General Relativity

§20 Gravitational Waves

Lecturer: 黄志琦

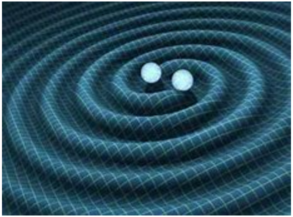
http://zhiqihuang.top/gr

往水里扔一块石头，水的流体元的空间位置随着时间波动性地变化。

可以这样说：水波是 水 相对于 空间背景 的 时间周期性 振动。

问题I

引力波通常在科普读物中被描述为“时空的涟漪”



那引力波是 ？？ 相对于 ？？？ 的 ？？ 周期性 振动?

问题II

爱因斯坦方程

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu}$$

这里的 $T^{\mu\nu}$ 要包含引力波的能量动量吗?

问题III

引力波经过引力源附近也会发生偏折吗?

谁说知道引力波是啥，你就拿这三连发锤TA。

谐和坐标系的引力波方程

$$\Box h_{\mu\nu} = -16\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} T \right)$$

四维拉普拉斯算符□

四维拉普拉斯算符 $\Box$ 的定义为

$$\Box f = f^{;\mu}{}_{;\mu}$$

对一个标量 ϕ，有

$$\begin{aligned}
\Box\phi &= (g^{\mu\nu}\phi_{;\nu})_{;\mu} \\
&= g^{\mu\nu}\phi_{;\nu;\mu} \\
&= g^{\mu\nu}\phi_{,\nu,\mu} - g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\phi_{,\lambda} \\
&= g^{\mu\nu}\phi_{,\nu,\mu} - \Gamma^{\lambda}\phi_{,\lambda}
\end{aligned}$$

在最后一行我们定义了 $\Gamma^{\lambda} \equiv g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$

显然，Minkowski时空的里相速度为光速的波动方程可以写成 $\Box u = 0$.

近似Minkowski时空

如果观测者远离中子星和黑洞这样稀少的天体。我们知道广义相对论效应都不强，时空近似是 Minkowski 时空。

不仅如此，爱因斯坦方程右边的 $8\pi G T^{\mu\nu}$ 的量级可以用白矮星的密度来设置一个上限：

$$|8\pi G T^{\mu\nu}| \lesssim \frac{1}{L^2}$$

这里的 $L = 10^9\mathrm{m}$。由于爱因斯坦张量是度规的二阶导数以及一阶导数的平方组成的，所以就可以认为在小于 L 的尺度范围内度规的变化量也很小。这当然不能算是严格的证明，但至少是作为推理出发点的合理假设。

近Minkowski度规

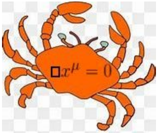
因此，我们假设在远离致密天体的小范围时空区域里，**选择合理的坐标系**，可以有度规

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

这里的 $\eta_{\mu\nu}$ 是Minkowski度规，$h_{\mu\nu} \ll 1$，且 $h_{\mu\nu}$ 的一阶、二阶偏导数都可以看成同阶的小量。我们将在讨论运动方程时总是只保留 $h_{\mu\nu}$ 的一阶小量。

“合理坐标系”不清不楚，不如叫“河蟹谐和坐标系”

我们要求“谐和坐标系”对所有指标$\mu = 0, 1, 2, 3$，都要满足



取标量 $f = x^\mu$ （那就是说，即使你换到另外一种不太河蟹的坐标系，每个物理点的 f 还是原先谐和坐标系里的 x^μ），都要有

$$\Box f = 0$$

谐和坐标条件（续）

根据

$$\Box f = g^{\mu\nu} f_{,\mu,\nu} - \Gamma^{\lambda} f_{,\lambda}$$

在谐和坐标系里， $f = x^{\mu}$ 的任意二阶普通偏导都是零，所以谐和坐标条件可以等价地写为

$$\Gamma^{\lambda} = 0$$

当然，也可以写成

$$\Gamma_{\lambda} \equiv g^{\alpha\beta} \Gamma_{\lambda\alpha\beta} = 0$$

线性化的谐和坐标条件

我们先计算联络

$$\Gamma_{\rho\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(h_{\mu\rho,\nu} + h_{\nu\rho,\mu} - h_{\mu\nu,\rho}\right)$$

谐和坐标条件就是

$$\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\left(h_{\mu\rho,\nu} + h_{\nu\rho,\mu} - h_{\mu\nu,\rho}\right) = 0$$

上式可以写成

$$\eta^{\mu\nu}h_{\rho\mu,\nu} = \frac{1}{2}h_{,\rho}$$

这里的 $h \equiv \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$.

谐和坐标系里的Ricci张量一阶近似

由于联络已经是 $h_{\mu\nu}$ 的一阶小量，在黎曼张量的联络表达式里就可以扔掉联络的乘积项，

$$
\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= R^{\lambda}{}_{\mu\nu\lambda} \\
&= \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda,\nu} \\
&= \frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho}\left(h_{\mu\rho,\nu,\lambda} + h_{\nu\rho,\mu,\lambda} - h_{\mu\nu,\rho,\lambda} + h_{\rho\mu,\lambda,\nu} + h_{\rho\lambda,\mu,\nu} - h_{\mu\lambda,\rho,\nu}\right) \\
&= \frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho}\left(h_{\nu\rho,\mu,\lambda} + h_{\rho\mu,\lambda,\nu} - h_{\mu\nu,\rho,\lambda}\right) + \frac{1}{2}h_{,\mu,\nu} \\
&= -\frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho}h_{\mu\nu,\rho,\lambda}
\end{aligned}
$$

在最后一步我们使用了谐和坐标条件

真空中的爱因斯坦方程：引力波

于是在谐和坐标系下，真空中的爱因斯坦方程可以写作：

$$\Box h_{\mu\nu} = 0$$

这是波速为光速的波动方程。

非真空情况

在非真空中，谐和坐标系里线性化的爱因斯坦方程可以写作：

$$\Box h_{\mu\nu} = S_{\mu\nu}$$

这里的

$$S_{\mu\nu} \equiv -16\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} T^{\alpha}_{\ \alpha} \right)$$

为了让解看起来更幼儿园化，下面我们把时间和空间坐标分离开来，记 $t = x^0$, $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$。

引力辐射方程的解

如果你贫瘠的记忆里还有一丝电动力学的残余物，或许下面的“推迟势”解并不会让你太慌张：

$$h_{\mu\nu}(t,\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3\mathbf{x}'\,\frac{S_{\mu\nu}\left(\mathbf{x}', t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$$

当然这是一个特解，你可以把任何真空中的 $\Box h_{\mu\nu} = 0$ 的解加上去。和电动力学中一样，我们把这个特解解释为由源 $S_{\mu\nu}$ 产生的引力波，而把额外的真空解部分（如果有的话）解释为来自于远处未知源的引力波。