General Relativity

§19 General Discussion about Black Holes

Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/gr

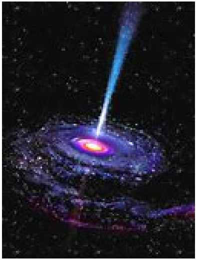
我无意在幼儿版GR中把大家拉黑（拉入黑洞知识的泥潭），这一讲的唯一目的是让你不至于在听有关黑洞的讲座时全程梦游。

Kerr Black Hole

$$
\begin{aligned}
ds^2 \quad = \quad & \left(1 - \frac{2GMr}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right) dt^2 \\
& + \frac{4GMra\sin^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta} dt d\phi \\
& - \left(r^2 + a^2 + \frac{2GMra^2\sin^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right)\sin^2\theta d\phi^2 \\
& - \frac{r^2 + a^2\cos^2\theta}{r^2 - 2GMr + a^2} dr^2 \\
& - \left(r^2 + a^2\cos^2\theta\right) d\theta^2
\end{aligned}
$$

Kerr Black Hole

黑洞附近的气体和其他天体会被黑洞吞噬，吞噬的过程中黑洞会吸收它们的轨道角动量。所以宇宙中的黑洞应该都或多或少有些“自转”。这种黑洞叫做 Kerr 黑洞。



如果取其“自转轴”为南北极方向建立“球坐标系”，质量为 M，单位质量的角动量为 a 的Kerr黑洞的度规为

$$
\begin{aligned}
ds^2 \quad = \quad & \left(1 - \frac{2GMr}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right) dt^2 \\
& + \frac{4GMra\sin^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta} dt d\phi \\
& - \left(r^2 + a^2 + \frac{2GMra^2\sin^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right)\sin^2\theta d\phi^2 \\
& - \frac{r^2 + a^2\cos^2\theta}{r^2 - 2GMr + a^2} dr^2 \\
& - \left(r^2 + a^2\cos^2\theta\right) d\theta^2
\end{aligned}
$$

(哇！五行就写完了！)

因为Kerr度规相关的表达式都太长了，我们要约定一些符号来尽可能地保护视力。

- 定义符号 $\rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2\theta$
- 定义符号 $\Delta \equiv r^2 - 2rGM + a^2$ (Δ 是长度平方量纲)

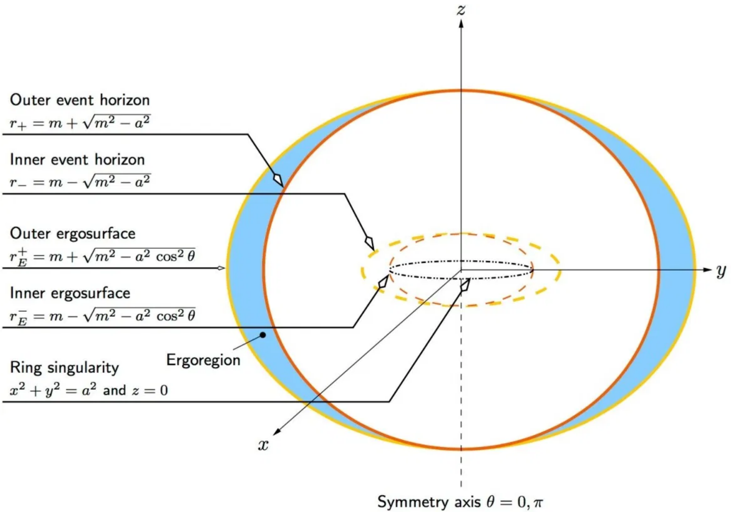
这样Kerr黑洞的度规可以按 (t, r, θ, ϕ) 的坐标次序写为：

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2GMr}{\rho^2} & & & \frac{2GMra\sin^2\theta}{\rho^2} \\ & -\frac{\rho^2}{\Delta} & & \\ & & -\rho^2 & \\ \frac{2GMra\sin^2\theta}{\rho^2} & & & -\left(r^2 + a^2 + \frac{2GMra^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

