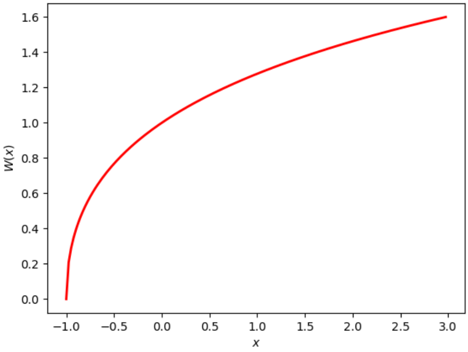
General Relativity

§18 Kruskal Coordinate and White Hole

Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/gr

胎教小练习：证明对 $x \geq -1$ 存在唯一的 $W \geq 0$ 满足 $(W-1)e^W = x$。



http://zhiqihuang.top/gr/codes/solvew.py

Schwarzschild时空可以用很多等价形式表述出来：

- turtoise 坐标
- advanced Eddington-Finkelstein坐标
- retarded Eddington-Finkelstein坐标
- Painlevé坐标
- Kruskal-Szekeres坐标，简称Kruskal坐标（Szekeres：？？？）
- Kerr-Schild 坐标
- ...

我们选择Kruskal——~~因为拼写简单好用~~

Kruskal 坐标由 τ, μ, θ, ϕ 描述，度规是

$$ds^2 = \frac{4e^{-\mathrm{W}\left(\frac{\mu^2-\tau^2}{4G^2M^2}\right)}}{\mathrm{W}\left(\frac{\mu^2-\tau^2}{4G^2M^2}\right)}\left(d\tau^2 - d\mu^2\right) - \left[2GM\,\mathrm{W}\left(\frac{\mu^2-\tau^2}{4G^2M^2}\right)\right]^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

这里的W 是我们前面讨论过的 $(x-1)e^x$ 的反函数；另外，我们约定，时间的因果方向取为 $+\tau$ 的方向。
为了使 W 的宗量不小于 -1，我们限定坐标范围

$$\tau^2 - \mu^2 \leq 4G^2M^2$$

这在 μ-τ 平面上给出的范围夹在两条双曲线之内。

从Kruskal坐标到Schwarzschild坐标

Kruskal坐标没有度规奇异性，因此可以放心拿来做解析或者数值计算。
因为 Schwarzschild 坐标对远距离 ($r \gg GM$) 观测者而言非常适用，所以我们希望最后能把 Kruskal 坐标转化为 Schwarzschild 坐标。
两个坐标的 θ, ϕ 均相同，而

$$r = 2GM\,\mathrm{W}\left(\frac{\mu^2 - \tau^2}{4G^2M^2}\right)$$

特别地，当 $\tau = \pm\mu$, 有 $r = 2GM$。牛顿极限 $r \gg 2GM$ 则等价于 $\mu^2 - \tau^2 \gg 4G^2M^2$

从Kruskal坐标到Schwarzschild坐标(续)

有了 r 之后，时间坐标 t 要分类讨论：
如果 $r \geq 2GM$，则

$$\tanh \frac{t}{4GM} = \frac{\tau}{\mu}$$

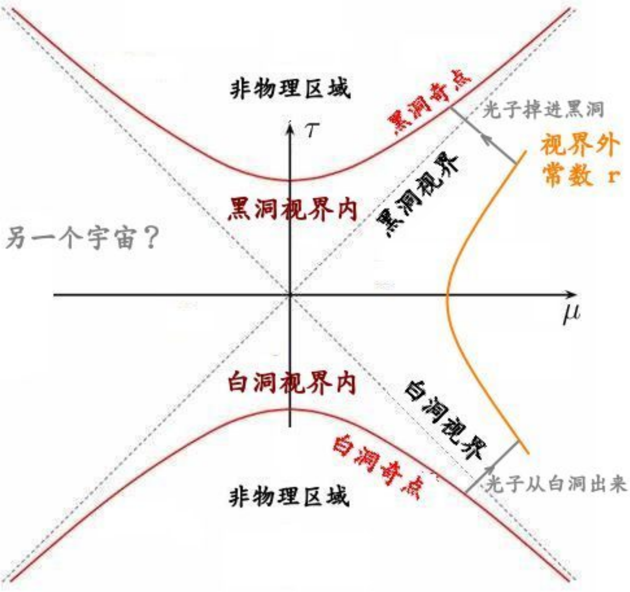
如果 $r \leq 2GM$，则

$$\tanh \frac{t}{4GM} = \frac{\mu}{\tau}$$

利用W函数的定义，有

$$\left(\frac{r}{2GM} - 1\right) e^{\frac{r}{2GM}} = \frac{\mu^2 - \tau^2}{4G^2M^2}$$

利用该式和上面 t 的表达式，我们也可以从 (r, t) 映射到 (μ, τ) （但会有一些符号不确定性）。


非物理区域
黑洞奇点
光子掉进黑洞
τ
视界外
常数 r
黑洞视界
黑洞视界内
另一个宇宙？
μ
白洞视界内
白洞视界
白洞奇点
光子从白洞出来
非物理区域

思考题

如果白洞和Kruskal坐标图里的“另一个宇宙”确实存在，我们能和“另一个宇宙”进行通话吗？

Kruskal坐标系里的光子的径向运动

光子走的是零测地线，所以径向运动方程非常简单：

$$d\mu = \pm d\tau$$

且这里的 $\pm$ 符号在运动过程中保持不变。

也就是说，在 τ-μ 平面上光子的径向运动世界线都是 45° 直线。

Kruskal坐标系里非零质量粒子的径向运动

对质量非零粒子，直接给出我推导的结果:

$$\begin{aligned}
\mu\frac{d\tau}{ds} &= \tau\frac{d\mu}{ds} + \varepsilon GM\mathrm{W}e^{\mathrm{W}} \\
\frac{d\tau}{ds} &= \sqrt{\left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2 + \frac{\mathrm{W}e^{\mathrm{W}}}{4}}
\end{aligned}$$

这里的 ε 是单位质量测试粒子的守恒能量。W 是 $\mathrm{W}\left(\frac{\mu^2-\tau^2}{4G^2M^2}\right)$ 的简写。

为了说服你我的推导是靠谱的，我特地写了一段代码来数值计算沿径向自由下落粒子的 $r(s)$ 函数，并和上一讲我们获得的解析解做比较。

http://zhiqihuang.top/gr/codes/KruskalFreeFall.py

忘了带秋裤......

上一讲中我的黑洞旅行故事中加一个情节：空间站上的人发现我忘了带秋裤，就想发光信号告诉我。为了让我能收到信号，发信号时间（按空间站上的人的计时）不得晚于我出发后多久？