General Relativity

§21 Physics of Gravitational Waves

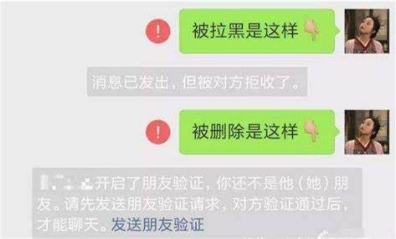
Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/gr

专业版引力波三连锤

上一讲介绍了科普版引力波三连锤。这一讲我们介绍专业版：

- 引力（波）只有2个物理自由度，神马意思？
- 引力波是横向无迹的，解释下？
- 为什么引力波自旋是2？



科普版三连锤的后果

专业版三连锤的后果

引力（波）的物理自由度？

只有2个

引力波是物理的吗?

我们约定了谐和坐标条件

$$\Box x^{\mu} = 0$$

然后导出了引力波要满足的爱因斯坦方程

$$\Box h_{\mu\nu} = 0$$

是不是忍不住要怀疑 $h_{\mu\nu}$ 是人为操作出来的?

注意到谐和坐标系不是唯一的，对 $\Box\epsilon^\mu = 0$ （学过电动力学的你丝毫不会怀疑这样的 ϵ^μ 有无穷多种解）且 ϵ^μ 不超过 $h_{\mu\nu}$ 的量级，那么至少在一阶近似下，坐标变换 $x^\mu \to x^\mu + \epsilon^\mu$ 仍然给出谐和坐标系。

看来操作的空间很大——

愈发怀疑......

为了简化讨论，我们来考虑一个沿 z 轴传播的平面波解。

- h_{33} 描述的是沿传播方向的度量（即物理长度和z坐标之间的关系）的振动，这家伙可以通过操作 z 坐标的定义来消除。
- 虽然这有些不太好想象，但是数学上的对称性容易让你相信操作时间坐标可以干掉 h_{00}。
- 虽然引力波并不在 x 和 y 方向上移动，但是操作 x 坐标和 y 坐标还是可以干掉 h_{13} 和 h_{23}（这类似于动态地调节过z轴上各点的 x, y 方向和 z轴的夹角来消除度规交叉项）。

注意傅立叶波矢 $k^\mu = (\omega, 0, 0, \omega)$, $k_\mu = (\omega, 0, 0, -\omega)$，谐和坐标条件

$$\eta^{\mu\nu} h_{\mu\alpha,\nu} = \frac{1}{2} h_{,\alpha}$$

要求

$$k^\mu h_{\mu\alpha} = \frac{1}{2} k_\alpha h$$

令 $\alpha = 0, 1, 2, 3$，分别得到

$$h_{30} = \frac{1}{2} h, h_{01} = 0, h_{02} = 0, h_{03} = -\frac{1}{2} h$$

所以，h_{01}, h_{02}, h_{03}也自动消失了，且 $h_{11} + h_{22} = 0$。

这时候 $h_{\mu\nu}$ 的迹 $h = 0$，且满足 $k^\mu h_{\mu\alpha} = 0$，这叫做横向无迹(Transverse-Traceless，简称TT)规范。

最后的结论是： 对沿 z 轴方向传播的平面波，只有 $h_{11}-h_{22}$ 和 h_{12} 是物理的两个自由度。其余所有分量以及 $h_{11}+h_{22}$ 都是零。

度规有10个自由度，四个坐标选择的随意性干掉了4个非物理自由度。那么度规应该还有6个物理自由度才对。

有时候我们会说，引力（没有波字！）只有两个物理自由度。这是什么意思呢?

因为引力波可以脱离物质自己传播，所以对应引力的内禀自由度。而度规的其他4个物理自由度由类似于牛顿引力的泊松方程描述（幼儿版GR就不进行这些繁琐的数学推导了），拿掉物质的源，响应就会消失。所以可以认为度规的其他物理自由度其实是物质的自由度，而不是引力本身的。

引力子

是自旋为2的粒子

我们经常在科普读物中看到介绍说引力子的自旋为2，这是啥意思呢？

我们都知道平面上自旋为 1 的，也就是矢量场 $\mathbf{v}$ 在坐标系旋转 θ 角时，满足下列变换规则:

$$\tilde{v}_x = v_x \cos\theta + v_y \sin\theta, \ \tilde{v}_y = v_y \cos\theta - v_x \sin\theta.$$

自旋为2的场的变换规则很简单，就是把 θ 变为 2θ。

但是——这好像有些超出本喵的想象力

为了获得一些直观理解，我们先来看一些由x-y平面上的标量场构造出来的自旋为 2 的场。设 E 是一个标量场，定义

$$q_E \equiv \frac{1}{2}\left(\partial_x^2 - \partial_y^2\right) E,\ u_E = \partial_x \partial_y E.$$

当x-y坐标系绕原点旋转θ至 $\tilde{x}$-$\tilde{y}$坐标系时，

$$\frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} = \cos\theta, \ \frac{\partial x}{\partial \tilde{y}} = -\sin\theta, \ \frac{\partial y}{\partial \tilde{x}} = \sin\theta, \ \frac{\partial y}{\partial \tilde{y}} = \cos\theta,$$

于是有

$$\frac{\partial E}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial E}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial E}{\partial y}\sin\theta, \ \frac{\partial E}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial E}{\partial y}\cos\theta - \frac{\partial E}{\partial x}\sin\theta.$$

以及

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \tilde{x}^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}\cos^2\theta + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2}\sin^2\theta + \frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y}\sin 2\theta, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \tilde{x}\partial \tilde{y}} = \frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y}\cos 2\theta - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial y^2}\right)\sin 2\theta, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \tilde{y}^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial y^2}\cos^2\theta + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}\sin^2\theta - \frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y}\sin 2\theta, \quad (3)$$

或者写成更紧凑的形式

$$\tilde{q}_E = q_E\cos 2\theta + u_E \sin 2\theta,\ \ \tilde{u}_E = u_E\cos 2\theta - q_E\sin 2\theta.$$

这说明我们从标量场 E 构造的 (q_E, u_E) 是自旋为 2 的场。

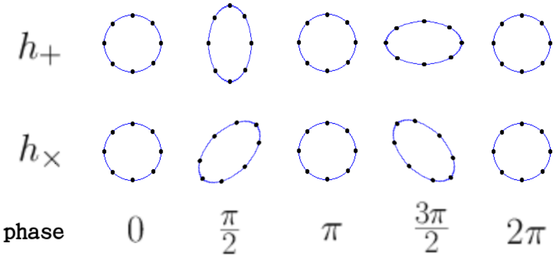
对于沿 z 轴方向传播(x, y坐标均为零）的引力波，假设我们已经操作掉了其他自由度，只剩下 $h_{11} - h_{22}$ 和 h_{12}。
对局域的"标量"函数

$$E(x, y) = \frac{1}{2}h_{11}x^2 + \frac{1}{2}h_{22}y^2 + h_{12}xy$$

（它只是局部的 $\frac{1}{2}ds^2$ 而已) 计算 q_E, u_E， 即可知道 $\left(\frac{h_{11}-h_{22}}{2}, h_{12}\right)$ 是自旋为2的场。 在文献中，一般不写 q_E, u_E，而是用符号

$$h_+ \equiv \frac{h_{11} - h_{22}}{2}, h_\times \equiv h_{12}$$

来表示引力波的两种模式。


h_+
$h_\times$
phase
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π

要注意的是，ds^2 不能是全局的标量，因此引力波(微扰意义下的二阶张量）不能用一个全局的标量场来描述。