逆变形式的度规

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{2GMa^2 r\sin^2\theta + (r^2+a^2)\rho^2}{\rho^2\Delta} & & & \frac{2GMar}{\rho^2\Delta} \\ & -\frac{\Delta}{\rho^2} & & \\ & & -\frac{1}{\rho^2} & \\ \frac{2GMar}{\rho^2\Delta} & & & \frac{2GMr-\rho^2}{\rho^2\Delta\sin^2\theta} \end{bmatrix}$$

Kerr几何



Outer event horizon
$r_+ = m + \sqrt{m^2 - a^2}$
Inner event horizon
$r_- = m - \sqrt{m^2 - a^2}$
Outer ergosurface
$r_E^+ = m + \sqrt{m^2 - a^2\cos^2\theta}$
Inner ergosurface
$r_E^- = m - \sqrt{m^2 - a^2\cos^2\theta}$
Ring singularity
$x^2 + y^2 = a^2$ and $z = 0$
Ergoregion
z
y
x
Symmetry axis $\theta = 0, \pi$

Kerr度规里的测试粒子

度规 $g_{\mu\nu}$ 仍然不依赖于 t 和 ϕ，所以 p_t 和 p_ϕ 守恒。

此外，ds^2 表达式照例会给我们一个方程。

由于失去了空间对称性，不能再假设测试粒子在一个平面上运动（除非刚好粒子位置和初速度都在赤道平面 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 上）。

还缺的一个方程只能用最原始的测地线方程来凑。

为此我们要计算联络......

