General Relativity

§17 Schwarzschild Black Hole

Lecturer: 黄志琦

http://zhiqihuang.top/gr

史瓦西黑洞的视界

$$r = 2GM$$

对史瓦西度规,

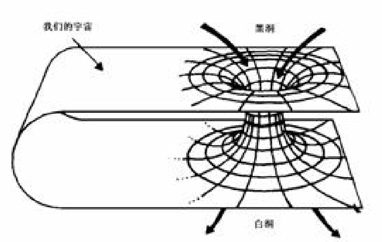
$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

在 $r < 2GM$ 的区域内，其实 r 坐标才是“时间”。如果 r 减小代表时间增加，则称之为黑洞。如果 r 增大代表时间增加，则称之为白洞。

（如果不谈量子效应）在黑洞 $r < 2GM$ 区域里 r 只能单调减少，任何物质无法从 $r < 2GM$ 的区域跑出来。在白洞 $r < 2GM$ 区域里 r 只能单调增加，任何物质都无法进入 $r < 2GM$ 的区域。

因此，我们把史瓦西黑洞或者白洞的 $r = 2GM$ 这个面称为结界视界。

一般恒星坍缩都是物质掉往中心的情况，所以是形成黑洞。目前天文观测上还没有任何迹象表明我们的可观测宇宙内存在白洞。



一种脑洞大开的想法是：如果白洞存在，它可能和黑洞在时空奇点相连，是旅行到“其他宇宙”的通道。

黑洞旅行

有去无回……

在之前讨论史瓦西度规里的粒子运动都是在 $r \gg GM$ 情况下讨论的。

为了研究 $r \sim GM$ 时的情况，我得去史瓦西黑洞旅行一趟。

行李清单

- 钟：计时。

- 激光笔：向空间站传输信息。

- 黎曼曲率测量仪：测量时空曲率，确定自己位置。

假设在$r = r_0$ ($r_0 \gg GM$) 的地方有相对史瓦西坐标保持静止(r, θ, ϕ不变）的空间站。这就是我的出发点了。

对径向下落者，不能使用Binet方程，要重新进行推导:

钟的计时

下落时间有限且有解析解

假设我从空间站开始由静止下落，则初始时刻，由归一化条件得到我的四维速度协变分量：

$$u_t = \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_0}}$$

由于 u_t 守恒，在任意时刻有：

$$\frac{dt}{ds} = \frac{\sqrt{1 - \frac{2GM}{r_0}}}{1 - \frac{2GM}{r}}$$

然后利用 ds^2 的表达式，有

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = 1$$

由此联立解出

$$\frac{dr}{ds} = -\sqrt{\frac{2GM}{r} - \frac{2GM}{r_0}}$$

$$\frac{dr}{ds} = -\sqrt{\frac{2GM}{r} - \frac{2GM}{r_0}}$$

这方程和牛顿力学自由下落是一样的！ 我们熟知牛顿力学里对应问题的解为滚轮线。于是照搬得到:

$$\begin{aligned} r &= \frac{r_0}{2}(1-\cos\theta) \\ s &= \sqrt{\frac{r_0^3}{8GM}}(\theta - \sin\theta) \end{aligned}$$

这里的 $\theta \in [\pi, 2\pi]$。初始时刻对应滚轮线顶点 $\theta = \pi$，掉到奇点的时刻对应 $\theta = 2\pi$。

可见，在掉到奇点前我的钟走过的时间是有限的：

$$s(2\pi) - s(\pi) = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r_0^3}{2GM}}$$

激光笔通信

多普勒红移+引力红移

在掉进视界之后我当然就无法用激光笔和空间站联络了。在此之前，我的激光笔发出的光子，在我的局域 Minkowski 标架下观察的频率为固定的 ν_0（因为我在自由下落；对非自由下落运动者而言这件事其实还蛮伤脑筋的）。即把光子的四维动量投影到我的局域标架时间轴（即我的四维速度 u_μ）上，满足

$$p_t \frac{\sqrt{1-\frac{2GM}{r_0}}}{1-\frac{2GM}{r}} + p_r\sqrt{\frac{2GM}{r}-\frac{2GM}{r_0}} = h\nu_0$$

