + c.c. \right) \right\rangle$$

$$= \frac{G\omega^2}{2\pi} \left(\mathcal{M}^{\mu\nu}(\omega \mathbf{n}) \bar{\mathcal{M}}_{\mu\nu}(\omega \mathbf{n})^* + c.c. \right)$$

$$= \frac{G\omega^2}{\pi} \left(\mathcal{M}^{\mu\nu}(\omega \mathbf{n}) \mathcal{M}^*_{\mu\nu}(\omega \mathbf{n}) - \frac{1}{2} |\mathcal{M}^{\alpha}{}_{\alpha}(\omega \mathbf{n})|^2 \right)$$

通常我们会省略取平均的符号（因为这是显然必须做的）——

单频引力辐射功率公式

对单频率源，在方向 $\mathbf{n}$，单位立体角内的引力辐射功率为

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{G\omega^2}{\pi}\left(\mathcal{M}^{\mu\nu}(\omega\mathbf{n})\mathcal{M}^*_{\mu\nu}(\omega\mathbf{n}) - \frac{1}{2}|\mathcal{M}^{\alpha}{}_{\alpha}(\omega\mathbf{n})|^2\right)$$

这里的 $\mathcal{M}_{\mu\nu}$ 是 $T_{\mu\nu}$ 的振幅的三维傅立叶变换。

连续频谱的辐射总能量

四维傅立叶变换

连续频谱

如果有多个单频的源，只要在足够长的时间内求平均，所有干涉项都会消失，你只要把单独每个源的辐射功率加起来就行了。

如果是在一段有限时间内发生的事件造成的连续频谱，则只能讨论辐射总能量 (因为功率不是恒定的且如何平均的意义不明确)。我们来详细讨论下——

考虑到所有频率的贡献，$h_{\mu\nu}$ 的解要修改成

$$h_{\mu\nu}(t, r\mathbf{n}) = -\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{2Ge^{-i\omega(t-r)}}{\pi r} \bar{\mathcal{T}}_{\mu\nu}(k)$$

注意我用负频率 $\omega < 0$ 部分的贡献替代了原先写作 $c.c.$ 的部分。这里的 k 代表四维波矢 $k^{\mu} = (\omega, \omega\mathbf{n})$。$\mathcal{T}_{\mu\nu}$是 $T_{\mu\nu}$ 的四维傅立叶变换：

$$\mathcal{T}_{\mu\nu}(k) = \int d^4x\, T_{\mu\nu}(x) e^{ik_{\alpha}x^{\alpha}}$$

你当然也不难写出

$$\bar{h}^{\mu\nu}(t, r\mathbf{n}) = -\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{2Ge^{-i\omega(t-r)}}{\pi r} \mathcal{T}^{\mu\nu}(k)$$

在 **n** 方向，单位立体角内的辐射总能量为

$$
\begin{aligned}
\frac{dE}{d\Omega}(\mathbf{n}) &= \frac{r^2}{64\pi G}\int_{-\infty}^{\infty} dt\left(\frac{\partial \bar{h}^{\mu\nu}}{\partial t}\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t} + \nabla\bar{h}^{\mu\nu}\cdot\nabla h_{\mu\nu}\right) \\
&= \frac{G}{16\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty} dt\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\int_{-\infty}^{\infty} d\omega'(-2\omega\omega')e^{-i(\omega+\omega')(t-r)}\bar{\mathcal{T}}_{\mu\nu}(k)\mathcal{T}^{\mu\nu}(k') \\
&= \frac{G}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\int_{-\infty}^{\infty} d\omega'(-2\omega\omega')\delta(\omega+\omega')\bar{\mathcal{T}}_{\mu\nu}(k)\mathcal{T}^{\mu\nu}(k') \\
&= \frac{G}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\,\omega^2\bar{\mathcal{T}}_{\mu\nu}(k)\mathcal{T}^{\mu\nu}(k)^* \\
&= \frac{G}{4\pi^2}\int_{0}^{\infty} d\omega\,\omega^2\left(\mathcal{T}^*_{\mu\nu}(k)\mathcal{T}^{\mu\nu}(k) - \frac{1}{2}|\mathcal{T}^{\alpha}_{\ \alpha}(k)|^2\right)
\end{aligned}
$$

这个结果也可以理解为

连续谱引力辐射能量公式

对连续谱源，在方向 $\mathbf{n}$，单位立体角内，单位频率间隔的引力辐射总能量为

$$\frac{dE}{d\Omega d\omega}(\mathbf{n}) = \frac{G\omega^2}{4\pi^2}\left(\mathcal{T}^*_{\mu\nu}(k)\mathcal{T}^{\mu\nu}(k) - \frac{1}{2}|\mathcal{T}^{\alpha}_{\alpha}(k)|^2\right)$$

这里的 $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ 是 $T_{\mu\nu}$ 的四维傅立叶变换，四维波矢 $k^\mu = (\omega, \omega\mathbf{n})$。