$$
\begin{aligned}
\Gamma^t_{rt} &= \frac{GM\left(a^2+r^2\right)\left(-a^2\cos^2\theta+r^2\right)}{\left(a^2\cos^2\theta+r^2\right)^2\left(-2GMr+a^2+r^2\right)} \\
\Gamma^t_{\theta t} &= -\frac{4GMa^2r\sin(2\theta)}{\left(a^2\cos(2\theta)+a^2+2r^2\right)^2} \\
\Gamma^t_{\phi r} &= \frac{GMa\left(a^4\cos^2\theta-a^2r^2\cos^2\theta-a^2r^2-3r^4\right)\sin^2\theta}{\left(a^2\cos^2\theta+r^2\right)^2\left(-2GMr+a^2+r^2\right)} \\
\Gamma^t_{\phi\theta} &= \frac{2GMa^3r\sin^3\theta\cos\theta}{\left(a^2\cos^2\theta+r^2\right)^2} \\
\Gamma^r_{tt} &= \frac{GM}{\left(a^2\cos^2\theta+r^2\right)^3}\left(-a^2\cos^2\theta+r^2\right)\left(-2GMr+a^2+r^2\right) \\
\Gamma^r_{rr} &= \frac{r\left(-2GMr+a^2+r^2\right)+(GM-r)\left(a^2\cos^2\theta+r^2\right)}{\left(a^2\cos^2\theta+r^2\right)\left(-2GMr+a^2+r^2\right)} \\
\Gamma^r_{\theta r} &= -\frac{a^2\sin(2\theta)}{a^2\cos(2\theta)+a^2+2r^2} \\
\Gamma^r_{\theta\theta} &= -\frac{r\left(-2GMr+a^2+r^2\right)}{a^2\cos^2\theta+r^2} \\
\Gamma^r_{\phi t} &= \frac{GMa\sin^2\theta}{\left(a^2\cos^2\theta+r^2\right)^3}\left(a^2\cos^2\theta-r^2\right)\left(-2GMr+a^2+r^2\right) \\
\Gamma^r_{\phi\phi} &= \frac{\sin^2\theta}{\left(a^2\cos^2\theta+r^2\right)^3}\left(2GMr-a^2-r^2\right)\left(-2GMa^2r^2\sin^2\theta+GMa^2\left(a^2\cos^2\theta+r^2\right)\sin^2\theta+r\left(a^2\cos^2\theta+r^2\right)^2\right) \\
\Gamma^\theta_{tt} &= -\frac{8GMa^2r\sin(2\theta)}{\left(a^2\cos(2\theta)+a^2+2r^2\right)^3} \\
\Gamma^\theta_{rr} &= \frac{a^2\sin(2\theta)}{\left(-2GMr+a^2+r^2\right)\left(a^2\cos(2\theta)+a^2+2r^2\right)} \\
\Gamma^\theta_{\theta r} &= \frac{r}{a^2\cos^2\theta+r^2} \\
\Gamma^\theta_{\theta\theta} &= -\frac{a^2\sin(2\theta)}{a^2\cos(2\theta)+a^2+2r^2} \\
\Gamma^\theta_{\phi t} &= \frac{8GMar\left(a^2+r^2\right)\sin(2\theta)}{\left(a^2\cos(2\theta)+a^2+2r^2\right)^3} \\
\Gamma^\theta_{\phi\phi} &= -\frac{\sin\theta\cos\theta}{\left(a^2\cos^2\theta+r^2\right)^3}\left(2GMa^2r\left(a^2+r^2\right)\sin^2\theta+\left(a^2\cos^2\theta+r^2\right)\left(2GMa^2r\sin^2\theta+\left(a^2+r^2\right)\left(a^2\cos^2\theta+r^2\right)\right)\right) \\
\Gamma^\phi_{rt} &= \frac{GMa\left(-a^2\cos^2\theta+r^2\right)}{\left(a^2\cos^2\theta+r^2\right)^2\left(-2GMr+a^2+r^2\right)} \\
\Gamma^\phi_{\theta t} &= -\frac{2GMar}{\left(a^2\cos^2\theta+r^2\right)^2\tan\theta} \\
\Gamma^\phi_{\phi r} &= \frac{GMa^4\sin^2\theta\cos^2\theta-GMa^2r^2\cos^2\theta-GMa^2r^2-2GMr^4+a^4r\sin^4\theta+2a^4r\cos^2\theta-a^4r+2a^2r^3\cos^2\theta+r^5}{\left(a^2\cos^2\theta+r^2\right)^2\left(-2GMr+a^2+r^2\right)} \\
\Gamma^\phi_{\phi\theta} &= \frac{4GM^2a^2r^2\left(a^2+r^2\right)\sin^2\theta-\left(2GMa^2r\left(a^2+r^2\right)\sin^2\theta+\left(a^2\cos^2\theta+r^2\right)\left(2GMa^2r\sin^2\theta+\left(a^2+r^2\right)\left(a^2\cos^2\theta+r^2\right)\right)\right)\left(2GMr-a^2\cos^2\theta-r^2\right)}{\left(a^2\cos^2\theta+r^2\right)^3\left(-2GMr+a^2+r^2\right)\tan\theta}
\end{aligned}
$$

虽然完全算不动，但是为了能吹几句——

引力拖曳效应

在赤道（$\theta = \frac{\pi}{2}$）平面上运动的粒子，p_ϕ 守恒可以写成：

$$-\frac{2GMa}{r}\frac{dt}{ds} + \left(r^2 + a^2 + \frac{2GMa^2}{r}\right)\frac{d\phi}{ds} = \frac{L}{m}$$

考虑一个非常简化的情形，$r \gg GM \gg a$，且粒子运动速度远小于光速。也就是说，Kerr黑洞的角动量比较小，且测试粒子离得比较远，运动是非相对论的。这时取最低阶近似，有

$$\frac{d\phi}{dt} \approx \frac{\frac{L}{m} + \frac{2GMa}{r}}{r^2 + a^2}$$

可以看到，即使粒子的守恒角动量为零（比如它从很远处瞄准黑洞中心下落过来），它也会被黑洞的自旋带着旋转起来，旋转方向和黑洞自旋方向一致。这就是引力拖曳效应。

$a > GM$的Kerr度规存在吗?

