

General **R**elativity

§16 White Dwarf, Neutron Star and Black Hole

Lecturer: 黄志琦

<http://zhiqihuang.top/gr>

这一讲的主题是：致密星（白矮星、中子星、黑洞）的形成



别慌，我们只做个简单的数量级估计。

坍缩前



恒星主要靠燃烧（聚变）氢来维持高温高压，抵抗自身引力。

一般来说，氢管够，够败上亿年……

不管是几亿年还是几十亿年，扛不住马云宇宙爸爸活得久——最后还是败完了.....



进入要饭模式

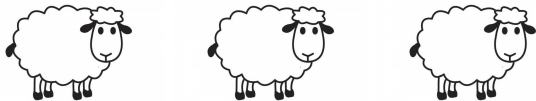
在要饭前其实还可能靠典当氦，碳.....短暂挣扎了一会儿，我们不纠结这些细节。



今天还钱，95折

一旦进入要饭模式，引力大哥就毫不客气地开始讨债.....

假设恒星质量是 M ，当它失去了聚变的支撑被引力压缩到半径为 R 时——反正都完蛋了，我们来数数吧：



根据泡利费米子要打架原理，恒星里的大概 M/m_p (m_p 是质子质量) 个电子，每个占据了一个微观态。根据海森堡微观态也要打架原理，每个微观态在相空间占据体积为 h^3 ——那么电子在动量空间的占据体积为

$$\rho_{\max}^3 \sim \frac{Mh^3}{m_p R^3}$$

我们忽略了 $\frac{4\pi}{3}$ 、自旋自由度可以干掉一个因子2以及电子个数其实比 M/m_p 还要少些等无关数量级的因素。

如果动量是非相对论性的，压强（单位面积单位时间通过动量）大致为

$$P \sim \rho_{\max} \left(\frac{M}{m_p R^3} \frac{\rho_{\max}}{m_e} \right) \sim \left(\frac{M}{m_p} \right)^{5/3} \frac{h^2}{R^5 m_e}$$

上式能成立的条件是 $\frac{M}{R^3} \ll \frac{m_e^3 c^3 m_p}{h^3}$ 。

极端相对论的情况无法有稳态的理由并不复杂，不过我们跳过这个细节……

压力和引力之比

$$\sim \frac{PR^2}{GM^2/R^2} \sim \frac{h^2}{GM^{1/3} m_p^{5/3} m_e R}$$

如果上式能取到 ~ 1 ，将代表稳定解：坍缩会导致 R 减小，压力超过引力。膨胀会导致 R 增大，引力超过压力。

同时要求 $\frac{h^2}{GM^{1/3}m_p^{5/3}m_e R} \sim 1$ 且 $\frac{M}{R^3} \ll \frac{m_e^3 c^3 m_p}{h^3}$ 等价于要求

$$M \ll \frac{1}{m_p^2} \left(\frac{hc}{G} \right)^{3/2} = 29 M_\odot$$

你当然不能指望这么粗糙的估算能得到Chandrasekhar质量极限 ($M < 1.4 M_\odot$)，不过，数量级已经很靠谱了。

对一个太阳质量的白矮星，稳定半径

$$R \sim \frac{h^2}{GM_\odot^{1/3} m_p^{5/3} m_e} \sim 10^5 \text{ km}$$

同样，这个数大致OK，但更准确的结果还要小一个数量级（白矮星大致为地球大小）。

等一下，质量极限的结果好像和电子质量无关？那么中子星的质量极限岂不是.....

没错，中子星的质量极限跟白矮星的相差无几！

差别在于计算稳定半径时要除以中子质量而非电子质量，所以中子星的稳定半径要比白矮星小三个数量级左右（10公里的量级）。

思考题



典型的中子星内部压力比白矮星高多少个量级？

黑洞——大质量恒星的宿命

如果恒星尸体的质量超过若干个太阳质量，那么无论是白矮星、中子星还是尚有争论的夸克星，都无法稳定存在。也就是费米压的抵抗引力的机制失效了。

这时一般认为没有什么可以阻止恒星尸体坍缩为时空奇点——黑洞。

史瓦西黑洞

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

史瓦西黑洞是比较理想化的黑洞，实际的黑洞由于吸积了周围的物质，都是有角动量的克尔黑洞。我们在hard模式再讨论.....

黑洞照片