又光子本身走零测地线，所以

$$(p_t)^2\left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-1} - (p_r)^2\left(1-\frac{2GM}{r}\right) = 0$$

联立上面两式可以解出

$$p_t = h\nu_0 \left(\sqrt{1 - \frac{2GM}{r_0}} - \sqrt{\frac{2GM}{r} - \frac{2GM}{r_0}} \right)$$

由于光子的 p_t 守恒，空间站那里接收到的光子能量为（即把光子四维动量投影到空间站的四维速度上）：

$$h\nu' = p_t \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{r_0}}} = h\nu_0 \left(1 - \sqrt{\frac{\frac{2GM}{r} - \frac{2GM}{r_0}}{1 - \frac{2GM}{r_0}}} \right)$$

即当 r 无限接近视界 $2GM$ 时，我发出的光子全都被无限红移了。这些光子到达空间站需要经过的时间也越来越长，趋于无穷。

思考题

如果一个相对于史瓦西坐标系静止的人在 $r < r_0$ 处给空间站发射光子，引力红移效应是更强还是更弱?

我眼中的天空

逐渐消失的圆盘

旅行中的我突然想用激光笔向尽可能多的方向发出信号（毕竟马上快失联了，总想留下点什么）

只要光不沿径向走，我们就可以用之前推导的光子版Binet方程：

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3u^2$$

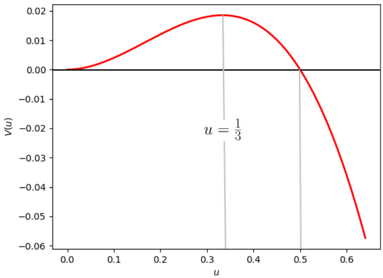
这里的 $u = \frac{GM}{r}$。

设初始条件为 $u = u_0 < \frac{1}{2}$，我需要计算初始 $\frac{du}{d\phi}$ 可能的取值范围(这里不妨假设我选择了 ϕ 单调增加的方向发射光子)，使得发出的光能跑到无穷远处（即 $u \to 0$)。

奇怪弹簧

假设我有个质量为1，弹簧势能函数为 $V(u)=\frac{1}{2}u^2-u^3$ 的奇怪振子，u 是振子的位移（弹簧的伸长量）。
那么振子的运动方程为：

$$\ddot{u}=-\frac{dV}{du}=-u+3u^2$$



于是问题转化为，已知初始位移 u_0 的情况下，初始速度$\dot{u}$ 为多少才能使振子回到 $u=0$ 的位置？显然答案是：

- 当 $u_0<\frac{1}{3}$，要求初始 $\dot{u}<\sqrt{2\left[V\left(\frac{1}{3}\right)-V\left(u_0\right)\right]}$
- 当 $u_0\geq\frac{1}{3}$，要求初始 $\dot{u}<-\sqrt{2\left[V\left(\frac{1}{3}\right)-V\left(u_0\right)\right]}$

对应回黑洞的问题，

- 当$u_0 < \frac{1}{3}$ 即 $r > 3GM$ 时，要求初始 $\frac{du}{d\phi} < \sqrt{\frac{1}{27} - u_0^2(1 - 2u_0)}$
- 当 $\frac{1}{3} < u_0 \leq \frac{1}{2}$即 $2GM < r \leq 3GM$时，要求初始 $\frac{du}{d\phi} < -\sqrt{\frac{1}{27} - u_0^2(1 - 2u_0)}$
- 当 $r <= 2GM$ 时，对应让 u 减小（r 增加）的解是白洞，和黑洞的假设不符，故要舍去这种可能性。

继续把初始的 $\frac{du}{d\phi}$ 转化为我看到的出射角（这需要把光子的四维速度往我的局域标架上投影）这件事情没有多大的乐趣。没乐趣的事情就留给你做了……（？？？）

可以看到的是，随着我靠近视界面，光线的出射方向范围越来越窄。那么，对于进来的光线也是如此。我能看到的天空逐渐缩小，最后在我到达黑洞视界处时完全消失（这一点你光看 $du/d\phi$ 并不能看出来，需要做投影计算）。然后，我进入了黑洞视界……