物理学家们猜想有一条"宇宙监督"(cosmic censorship) 法则，使得所有的奇点都被保护在视界之内。

当 $a > GM$ Kerr度规的奇点就会失去视界的"保护"。这种时空"很难"（因为不好严格证明，所以只能这么说）形成，因为当单位质量角动量过大时，物质不容易掉进黑洞。所以至少定性地说，"宇宙监督法则"是有些根据的猜测。

带电的黑洞

稳态的黑洞除了质量，角动量，原则上来讲还可以有电荷Q (即所谓的稳态黑洞只有三个参数的“无毛定理”)。
这时只要把Kerr度规的

$$\Delta \equiv r^2 + a^2 - 2GMr$$

换为

$$\Delta \equiv r^2 + a^2 - 2GMr + GQ^2$$

这样得到的度规称为 Kerr-Newman 度规。它是最一般的稳定黑洞。

相关知识可以参考
`https://arxiv.org/pdf/1410.6626.pdf`

黑洞辐射

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G M}$$

我们来估算下质量为 M 的史瓦西黑洞的“视界温度”：黑洞把粒子禁锢在 $\Delta t \sim \frac{4\pi GM}{c^3}$ 大小的时间区域内(注意 $r < 2GM$ 时，r 是类时坐标)，根据海森堡不确定原理，黑洞视界内的粒子满足

$$\Delta E \Delta t \gtrsim \frac{\hbar}{2}$$

于是可以估算出粒子能量的量子波动

$$\Delta E \sim \frac{\hbar c^3}{8\pi GM}$$

那么史瓦西黑洞的“温度”

$$T \sim \frac{\Delta E}{k_B} \sim \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B GM}$$

……好了这种瞎扯实在太不严肃，我编不下去了。

正经的结论

史瓦西黑洞的“霍金温度”

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B GM}$$

严肃的证明要在很厚的书里才能找到，我们幼儿版GR直接略去……

简单估算一下，太阳质量黑洞的霍金温度大约为 $4 \times 10^{-7}\mathrm{K}$，好像完全可以忽略。
但是，小质量黑洞的霍金温度就会更高，由此产生的辐射会使小质量黑洞逐渐损失质量，这就是“黑洞蒸发”效应。

史瓦西黑洞的辐射功率

回忆一下黑体单位表面积的辐射功率为：

$$\frac{dP}{dS} = \frac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^2} T^4$$

贯彻我们的瞎扯精神，把黑洞当成黑体（反正就差一个字🤦），把黑洞视界当成“表面”，史瓦西黑洞的辐射功率为：

$$P = 4\pi \left(\frac{2GM}{c^2}\right)^2 \frac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^2} \left(\frac{\hbar c^3}{8\pi k_B GM}\right)^4 = \frac{c^6 \hbar}{15360\pi G^2 M^2}$$

虽然推导是瞎编的，但是结论仍然正确：

$$P = \frac{c^6 \hbar}{15360\pi G^2 M^2}$$

史瓦西黑洞的蒸发

我们继续按照“能量守恒”编出下列史瓦西黑洞的蒸发公式：

$$\frac{d\left(Mc^2\right)}{dt} = -P = -\frac{c^6\hbar}{15360\pi G^2 M^2}$$

这里的 t 是史瓦西坐标系里的 t，也就是无穷远处相对于坐标系静止的观测者的固有时间。
把蒸发公式等价地写成：

$$\frac{d(M^3)}{dt} = -P = -\frac{c^4\hbar}{5120\pi G^2}$$

可见质量为 M 的史瓦西黑洞的寿命为

$$t = \frac{5120\pi G^2 M^3}{c^4\hbar}$$

原初黑洞的质量下限

把黑洞寿命等价地写成:

$$\frac{t}{\mathrm{Gyr}} = 2.67 \left(\frac{M}{10^{11}\mathrm{kg}} \right)^3$$

这里的 Gyr 是 10^9 年。

如果按照标准宇宙学模型的观点，宇宙的年龄大概是 13.7Gyr。那么我们能看到的来自宇宙早期的史瓦西黑洞就有个$\sim 10^{11}$kg 的质量下限。